

Cap. 4 - Teoremas de Circuitos

4.2 - Propriedade da Linearidade

Linearidade é a
propriedade de um
elemento descrever
uma relação linear
entre causa e

efeito. A propriedade
é uma combinação
da propriedade de
homogeneidade (apli-
cação de um fa-

ton de escala) e da
propriedade da adi-
tividade.

A propriedade da
homogeneidade

requer que, se a
entrada (também
chamada de excita-
ção) for multiplica-
da por uma

constante, então
a saída (também
denominada respos-
ta) deverá ser
multiplicada

por essa mesma
constante. Para
um resistor, a lei
de Ohm relaciona
a entrada i com
a saída v .

$$V = i \cdot R$$

Se a corrente for
aumentada por uma
constante k , então
a tensão aumenta
correspondente

mente de $\underline{K}$, isto é:

$$K \cdot i \cdot R = K \cdot U$$

A propriedade de
aditividade requer
que a resposta

pra soma de entrada
das seja a soma
das respostas a
cada entrada
aplicada
separada.

mente. Usando a
relação tensão-
- corrente de um
resistor, se

$$v_1 = i_1 \cdot R$$

$$v_2 = i_2 \cdot R$$

então aplicar $(i_1 + i_2)$

resulta em:

$$v = (i_1 + i_2) \cdot R = i_1 R + i_2 R = v_1 + v_2$$

Um circuito linear

é um circuito cuja
saída está linear
mente relacionada
com a de entrada

mente proporcional
à sua entrada.

O circuito linear
não possui nenhuma
fonte indepen-

dente dentro dele.
Ele é excitado por
uma fonte de
tensão $\underline{v_s}$, que
serve como

entrada. O circui-
to é terminado
com uma carga
 R . Poderíamos ad-
tar a corrente

i que passa por R como
saída.

Exemplos:

$$V_D = 10V \rightarrow i = 2A$$

$$V_D = 1V \rightarrow i = 0,2A$$

$$i = 1mA \rightarrow V_D = 5mV$$

4.3) Superposição

O conceito da superposição se baseia na propriedade da linearidade.

O princípio da super-
posição afirma que a
tensão (ou a corrente)
em um elemento num
circuito linear é a
soma algébrica

ca da soma das ten-
sões (ou das correntes)
naquela elemento em
virtude da atuação
isolada de cada uma
das fontes
independentes.

Para aplicar o princípio da superposição, precisamos ter em mente duas coisas:

(1) consideramos uma fonte independente

por vez enquanto todas
as demais fontes
independentes estão
desligadas. Isso impli-
ca substituir cada
fonte de tensão por
0V (ou um curto-

- circuito) e cada fonte
de corrente por $\underline{0A}$
(ou um circuito aberto).

Dessa maneira, obtemos
um circuito mais
simples e mais fácil
de manipular.

(2) As fontes dependentes são deixadas intactas, pois elas são controladas por variáveis de circuito.

Com isso em mente, aplicamos o princípio

da superposição em três etapas:

(a) Desative todas as fontes independentes, exceto uma delas. Em contra a saída (tem ção ou corrente)

em razão dessa fonte
ativa usando as téc-
nicas vistas nos Capí-
tulos 2 e 3.

(b) Repita a etapa (a)
para cada uma

das demais fontes
independentes.

(c) Determine a con
tribuição total so-
mando algebrica-
mente todas as

contribuições em
razão das fontes
independentes.

Analisar um circuito
por meio da superposi-
ção tem uma
grande des-

vantagem: muito pro-
vavelmente encolverá
maior trabalho. Se o
circuito tiver três
fontes indepen-
des, tal vez tenhamos
de analisar

três circuitos mais
simples, cada um dos
quais fornecendo
sua contribuição em
decorrência da fonte
individual res-

pectiva. Porém, a super-
posição ajuda efetiva-
mente a reduzir
um circuito complexo
a circuitos mais
simples pela substi-

tuigão de fontes de
tensão por curtos-cir
cuitos e fontes de
corrente por circui
tos abertos.

4.4) Transformação de fontes

A transformação de fontes é outra ferramenta para simplificar circuitos.

Em análise de circuitos,
é conveniente, sermos
capazes de substituir
uma fonte de tensão
em série com um resis-
tor por uma fonte

de corrente em parale-
lo com um resistor,
ou vice-versa. Qual-
quer uma dessas
substituições é
conhecida como

transformação de fontes.

Transformação de fontes
é o processo de substituir uma fonte de tensão $\underline{v_s}$ em sé-

rie com um resistor $\underline{R}$
por uma fonte de cor-
rente $\underline{i_s}$ em paralelo
com um resistor $\underline{R}$,
ou vice-versa.

Os dois circuitos são
equivalentes - desde
que eles tenham a
mesma relação tensão-
corrente nos termi-
nais a-b. É fá-

cil demonstrar que
eles são e qui sa lentes
de fato. Se as fontes
forem desativadas,
a resistência e qui sa
lente nos termi

mais $a-b$ em ambos os
circuitos será R . Da
mesma forma, quando
os terminais $a-b$ forem
curto-circuitados, a
corrente de

curto-circuito (short-
circuit) fluindo de

⇒ pra ⇒ e' $i_{sc} = \frac{V_s}{R}$ no

circuito do lado

esquerdo e $i_{sc} = i_s$ para

o circuito da

direita.

Assim, $\frac{V_s}{R} = i_s$ pra que
os dois circuitos se-
jam equivalentes.

Portanto, a transfor-
mação de fontes re-
quer que:

$$V_s = i_s \cdot R \quad \text{ou} \quad i_s = \frac{V_s}{R}$$

A transformação de fontes também se aplica a fontes dependentes, desde

que tratemos ende qua
claramente a variável
dependente. Logo,

uma fonte de tensão
dependente em série
com um resistor

pode ser transformada numa fonte de corrente dependente em paralelo com o resistor, ou vice-versa.

Devemos ter as seguintes
questões em mente
ao lidarmos com trans-
formação de fontes.

(1) as setas da fonte de
corrente vão em

direção ao pólo positivo
da fonte de tensão.

(2) a transformação de
fontes não é possível
quando $R=0$, que é o caso
de uma fonte de
tensão ideal.

Uma fonte de corrente ideal com $R = \infty$ não pode ser substituída por uma fonte de tensão.

4.5) Teorema de
Thévenin

Na prática, muitas
vezes ocorre que deter-
minado elemento num
circuito é variável
(normalmente, denomi-
nado carga), ao

Passo que outros elementos são fixos. Cada vez que o elemento variável for alterado, todo o circuito tem de ser analisado.

ligado por completo
novamente. Para
evitar esse problema,
o teorema de Thévenin
fornece uma técnica
pela qual a parte

fixa do circuito é substituída por um circuito equivalente.

O teorema de Thévenin
afirma que um

circuito linear de dois
terminais pode ser subs-
tituído por um circuito
equivalente formado
por uma fonte de ten-
são V_{th} em série

com um resistor R_{th} , onde V_{th} é a tensão de circuito aberto nos terminais e R_{th} a resistência de entrada ou equivalente

nos terminais quando
as fontes indepen-
dentes forem de-
sativadas.

Nossa principal preocu-
pação é como

encontrar a tensão
equivalente de
Thévenin V_{th} e a resis-
tência equivalente
de Thévenin R_{th} . Para
tanto, suponha que
os dois circuitos

da figura 4.23 sejam
equivalentes. Dois cir-
cuitos são ditos equi-
valentes se tiverem
a mesma relação
tensão-corrente em
seus terminais.

Vejam os o que tornará
os dois circuitos da
figura 4.23 e qui sa-
lentes. Se os termi-
mais a-b forem torna-
dos um circuito

aberto (eliminando-se
a carga), nenhuma
corrente fluirá e,
portanto, a tensão
nos terminais a-b da
figura 4.23(a) terá

de ser igual à fonte
de tensão V_{th} da figu-
ra 4.23(b), já que os dois
circuitos são equiva-
lentes. Logo, V_{th} é a
tensão de circuito

aberto nos terminais,
conforme ilustrado
na figura 4.24(a); isto é,

$$V_{th} = V_{oc}$$

Enfatizando, com a carga
desconectada e os

terminais em circuito
aberto, desligamos to-
das as fontes inde-
pendentes. A resistên-
cia de entrada (ou
neste caso a equi-

valente) do circuito
inativo nos termi-
mais a-b na figura

4.23(a) deve ser igual

a R_{th} da figura 4.23(b),
pois os dois circui-

tos são equivalentes.
Portanto, R_{th} é a
resistência de entrada
da nos terminais
quando as fontes
independentes

forem desligadas, como
pode ser observado
na figura 4.24(b); isto
é:

$$R_{th} = R_{in}$$

Para aplicar esse conceito na determinação da resistência equivalente de Thévenin

R_{th} , precisamos considerar dois casos:

Caso ① $\rightarrow$ Se a rede não
tiver fontes depen-
dentes, desligamos
todas as fontes inde-
pendentes. R_{th} é a
resistência de

entrada da rede,
olhando-se entre os
terminais a e b, como
ilustrado na figura
na 4.24 (b).

Caso 2 → Se a rede
tiver fontes depen-
dentes, desligamos
todas as fontes
independentes.
Pelo teorema

da superposição, as
fontes devem deuter
não devem ser desli
gadas, pois elas são
controladas por vari
áveis de cir-

cuito. Aplicamos uma
tensão $\underline{v_0}$ aos termi
nais $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e determi
namos a corrente
resultante $\underline{i_0}$. Então,

$$R_{th} = \frac{v_0}{i_0}, \text{ conforme}$$

mostra a figura 4.25(a).
De forma alternativa,
podemos inserir uma
fonte de corrente io
nos terminais a e b,
como na figura

4. 25(b), e encontrar
a tensão entre os
terminais, v_o . chega-
mos novamente a
 $R_{th} = \frac{v_o}{i_o}$. Qualquer

um dos dois métodos
leva ao mesmo resul-
tado. Em ambos os mé-
todos, podemos supor
qualquer valor de
50 e 10. Poderia

mos usar, por exemplo,
 $v_o = 1V$ ou $i_o = 1A$ ou até
mesmo valores não es-
pecificados de v_o ou i_o .

Como mencionado,
um circuito

linear com uma carga
variável pode ser subs-
tituído pelo equivalente
de Thévenin, excluín-
do-se a carga. A rede
equivalente

se comporta exatamente da mesma maneira que o circuito original. Consideremos um circuito linear terminado por

uma carga $R_{\underline{L}}$, com for
me mostra a figura
4.26(a). A corrente $\underline{I_L}$
através da carga e a
tensão $\underline{V_L}$ na carga
são facilmente

de terminadas, uma
vez que seja obtido
o circuito e quiçá
lente de Thévenin
nos terminais da
carga, com for

me ilustrado na figura
4.26(b). Dessa fi-
gura, obtemos:

$$\bar{I}_L = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L}$$

$$V_L = R_L \cdot I_L$$

$$V_L = \frac{R_L}{R_{th} + R_L} \cdot V_{th}$$

4.6) Teorema de
Norton

O teorema de Norton

a afirma que um circuito
linear de dois ter-
minais pode ser subs-
tituído por um cir-
cuito equivalente

lente formado por uma
fonte de corrente
 $\underline{I_N}$ em paralelo com
um resistor $\underline{R_N}$, em
que $\underline{I_N}$ é a corrente
de curto-circui

to através dos tes
minais e $R_{\equiv N}$ é a
resistência de
entrada ou qui
valente nos termi
mais quando

as fontes independentes
deu_{tes} foram des-
ligadas. Portanto,
o circuito da figu-
ra 4.37(a) pode ser
substituído por

aquela da figura 4.37(b).

Estamos basicamente

interessados em como

obter $\underline{R}_N$ e $\underline{I}_N$. Determinar

minimamos $\underline{R}_N$ da mesma

maneira

que o fazemos pra R_{th} .

De fato, do que sabemos sobre a trans-formação de fontes, as resistências de Thevenin e de

Norton são iguais;
isto é:

$$R_N = R_{th}$$

Para descobrir a corrente $\underline{I_N}$ de Norton,

de terminamos a corrente de curto-circuito que flui entre os terminais a e b em ambos os circuitos da figura 4.3f.

É evidente que a corrente de curto-circuito na figura 4.37(b) é I_N . Esta tem de ser igual à corrente de curto-circuito

entre os terminais
a e b da figura 4.37(a),
uma vez que as duas
correntes são equi-
valentes. Portanto,

$$I_N = i_{sc}$$

mostrado na figura 4.38.

As fontes de pendentes
e independentes são
tratadas da mesma
forma que no teorema
de Thévenin.

Observe a estreita
relação entre os
teoremas de Thévenin
e de Norton:

$$R_N = R_{th}$$

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$$

Isso é, basicamente,
trans formação de
fontes. Por essa razão,
a trans forma-

cão de fontes é mui-
tas vezes chama da
trans formação

Thévenin - Norton.

Já que V_{th} , I_{sc} e R_{th}
estão relacio-

nadas de acordo com
a última expressão,
de terminar o circuito
equivalente de Thé-
venin e de Norton
requer que

em contremos:

- a tensão de circuito aberto $\underline{\underline{V_{oc}}}$ entre os terminais $\underline{\underline{a}}$ e $\underline{\underline{b}}$.
- a corrente de curto-circuito $\underline{\underline{i_{sc}}}$ nos terminais $\underline{\underline{a}}$ e $\underline{\underline{b}}$.

- a resistência de en-
trada ou equivalente

R_{in} nos terminais
 a e b quando todas
as fontes in depen-
de ntes es tive-

Nem desligadas.

Podemos calcular
quais quer dois desses
três itens usando
o método mais fácil
e então usá-los

pra obter o terceiro
item por meio da
lei de Ohm. Da mes-
ma forma, já que

$$V_{th} = 50c$$

$$I_N = i_{sc}$$

$$R_{th} = \frac{V_{oc}}{i_{sc}} = R_N$$

os testes de circuito
aberto e de curto-
circuito são

suficientes para
encontrar qualquer
circuito e quivá-
lente de Thévenin
ou de Norton, de um
circuito com-

tenho pelo menos
uma fonte inde-
pendente.

4.8) máxima transfe
rência de potência

O circuito equivalente
de Thévenin é útil
para descobrir a po-
tência máxima que
um circuito linear

pode liberar a uma
carga. Partimos do
pressuposto de que
podemos ajustar a
resistência de carga
 R_{L} . Se todo

o circuito for substituído pelo equivalente de Thévenin, e exceto a carga, com forme mostra a figura 4.48, a potência libe

radar pra carga e'!

$$P = i^2 \cdot R_L = \left(\frac{V_{th}}{R_{th} + R_L} \right)^2 \cdot R_L$$

Para um dado circuito,
 V_{th} e R_{th} são fixas.
Variando-se a

resistência de carga

R_L , a potência libe

rada à carga varia

conforme descrito

na figura 4.49. Perce

bemos, dessa

figura, que a potência
é pequena para valo-
res pequenos ou gran-
des de R_L , mas máxi-
ma para o mesmo va-
lor de R_L entre

0 e ∞ . Agora, queremos mo
strar que a potência
máxima ocorre quando
 R_L é igual a R_{th} . Isso
é conhecido como
teorema de

potência máxima.

É transferida a máxi
ma potência a uma
carga quando a resis-
tência de carga for
igual à resistên-

cia de Thévenin
quando vista da
carga ($R_L = R_{th}$).

Para provar o teore-
ma da máxima trans-
ferência de po-

tência, diferenciamos
 P na equação anterior
em relação a P_L e
fazemos que o resul-
tado seja igual a
zero. Obtemos:

$$\frac{dP}{dR_L} = V_{th}^2 \left[\frac{(R_{th} + R_L)^2 - 2R_L(R_{th} + R_L)}{(R_{th} + R_L)^4} \right]$$

$$= V_{th}^2 \left[\frac{(R_{th} + R_L - 2R_L)}{(R_{th} + R_L)^3} \right] = 0$$

$\underline{I}_{550}$ implica:

$$0 = (R_{th} + R_L - 2R_L) = R_{th} - R_L$$

que leva a:

$$R_L = R_{th}$$

mostrando que a máxima transferência de potência ocorre quando a resistência

de carga R_{L} iguala
a resistência de
Thevenin R_{th} .

A potência máxima
transferida é obtida
da substituição

do-se a última equação na primeira:

$$P_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{th}}^2}{4 \cdot R_{\text{th}}}$$

Esta expressão se aplica apenas quando

$R_L = R_{th}$. Quando $R_L \neq R_{th}$
calculamos a potência
liberada pra carga
usando a primeira
equação.

Resoluções de
Exercícios
(Cap. 41)

42) no cálculo de R_{th} , considere o circuito da figura (a):

$$20//20 = 10 \sim$$

Transformação de
rede (ver figura
(b)):

$$10/30 = 7,5 \text{ m}$$

$$R_{th} = R_{ab} = 30/(7,5 + 7,5)$$

$$R_{th} = 10 \text{ m}$$

cálculo de V_{th} :

transformação das
fontes de tensão
20V e de corrente
te 5A

Ver circuito da
figura (a)

Análise e de malhas:

Ma1her ①:

$$-30 + 50 + 30i_1 - 10i_2 = 0$$

$$-2 = 3i_1 - i_2 \quad (\text{I})$$

Ma1her ②:

$$-50 - 10 + 30iz - 10i_{\Delta} = 0$$

$$\boxed{6 = -i_{\Delta} + 3iz} \text{ (II)}$$

Resol vendo este sistema, temos:

$$\begin{aligned} i_1 &= 0 \text{ A} \\ i_2 &= 2 \text{ A} \end{aligned}$$

Aplicando a LKV
na malha externa:

$$-V_{ab} - 10i_1 + 30 - 10i_2 = 0$$

$$V_{th} = V_{ab} = 10V$$

55) Para o cálculo
do R_{N} , aplica-
mos uma fonte
de $\underline{1\text{ mA}}$ nos
terminais

a-b (ver figura (a)).

Assumir:

resistências $\Rightarrow k\Omega$

correntes $\Rightarrow mA$

tensões $\Rightarrow Volts$

Nº 9 :

$$\frac{5ab}{50} + 80I = 1 \quad (I)$$

Tamém temos:

$$-8I = \frac{5ab}{1000}$$

$$\underline{\text{I}} = - \frac{\sqrt{ab}}{8000} \quad (\underline{\text{II}})$$

De (I) e (II), obtemos:

$$\left(\frac{\sqrt{ab}}{50} \right) - \left(\frac{80 \sqrt{ab}}{8000} \right) = 1$$

$$V_{ab} = 100 \text{ V}$$

$$R_N = \frac{V_{ab}}{1} = 100 \text{ k}\Omega$$

No cálculo de $\underline{I_N}$
considere a

figura (b): O resis
tor de 50 kN e'
curto-circuitado.

$$I_2 = -80I$$

$$V_{ab} = 0$$

Verifica-se que:

$$8I = 2 \Rightarrow I = \frac{1}{4} \text{ mA}$$

Logo,

$$I_N = -20 \text{ mA}$$

60) O circuito se
nã ne du zi do por
trans for ma

ções de fontes.

Ex¹) No cálculo
de R_{th} , conside
re o circuito

na figura (a):

$$R = 2 // 18 = 1,8 \Omega$$

$$R_{th} = 2R // R = \frac{2}{3} R$$

$$R_{th} = 1,2 \Omega$$

Para obter V_{th} ,
usamos a aplicamos
a análise de
malhas no circuito
da

figura (d):

$$-12 - 12 + 14i_1 - 6i_2 - 6i_3 = 0$$

$$7i_1 - 3i_2 - 3i_3 = 12 \quad (\text{I})$$

$$12 + 12 + 14i_2 - 6i_1 - 6i_3 = 0$$

$$(II) \quad -3i_1 + 7i_2 - 3i_3 = -12$$

$$14i_3 - 6i_1 - 6i_2 = 0$$

$$(III) \quad -3i_1 - 3i_2 + 7i_3 = 0$$

na forma matricial,
temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i_2 = -1,2 \text{ A}$$

$$V_{th} = 12 + 2i_2 = 9,6 \text{ V}$$

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = 8 \text{ A}$$

Q2) $V_{th} = 0V$ (pois não
há fontes inde-
pendentes)
Para o cálculo
de R_{th} ,

considere o circuito abaixo.

No' 2:

$$i_x + 0,1 i_o = \frac{1 - \sqrt{1}}{10}$$

$$(I) \quad 10 i_x + i_o = 1 - \sqrt{1}$$

No 1:

$$\frac{V_1}{20} + 0,1 i_0 = \frac{2V_0 - V_1}{40} + \frac{1 - V_1}{10} \quad (II)$$

Se $i_0 = \frac{V_1}{20}$ e $V_0 = 1 - V_1$,
a equação (II)

forma-se:

$$\frac{1,1 \sqrt{1}}{20} = \frac{2 - 3 \sqrt{1}}{40} + \frac{1 - \sqrt{1}}{10}$$

$$2,2 \sqrt{1} = \underbrace{2 - 3 \sqrt{1} + 4 - 4 \sqrt{1}}_{6 - 7 \sqrt{1}}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{6}{9,2}} \quad (\text{III})$$

De (I) e (III), temos:

$$10i_x + \frac{v_1}{20} = 1 - v_1$$

$$10i_x = 1 - v_1 - \frac{v_1}{20} = 1 - \underbrace{\left(\frac{21}{20} v_1 \right)}_{1 - \left(\frac{21}{20} \cdot \frac{6}{9,2} \right)}$$

$$i_x = 31,52 \text{ mA}, \quad R_{th} = \frac{1}{i_x}$$

$$R_{th} = 31,73 \, \Omega$$