ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Cinemática do Sólido – Parte 4

Ronaldo de Breyne Salvagni
Outubro de 2021

PME3100 Mecânica I

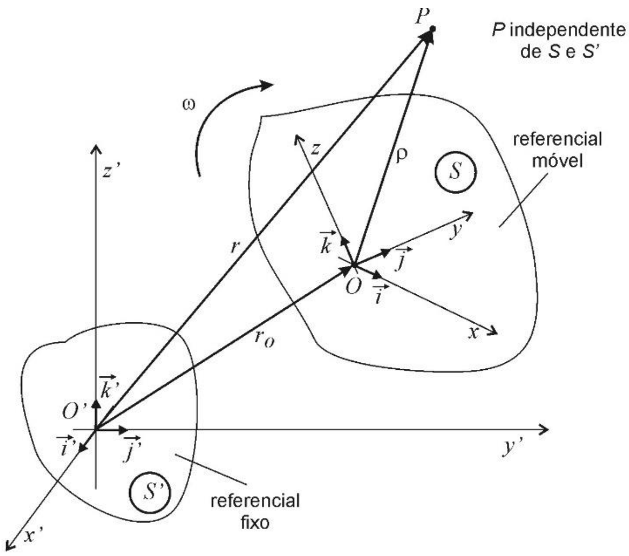
CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

6 – Composição de movimentos

O movimento de um sólido pode ser definido pelo vetor velocidade de um de seus pontos e pelo vetor rotação desse sólido. Com isto, através da Fórmula de Poisson podemos conhecer a velocidade de qualquer outro ponto desse sólido.

Um sistema de referência, com um sistema de coordenadas *(O, x, y, z)* fixo em relação a ele, pode ser considerado como um sólido e, assim, seu movimento pode ser descrito pela velocidade da origem *O* e pelo vetor rotação desse sistema, em relação a outro referencial.

Sejam dois referenciais, *S* e *S'*, de eixos *(Ox, Oy, Oz)* e *(O'x', O'y', O'z')*, e versores $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ e $(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$, respectivamente, com os eixos fixos aos respectivos referenciais. Seja também um ponto *P* movendo-se livremente no espaço.



Supõe-se *S'* fixo, e conhece-se o movimento de *S* em relação a *S'*, ou seja, conhece-se a função $\vec{r}_O(t)$ e o vetor rotação $\vec{\omega}(t)$ de *S* medido por um observador em *S'*.

Chamaremos $\vec{\omega}(t)$ de *"vetor de rotação de arrastamento"*.

Definiremos:

- ***Movimento relativo de P (em relação a S)***: é o movimento de *P* visto por um observador em *S* (note-se que *P* é um ponto móvel - não está fixo em *S* nem em *S'*).

- ***Movimento de arrastamento***: é o movimento, em relação a *S'*, do ponto de *S* que, naquele instante, coincide com *P*. É o mesmo que supor *P* fixo em *S* a cada instante, e observar seu movimento em relação a *S'*.

- ***Movimento absoluto ou resultante***: é o movimento de P em relação a S'.

O processo que permite correlacionar os três tipos de movimentos chama-se "composição de movimentos", e pressupõe conhecido o movimento de *S* em relação a *S'*.

Até agora, temos expressões para o movimento absoluto. Vamos re-deduzir aquelas expressões (velocidade e aceleração), separando as parcelas correspondentes a cada tipo de movimento.

A composição de movimentos pode ser feita a partir da expressão:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$$

onde $\vec{\rho} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Derivando em relação ao tempo:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} + x\dot{\vec{\imath}} + y\dot{\vec{\jmath}} + z\dot{\vec{k}} \qquad \text{(I)}$$

Já vimos anteriormente que:

$$\dot{\vec{\imath}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}$$
$$\dot{\vec{\jmath}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}$$
$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

Portanto:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) + \vec{v}_r$$

com $\vec{v}_r = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$

De acordo com as definições apresentadas, vemos que:

$\vec{v}$: velocidade absoluta (ou resultante) do ponto P

$\vec{v}_r$: velocidade relativa do ponto P

$[\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)] = \vec{v}_a$: seria a velocidade de P se este estivesse rigidamente ligado a S, ou seja, é a velocidade de arrastamento de P.

Assim, a ***lei de composição de velocidades*** é:

$$\boldsymbol{\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_r}$$

com:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

e

$$\vec{v}_r = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

LEMBRETE:	$\boldsymbol{\vec{v}_O, \vec{\omega}}$ $\rightarrow$ **em relação a S'**
	$\boldsymbol{\vec{v}_a}$ $\rightarrow$ ***P* fixo em S**
	$\boldsymbol{\vec{v}_r}$ $\rightarrow$ **S fixo, ignora-se S'**

Derivando novamente (I) em relação ao tempo, obtemos:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \wedge (P - O) + \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}\right]$$

Temos:

$$\frac{d\dot{\vec{r}}_0}{dt} = \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{a}_O$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{\omega} \wedge (P - O)] = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{v} - \vec{v}_O) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O) + \vec{v}_r] =$$
$$= \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}\right) = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\dot{\vec{\imath}} + \dot{y}\dot{\vec{\jmath}} + \dot{z}\dot{\vec{k}} =$$
$$= \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \left(\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}\right) =$$
$$= \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

Assim, podemos escrever:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k} + \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

O trinômio $\vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]$ corresponde à aceleração de *P* considerado rigidamente ligado a *S*: é a <u>*aceleração de arrastamento*</u>:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]$$

Os termos $\ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$ correspondem à <u>*aceleração relativa*</u>:

$$\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

Finalmente, o termo que resta $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$ é a chamada <u>*aceleração complementar*</u> ou <u>*aceleração de Coriolis*</u>, que depende dos movimentos relativo e de arrastamento simultaneamente:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

Desta forma, a <u>***lei de composição de acelerações***</u> será:

$$\boldsymbol{\vec{a}} = \boldsymbol{\vec{a}_r} + \boldsymbol{\vec{a}_a} + \boldsymbol{\vec{a}_c}$$

<u>Assim:</u>

- A velocidade e a aceleração de arrastamento, $\vec{v}_a$ e $\vec{a}_a$, correspondem a *P* rigidamente ligado a *S* (referencial móvel).

- A velocidade e a aceleração relativas, $\vec{v}_r$ e $\vec{a}_r$, correspondem a se considerar *S* fixo e ignorando-se *S'*.

- A aceleração complementar ou de Coriolis, $\vec{a}_c$, depende dos dois movimentos simultâneos, e não pode ser identificada ao estudar cada um isoladamente.

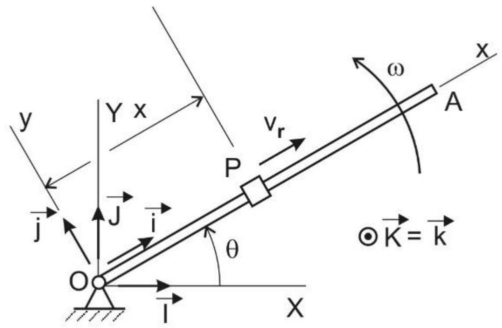
<u>**OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:**</u> não confundir "referencial" com "sistema de coordenadas".

Um sistema de coordenadas é apenas uma base do espaço vetorial usada para representar um vetor (velocidade, aceleração, etc.) em termos de suas componentes nessa base; ao mudar de sistemas de coordenadas (base), nem o vetor nem a sua natureza se alteram; apenas as suas componentes podem ser diferentes. Por outro lado, ao mudar de referencial, o vetor observado/medido (velocidade, aceleração, etc.) é diferente, dependendo do referencial considerado.

Por exemplo, na figura abaixo, o anel *P* percorre a barra *OA* com velocidade escalar v_r relativa a ela. A barra *OA* gira em torno do ponto *O* com velocidade angular ω, e o sistema de coordenada (*O*, *x*, *y*, *z*) é solidário a essa barra, girando junto com ela. Supõe-se que o chão está parado, sendo este o referencial fixo, e o sistema de coordenadas (*O*, *X*, *Y*, *Z*) está preso ao chão. Pode-se estabelecer a relação entre os dois sistemas de coordenadas:

$$\vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{I} + \sin\theta\,\vec{J}$$

$$\vec{\jmath} = -\sin\theta\,\vec{I} + \cos\theta\,\vec{J}$$



Considerando a barra *OA* como referencial móvel, a velocidade relativa do ponto *P* pode ser expressa como:

$$\vec{v}_r = v_r\vec{\imath}$$

ou

$$\vec{v}_r = v_r\left(\cos\theta\,\vec{I} + \sin\theta\,\vec{J}\right)$$

Note-se que a velocidade relativa é a mesma, podendo ser expressa usando o sistema de coordenadas fixo ou o sistema móvel.

Analogamente, para a velocidade de arrastamento:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) = \omega x\vec{\jmath} = \omega x\left(-\sin\theta\,\vec{I} + \cos\theta\,\vec{J}\right)$$

A velocidade absoluta, ou resultante, será:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_a = v_r\vec{\imath} + \omega x\vec{\jmath} = (v_r\cos\theta - \omega x\sin\theta)\vec{I} + (v_r\sin\theta + \omega x\cos\theta)\vec{J}$$

Assim, ***ao mudar de sistema de coordenadas, o vetor permanece o mesmo***, mudando apenas as suas componentes. Porém, ***ao mudar de referencial, o vetor medido/observado é outro***: no referencial móvel é a velocidade relativa, e no referencial fixo é a velocidade absoluta.

Para as acelerações:

$$\vec{a}_r = \dot{v}_r\vec{\imath} = \dot{v}_r\left(\cos\theta\,\vec{I} + \sin\theta\,\vec{J}\right)$$

$$\vec{a}_a = \dot{\omega}x\vec{\jmath} - \omega^2x\vec{\imath} = (-\dot{\omega}x\sin\theta - \omega^2x\cos\theta)\vec{I} + (\dot{\omega}x\cos\theta - \omega^2x\sin\theta)\vec{J}$$

$$\vec{a}_c = 2\omega v\vec{\jmath} = 2\omega v\left(-\sin\theta\,\vec{I} + \cos\theta\,\vec{J}\right)$$

Aceleração absoluta:

$$\vec{a} = (\dot{v}_r - \omega^2x)\vec{\imath} + (\dot{\omega}x + 2\omega v)\vec{\jmath} =$$

$$= [(\dot{v}_r - \omega^2x)\cos\theta - (\dot{\omega}x + 2\omega v)\sin\theta]\vec{I} + [(\dot{v}_r - \omega^2x)\sin\theta + (\dot{\omega}x + 2\omega v)\cos\theta]\vec{J}$$

A <u>*trajetória relativa*</u> é uma reta: a reta *Ox*.

A <u>*trajetória absoluta*</u>, se v_r e ω forem constantes, é uma espiral. Caso contrário, será uma curva qualquer, dependendo de v_r e ω.

O <u>*movimento relativo*</u> (de *P*) é retilíneo.

O <u>*movimento de arrastamento*</u> (da barra) é de rotação pura em torno de *O*, com cada ponto descrevendo um movimento circular em torno desse ponto.

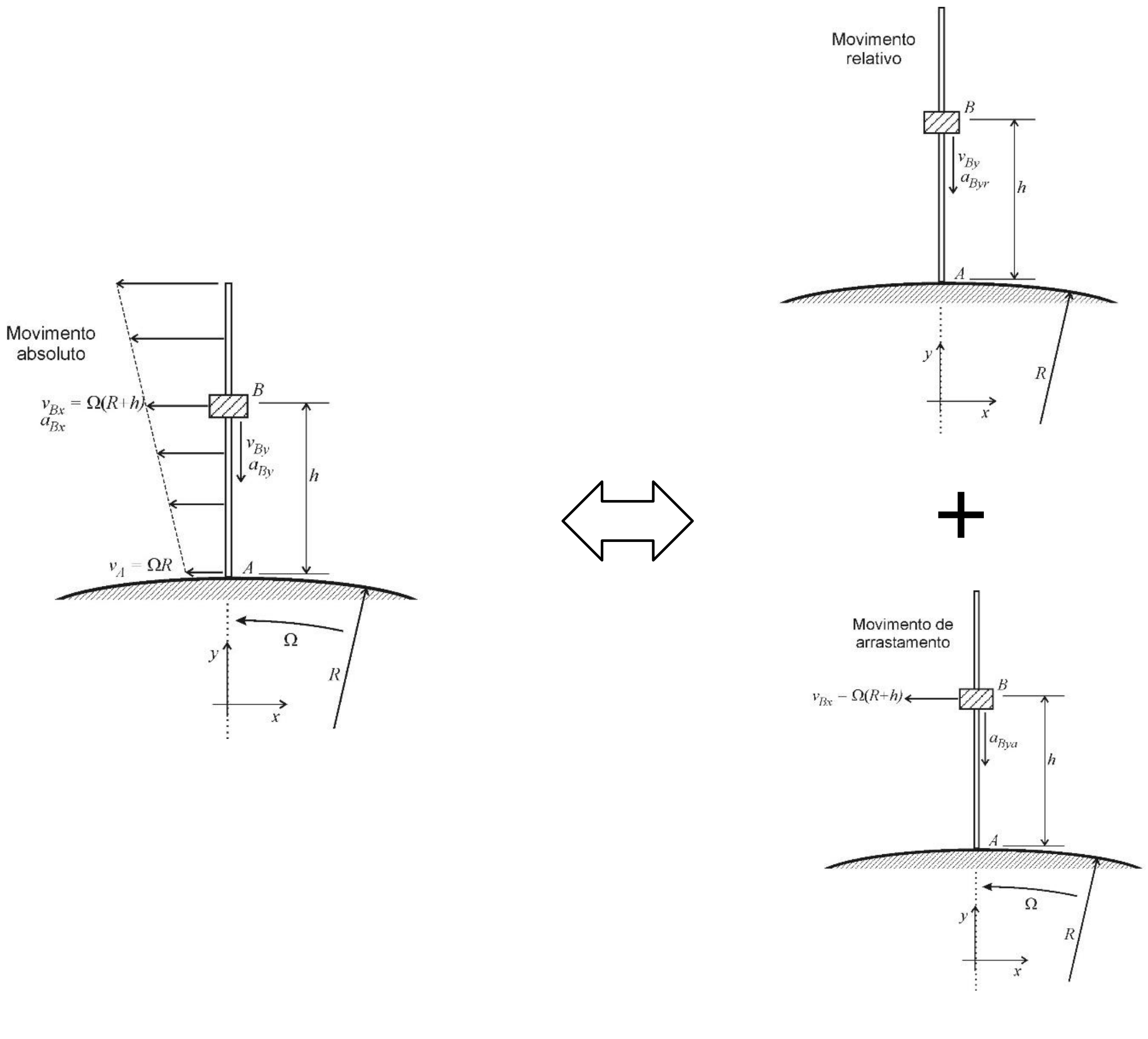
<u>A natureza da composição de movimentos (o que é)</u>

A “composição de movimentos” é uma <u>técnica</u> ou <u>procedimento</u>, tendo como uma das suas finalidades facilitar a resolução ou análise de problemas mais complexos, dividindo-o em dois problemas mais simples, equacionando estes problemas e compondo os respectivos resultados para obter o equacionamento do problema complexo inicial.

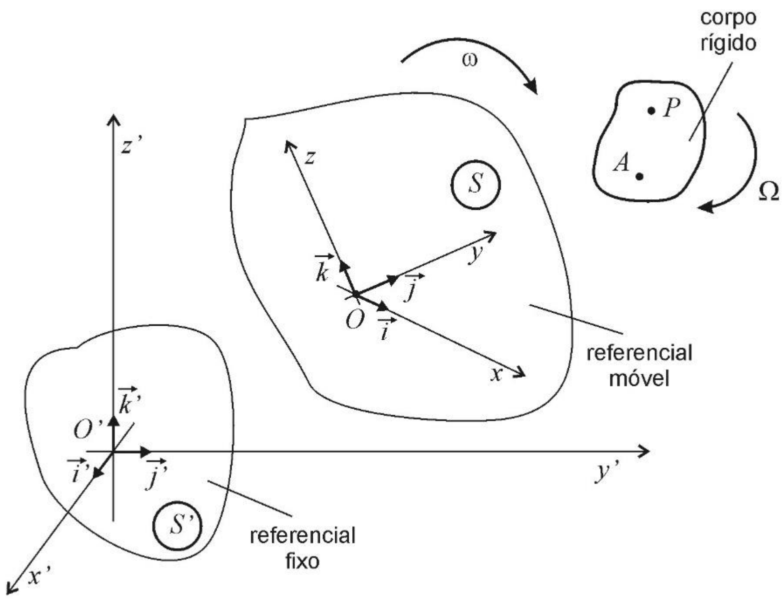
Para grandezas com comportamento linear, essa composição é uma simples soma. Entretanto, para grandezas não lineares, é necessário complementar essa soma com os termos adequados para obtermos o equacionamento correto do sistema complexo original.

No caso da cinemática dos corpos rígidos, o campo de velocidades tem comportamento linear, de modo que basta somar as grandezas relativas e de arrastamento. Já no caso do campo de acelerações, o comportamento não é linear, e é necessário adicionar a chamada “aceleração complementar” para obter o equacionamento correto da aceleração absoluta.

Como ilustração, consideremos o exemplo mostrado na figura a seguir, com a Terra girando, com rotação constante, em torno de seu eixo (suposto fixo) normal ao plano do desenho, e um elevador descendo ao longo de uma coluna alta, fixa na Terra. No movimento absoluto, esse elevador tem componentes vertical e horizontal de velocidades, bem como componentes horizontal (a velocidade horizontal diminui à medida que o elevador desce) e vertical de acelerações. Ao decompor esse movimento em dois (relativo e de arrastamento), temos componentes vertical e horizontal de velocidades, mas temos apenas componente vertical de aceleração. Assim, na soma das acelerações relativa e de arrastamento, é necessário acrescentar uma “aceleração complementar” horizontal, para se obter o campo de acelerações absoluto correto.



<u>Para corpos rígidos:</u>



Seja: $\vec{\Omega}$ $\rightarrow$ vetor rotação absoluta do corpo rígido

$\vec{\Omega}_r$ $\rightarrow$ vetor rotação relativa do corpo rígido, em relação ao referencial móvel

$\vec{\omega}$ $\rightarrow$ vetor rotação do referencial móvel (de arrastamento; em relação ao referencial fixo, obviamente)

Temos, para um ponto P do corpo, sendo A outro corpo do mesmo corpo:

$$\vec{v}_{P(abs)} = \vec{v}_{A(abs)} + \vec{\Omega} \wedge (P - A) \qquad \text{(A)}$$

$$\vec{v}_{P,r} = \vec{v}_{A,r} + \vec{\Omega}_r \wedge (P - A)$$

$$\vec{v}_{P,a} = \vec{v}_{A,a} + \vec{\omega} \wedge (P - A)$$

Pela lei de composição de velocidades:

$$\vec{v}_{P(abs)} = \vec{v}_{P,r} + \vec{v}_{P,a} =$$

$$= \vec{v}_{A,r} + \vec{v}_{A,a} + \left(\vec{\Omega}_r + \vec{\omega}\right) \wedge (P - A) =$$

$$= \vec{v}_{A(abs)} + \left(\vec{\Omega}_r + \vec{\omega}\right) \wedge (P - A) \qquad \text{(B)}$$

Como (A) e (B) devem ser válidas para qualquer ponto P do sólido, chega-se a:

$$\boldsymbol{\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_r + \vec{\omega}}$$

que é a chamada "***<u>lei de composição de vetores de rotação</u>***".

Derivando essa expressão em relação ao tempo:

$$\boldsymbol{\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\vec{\Omega}}_r + \dot{\vec{\omega}}}$$

e sendo:

$\dot{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha}$ $\rightarrow$ vetor de aceleração rotacional absoluta do corpo

$$\dot{\vec{\Omega}}_r = \dot{\Omega}_{rx}\vec{\imath} + \dot{\Omega}_{ry}\vec{\jmath} + \dot{\Omega}_{rz}\vec{k} + \Omega_{rx}\dot{\vec{\imath}} + \Omega_{ry}\dot{\vec{\jmath}} + \Omega_{rz}\dot{\vec{k}} = \underbrace{\dot{\Omega}_{rx}\vec{\imath} + \dot{\Omega}_{ry}\vec{\jmath} + \dot{\Omega}_{rz}\vec{k}}_{\vec{\alpha}_r} + \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega}_r$$

onde $\vec{\alpha}_r = \dot{\Omega}_{rx}\vec{\imath} + \dot{\Omega}_{ry}\vec{\jmath} + \dot{\Omega}_{rz}\vec{k}$ → vetor de aceleração rotacional relativa do corpo, em relação ao referencial móvel; e

$\dot{\vec{\omega}}$ → vetor de aceleração rotacional do referencial móvel (de arrastamento; em relação ao referencial fixo, obviamente)

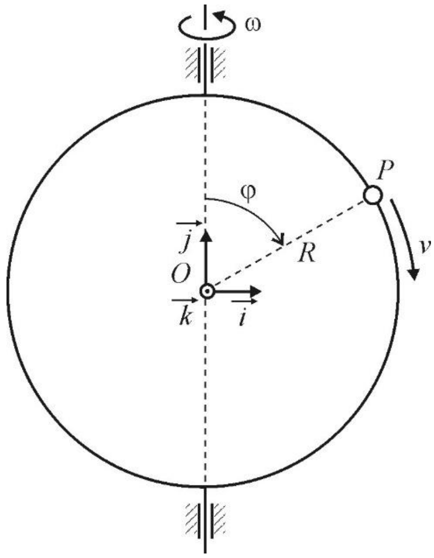
obtemos:

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_r + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\boldsymbol{\Omega}}_r$$

que é a "***lei de composição de vetores de aceleração rotacional***".

O termo $\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\boldsymbol{\Omega}}_r$ é a chamada *aceleração rotacional complementar*, ou "*aceleração de Resal*".

Exemplo 1: A circunferência da figura abaixo, de raio *R*, gira ao redor do eixo *AB* com velocidade angular ω constante. Um ponto *P* percorre a circunferência com velocidade relativa de módulo constante *v*. Determine, em relação ao sistema girante $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ indicado na figura, as velocidades relativa e de arrastamento do ponto *P*, bem como as aceleração relativa, de arrastamento e complementar, em função de φ.



Resolução:

- velocidade relativa $\vec{v}_r$

movimento relativo: supõe-se parado o referencial que se move (circunferência):

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}\cos\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} - \boldsymbol{v}\sin\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Também temos, <u>no movimento relativo ($\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ parados)</u>:

$$(P-O) = R(\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}) \Rightarrow \vec{v}_r = \frac{d(P-O)}{dt} = R\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath})$$

Comparando com a equação anterior, temos: $\dot{\varphi} = \frac{v}{R}$

- velocidade de arrastamento $\vec{v}_a$

movimento de arrastamento: supõe-se o ponto rigidamente ligado ao referencial que se move:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O) = \vec{0} + \omega\vec{\jmath} \wedge (R\sin\varphi\,\vec{\imath} + R\cos\varphi\,\vec{\jmath}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{a}} = -\boldsymbol{\omega R}\sin\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

- aceleração relativa $\vec{a}_r$

Derivando a expressão da velocidade relativa em relação ao tempo, <u>**no movimento relativo**</u>, e usando $\dot{\varphi} = \frac{v}{R}$ obtido acima, temos:

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{v}_r\right)_{rel} = \left[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cos\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} - \boldsymbol{v}\sin\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}})\right]_{rel} = \vec{a}_r = v\dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{\imath} - \cos\varphi\,\vec{\jmath}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{r}} = -\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}}\sin\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} - \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}}\cos\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

- aceleração de arrastamento

P fixo à circunferência:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{O,a} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)] =$$

$$= \omega^2\vec{\jmath} \wedge [\vec{\jmath} \wedge (R\sin\varphi\,\vec{\imath} + R\cos\varphi\,\vec{\jmath})] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{a}} = -\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{R}\sin\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$$

- aceleração complementar (Coriolis)

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2\omega\vec{\jmath} \wedge (v\cos\varphi\,\vec{\imath} - v\sin\varphi\,\vec{\jmath}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{c}} = -\boldsymbol{2v\omega}\cos\boldsymbol{\varphi}\,\vec{\boldsymbol{k}}$$