Fluxo / Percolação

Revisão de fundamentos

Princípios gerais

- Conservação de energia
- Conservação de massa

Conservação de energia: sólidos indeformáveis

- Energia potencial (ou de posição):
  - Trabalho realizado pelo corpo para ir de um ponto a outro
  - força x deslocamento =
    = massa x aceleração x deslocamento
- Energia cinética:
  - massa x (velocidade)^2 / 2

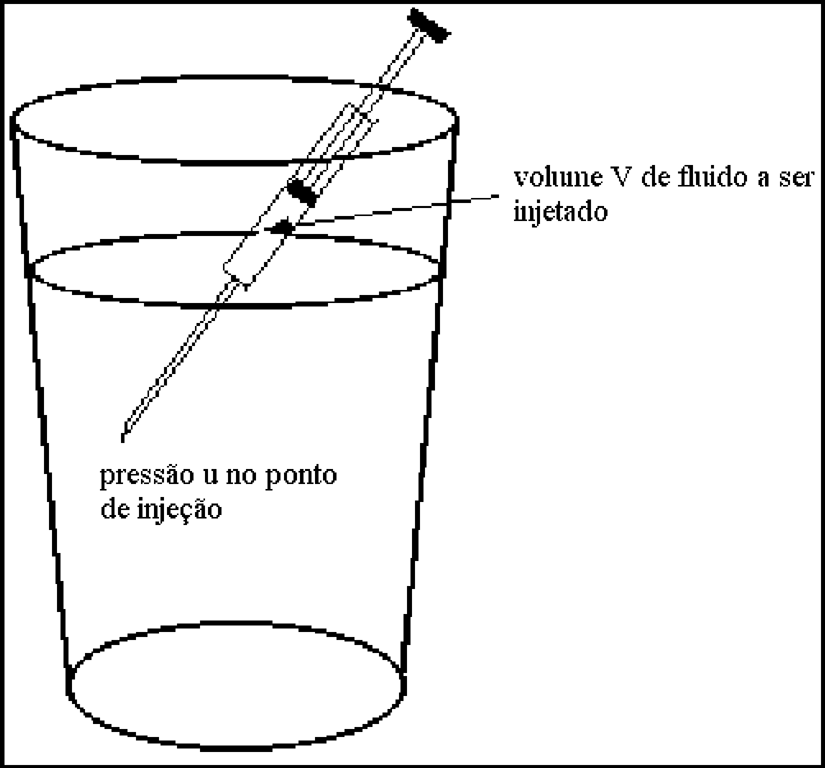
Conservação de energia: sólidos deformáveis

- Energia potencial (ou de posição):
  - Trabalho realizado pelo corpo para ir de um ponto a outro
  - força x deslocamento =
    = massa x aceleração x deslocamento
- Energia cinética:
  - massa x (velocidade)^2 / 2
- Energia de deformação (elástica)
  - tensão x deformação / 2

Conservação de energia: fluidos

- Energia potencial (ou de posição):
  - Trabalho realizado pelas partículas do volume V de fluido para ir de um ponto a outro
  - força x deslocamento =
    = massa x aceleração x deslocamento =
    = volume x densidade x aceleração x deslocamento
- Energia cinética:
  - volume x densidade x (velocidade)^2 / 2
- Energia de pressão:
  - volume x pressão

Energia de pressão (piezométrica)



- Trabalho (energia) =

  = V x u

Conservação de energia: fluidos

- Energia potencial (ou de posição):
  - Volume V de fluido a uma altura h_e
  - Energia potencial: $E_e = V \times \rho_w \times g \times h_e$
- Energia cinética:
  - Volume V de fluido com velocidade v
  - Energia cinética: $E_c = V \times \rho_w \times (v)^2 / 2$
- Energia de pressão:
  - Volume V de fluido a uma pressão u
  - Energia piezométrica: $E_p = V \times u$

Energia total

- Energia total = energia potencial + energia cinética + energia de pressão
- $E = E_e + E_c + E_p$
- $E = V \times \rho_w \times g \times h + V \times \rho_w \times (v)^2 / 2 +$
  $+ V \times u$
- Dividindo-se por ($V \times \rho_w \times g$) ...

Equação de Bernoulli

- $E / (V \times \gamma_w) = h_e + (v)^2 / (2 \times g) + u / (\gamma_w)$
- $H = h_e + h_c + u / \gamma_w$
- $H = h_e + h_c + h_p$
- Carga hidráulica total = carga altimétrica + + carga cinética + carga piezomética
- Carga hidráulica depende da cota de referência, porque a carga altimétrica depende da cota de referência

Fluxo em meios porosos

- Velocidades baixas, fluxo laminar (baixo número de Reynolds)
- Por exemplo, se $v = 10^{-3}$ m/s (alta!)
- $h_c = (v)^2 / (2 \times g) \cong 5 \cdot 10^{-8}$ m (muito baixa!)
- Portanto, $H \cong h_e + u / \gamma_w$
- $H \cong h_e + h_p$
- Carga hidráulica total ≅ carga altimétrica + + carga piezométrica

Carga hidráulica na percolação

$$H = h_e + h_p$$

$$H = h_e + \frac{u}{\gamma_w}$$

$$h_e = z + \text{constante}$$

Hipóteses

- Solo saturado por fluido incompressível
- Condutividade hidráulica e peso específico do fluido são constantes
- Relação linear entre velocidade de percolação e gradiente hidráulico (Lei de Darcy)

Velocidade de percolação

$v \propto d^2$(vazios do **solo**, controlados pelas partículas menores; relembrar, por exemplo, Hazen)

$v \propto \rho g$(massa específica do **fluido**)

$v \propto \frac{1}{\mu}$(viscosidade do fluido)

$v \propto \frac{\Delta H}{L}$ (intensidade da ação)

Lei de Darcy

$v = ki$ (Lei de Darcy)

$$i = \frac{\Delta H}{L}$$

k = condutividade hidráulica (solo + fluido)

$$k = \frac{Cd^2 \rho\, g}{\mu} = \frac{k_s \rho\, g}{\mu}$$

μ = viscosidade dinâmica do fluido

$k_s = Cd^2$ = permeabilidade (solo apenas)

Lei de Darcy generalizada

$$v = -ki$$

$$v_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$v_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y}$$

Equação geral

2D, em regime permanente, material homogêneo, ***isotrópico***

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2(H) = 0$$ Equação de Laplace

Equação de Laplace
fluxo 2D, regime permanente, material homogêneo, isotrópico

Linearidade

- Operador $\nabla^2(\cdot)$ é linear
  - $\nabla^2(h_1+h_2) = \nabla^2(h_1) + \nabla^2(h_2)$
  - $\nabla^2(ah) = a\,\nabla^2(h)$
- Demonstração
  - $$\frac{\partial^2(h_1+h_2)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}$$
    $$\frac{\partial^2(ah)}{\partial x^2} = a\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Operador linear

- Vale a superposição de efeitos
  - Exemplo: efeito de diversos poços no rebaixamento do lençol freático

    (pequeno erro introduzido pelas condições de contorno impostas pelos próprios pontos)
- Demonstra-se que a solução da equação diferencial linear é ÚNICA

Solução da equação de Laplace

- Solução é uma função H(x,y) tal que:
  - Em qualquer ponto do domínio de percolação é satisfeita a equação diferencial

$$\nabla^2 H = 0$$

  - No contorno são satisfeitas as condições de contorno

Condições de contorno (2 tipos)

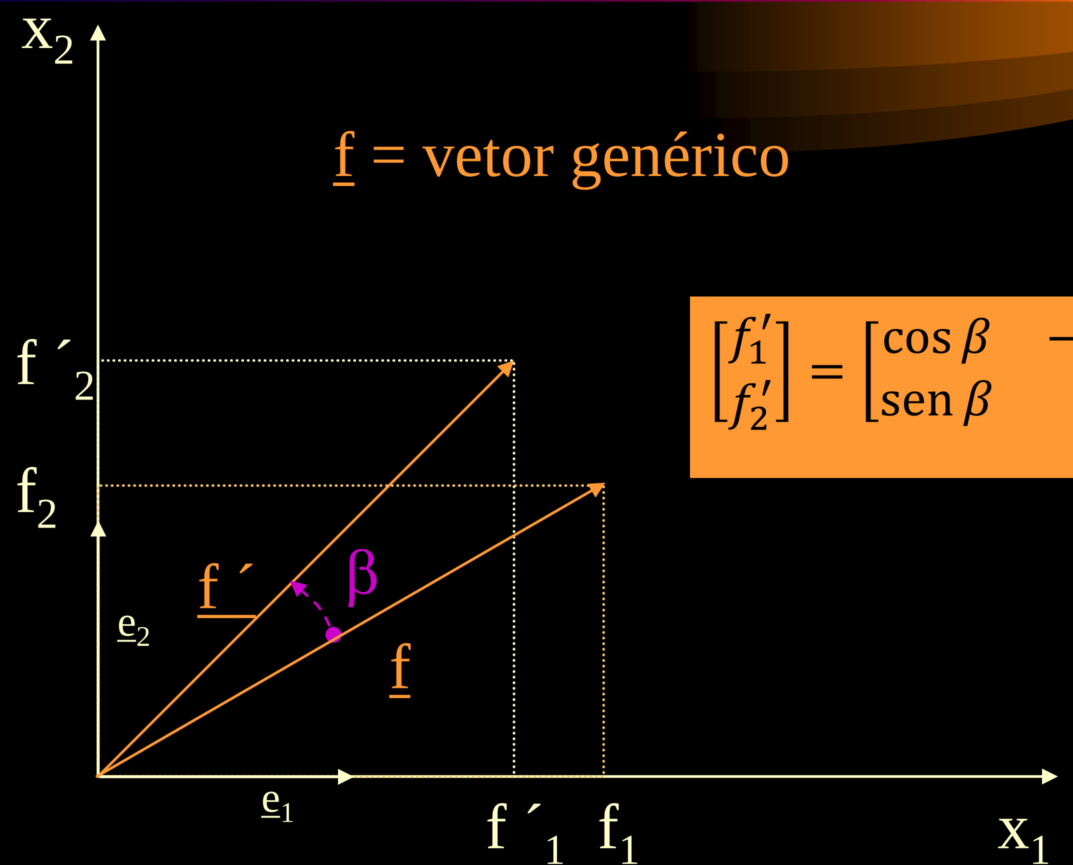
- **Condições de contorno essenciais**
  - Essenciais porque se elas não fossem impostas em nenhuma parte do contorno, não haveria solução
    - **$H = H^*$ em S_E**
  - S_E representa a região com contorno em que H é conhecida
- **Condições de contorno naturais**
  - Naturais porque decorrem naturalmente da solução da equação diferencial
  - $$\frac{\partial H}{\partial n} = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)^* \text{ em } S_N$$
    $$\frac{\partial H}{\partial n} = \nabla \mathbf{H} \bullet \mathbf{n} = \frac{\partial H}{\partial x} n_x + \frac{\partial H}{\partial y} n_y$$
  - **n** é a normal externa em um ponto do contorno
  - S_N representa a região com contorno em que H'_n é conhecida

Processos de solução

- Exatos: soluções analíticas (pouquíssimas situações)
- Aproximados
  - Soluções gráficas (rede de fluxo)
  - Soluções analógicas
  - Soluções numéricas
    - MDF
    - MEF
    - MEC

Anisotropia de condutividade hidráulica

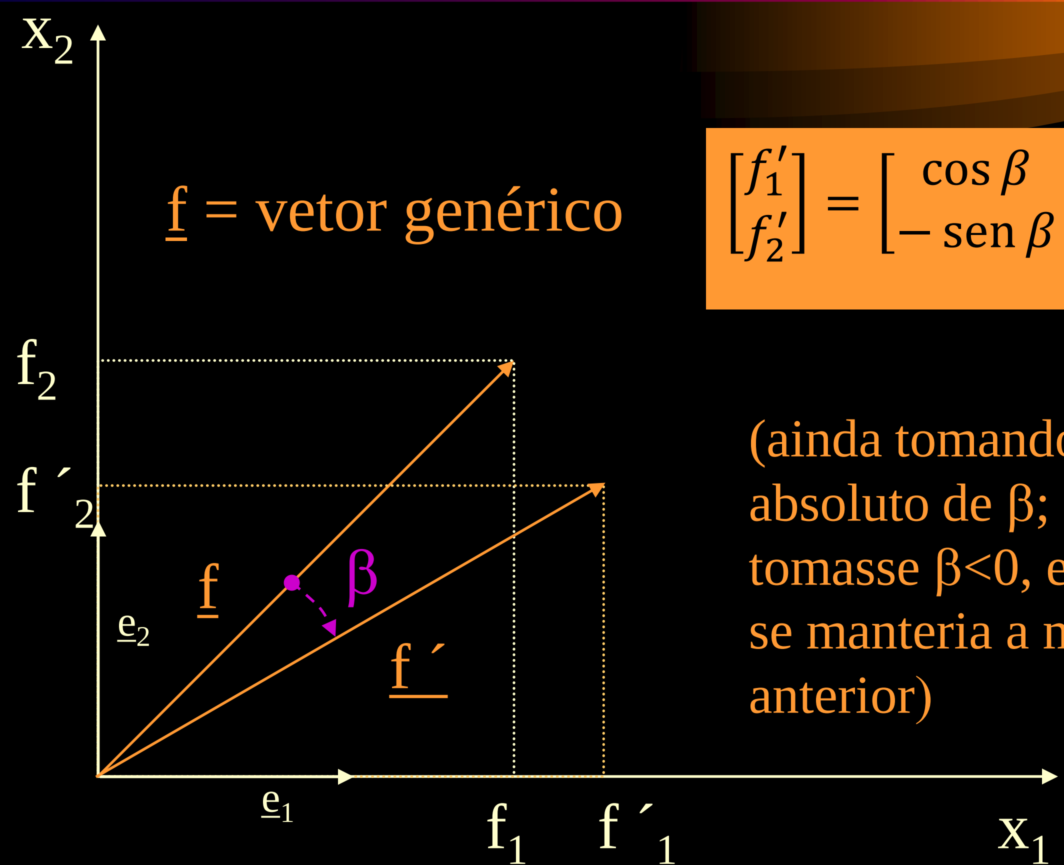
Rotação de um vetor (sentido anti-horário, positivo)



$$\begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\,\text{sen}\,\beta \\ \text{sen}\,\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$) = base ortgogonal qualquer (x,z) ou (r,s)

Rotação de um vetor (sentido horário, negativo)



$\underline{f}$ = vetor genérico

$$\begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

(ainda tomando o valor absoluto de β; caso aqui se tomasse β<0, então a matriz se manteria a mesma do caso anterior)

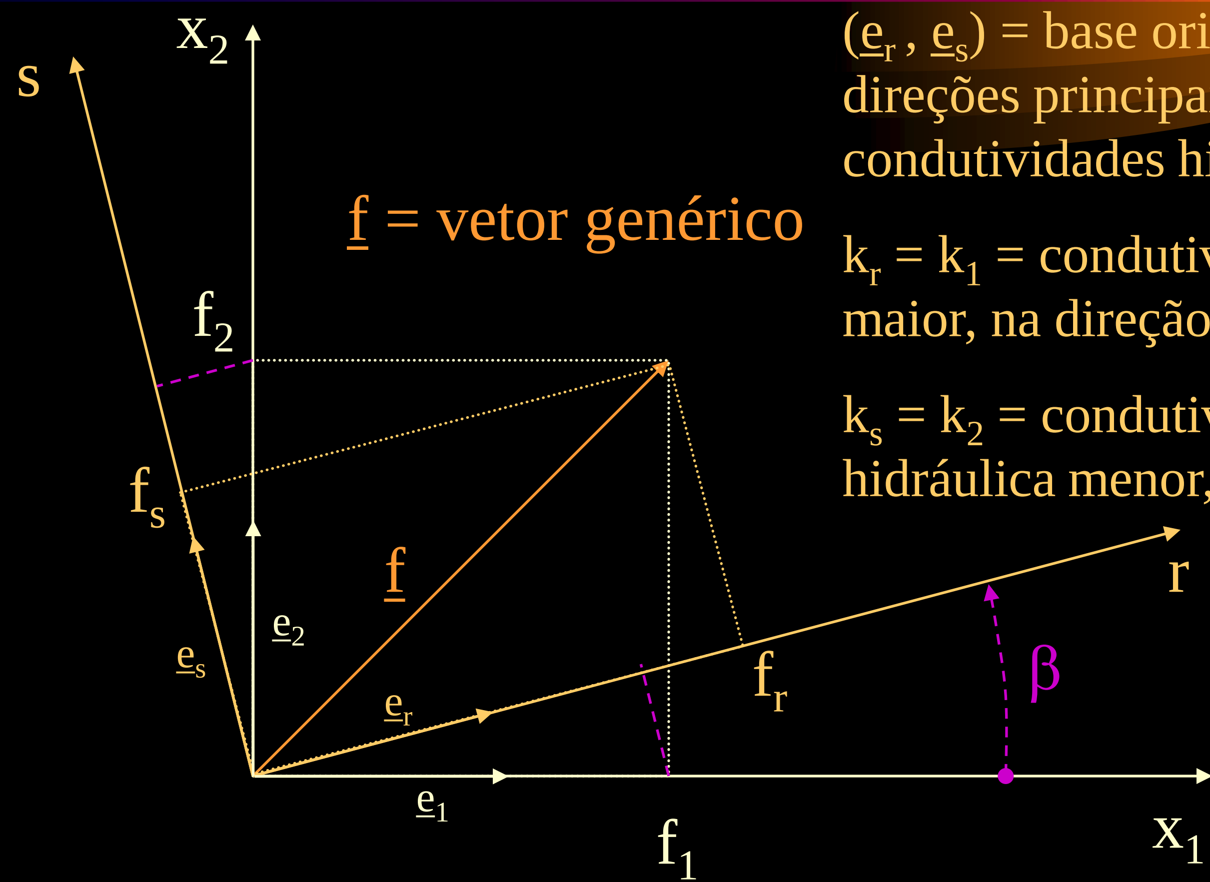
($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$) = base ortgogonal qualquer (x,z) ou (r,s)

Rotação de base

($\underline{e}_r$, $\underline{e}_s$) = base orientada segundo direções principais de condutividades hidráulicas

$k_r = k_1$ = condutividade hidráulica maior, na direção de r

$k_s = k_2$ = condutividade hidráulica menor, na direção de s



($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$) = base ortgogonal qualquer (x,z) ou (r,s)

Matriz de condutividade hidráulica

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_1 \cos^2\beta + k_2 \operatorname{sen}^2\beta & k_1 \operatorname{sen}\beta \cos\beta - k_2 \cos\beta \operatorname{sen}\beta \\ k_1 \cos\beta \operatorname{sen}\beta - k_2 \operatorname{sen}\beta \cos\beta & k_1 \operatorname{sen}^2\beta + k_2 \cos^2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cos^2 \beta + k_2 \operatorname{sen}^2 \beta & k_1 \operatorname{sen} \beta \cos \beta - k_2 \cos \beta \operatorname{sen} \beta \\ k_1 \cos \beta \operatorname{sen} \beta - k_2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta & k_1 \operatorname{sen}^2 \beta + k_2 \cos^2 \beta \end{bmatrix}$$

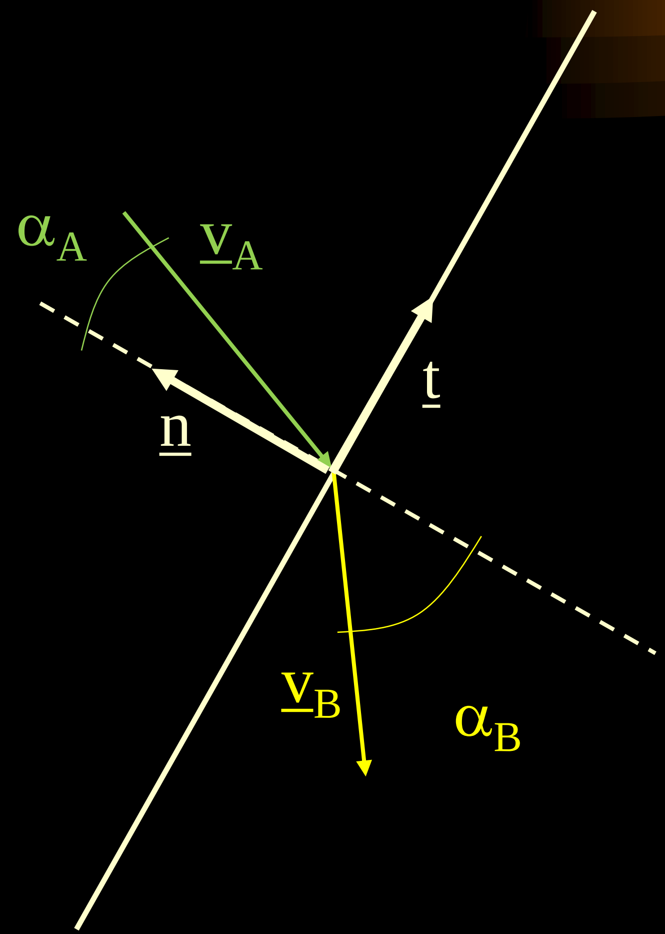
$$k_{11} = k_1 \cos^2 \beta + k_2 \operatorname{sen}^2 \beta$$
$$k_{12} = k_{21} = k_1 \operatorname{sen} \beta \cos \beta - k_2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta$$
$$k_{22} = k_1 \operatorname{sen}^2 \beta + k_2 \cos^2 \beta$$

Heterogeneidade descontínua

Material A

Isotrópico

k_A



$k_A < k_B$

Material B

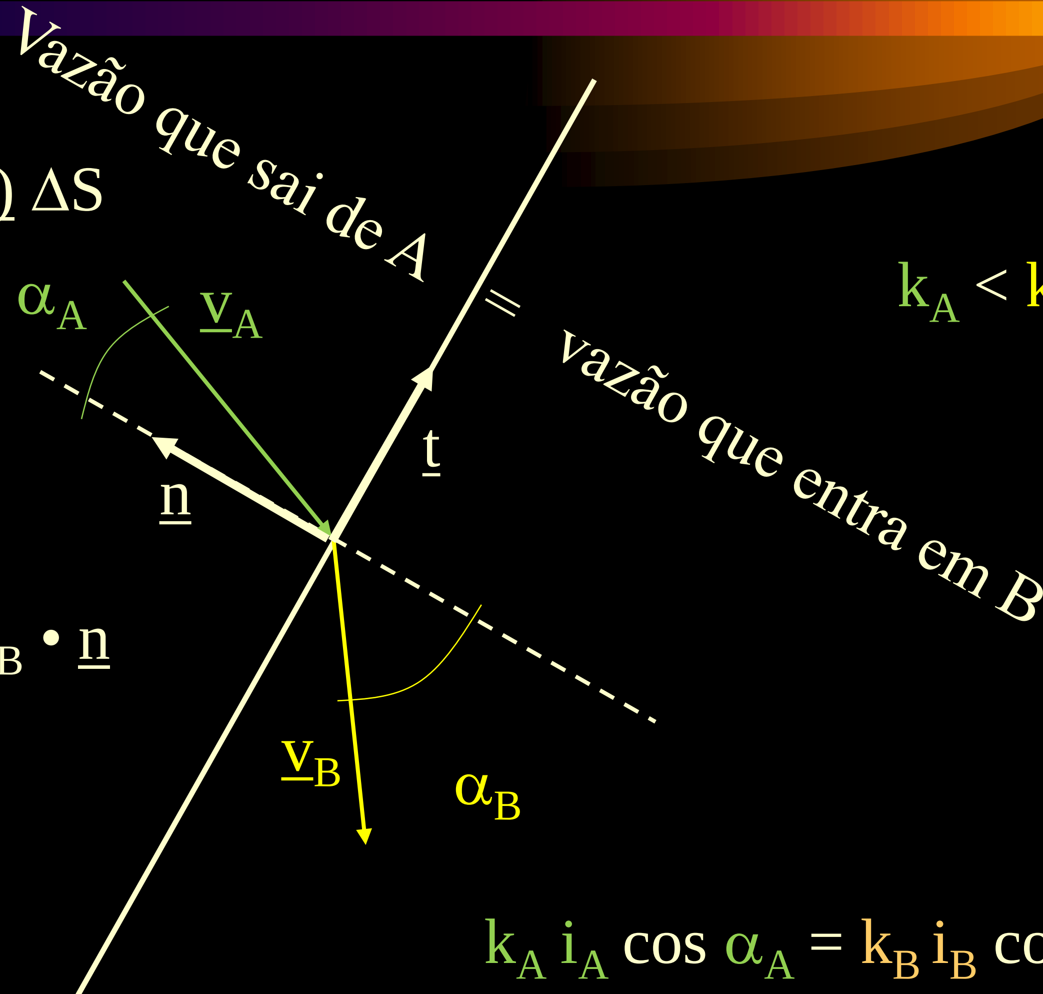
Isotrópico

k_B

Conservação de massa

$(\underline{v}_A \cdot \underline{n})\ \Delta S = (\underline{v}_B \cdot \underline{n})\ \Delta S$

$-k_A\, \underline{\nabla} h_A \cdot \underline{n} = -k_B\, \underline{\nabla} h_B \cdot \underline{n}$

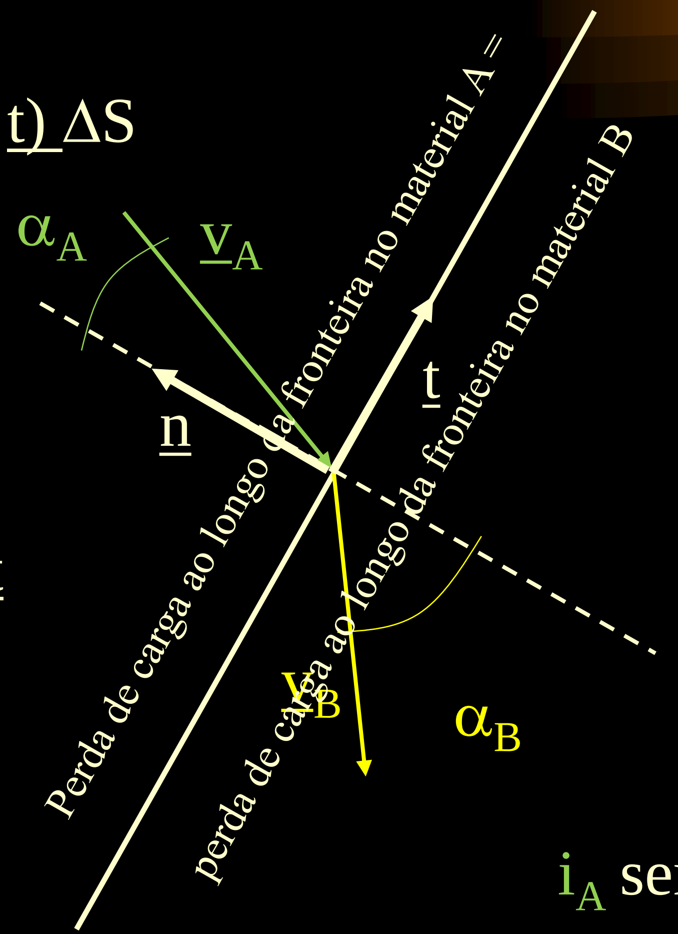


$k_A < k_B$

$k_A\ i_A \cos \alpha_A = k_B\ i_B \cos \alpha_B$

Conservação de energia

$(\underline{\nabla} h_A \bullet \underline{t})\,\Delta S = (\underline{\nabla} h_B \bullet \underline{t})\,\Delta S$



$k_A < k_B$

$\underline{\nabla} h_A \bullet \underline{t} = \underline{\nabla} h_B \bullet \underline{t}$

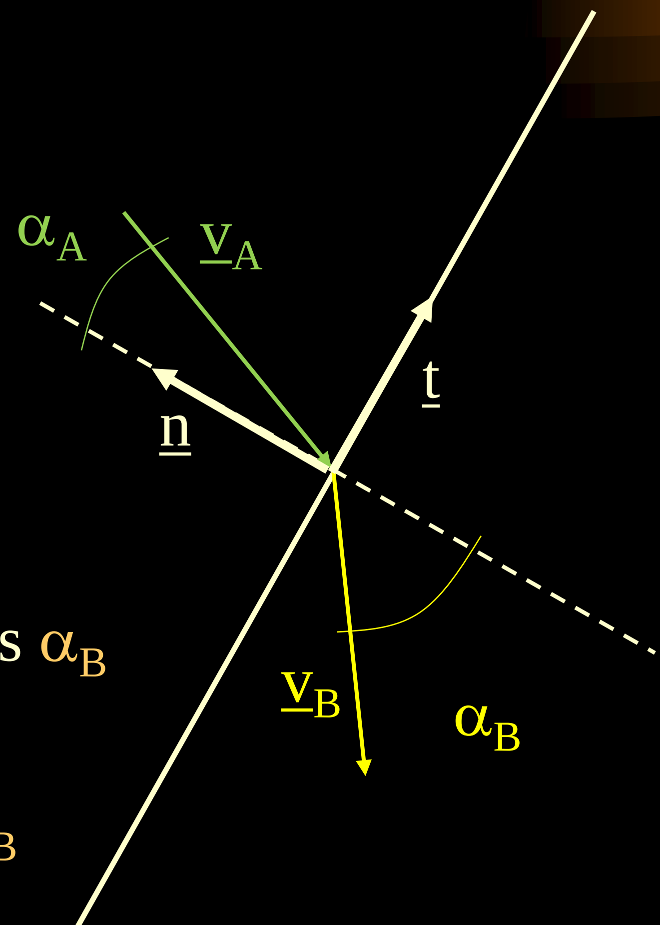
$i_A \text{ sen } \alpha_A = i_B \text{ sen } \alpha_B$

Heterogeneidade descontínua: conclusão

Material A

Isotrópico

k_A



$k_A < k_B$

Material B

Isotrópico

k_B

$k_A\, i_A \cos \alpha_A = k_B\, i_B \cos \alpha_B$

$i_A \operatorname{sen} \alpha_A = i_B \operatorname{sen} \alpha_B$

$$\boxed{\frac{k_A}{\tan \alpha_A} = \frac{k_B}{\tan \alpha_B}}$$