

# PSI3262 – FCEDA – Aula 12

Magno T. M. Silva

Escola Politécnica da USP

# Objetivos desta aula

Ao final desta aula, você deverá estar apto a:

- ▶ usar as relações fasoriais nos bipolos
- ▶ introdução aos conceitos de impedância e admitância

# 1. Relações fasoriais nos bipolos

Vamos considerar que a tensão do resistor, capacitor e indutor seja igual a

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta), \quad (V, s)$$

sendo  $V_m > 0$  a amplitude do co-seno e  $\theta$  a fase em graus.

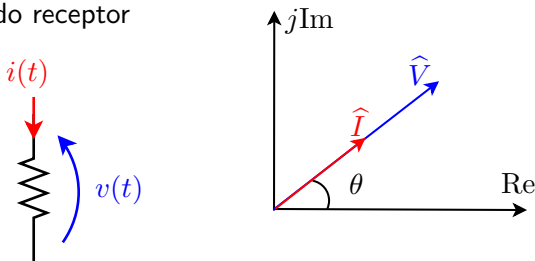
O fasor dessa tensão é dado por

$$\hat{V} = V_m e^{j\theta}$$

A seguir vamos encontrar a relação entre esse fasor de tensão e o fasor de corrente  $\hat{I}$  nos bipolos.

## 1.1 Relação fasorial no resistor

Considere um resistor com a tensão  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$  na convenção do receptor



$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_m}{R} \cos(\omega t + \theta)$$

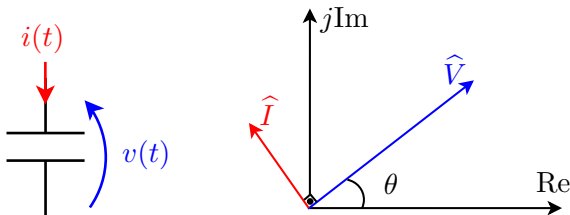
$$\hat{I} = \frac{V_m}{R} e^{j\theta} = \frac{\hat{V}}{R} = G\hat{V}$$

Lei de Ohm fasorial

|                                                |
|------------------------------------------------|
| $\hat{V} = R\hat{I}$ tensão e corrente em fase |
|------------------------------------------------|

## 1.2 Relação fasorial no capacitor

Considere um capacitor com a tensão  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$  na convenção do receptor



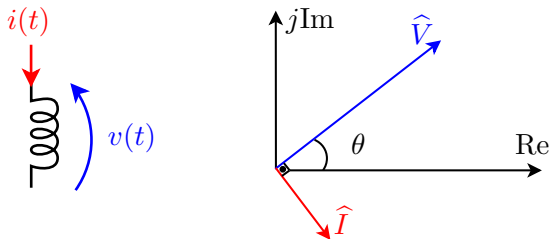
$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = -\omega C V_m \sin(\omega t + \theta) = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta + 90^\circ)$$

$$\hat{I} = \omega C V_m e^{j\theta} e^{j90^\circ} = \omega C \hat{V} e^{j90^\circ} \Rightarrow \hat{I} = j\omega C \hat{V}$$

|                                         |                                                     |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $\hat{V} = \frac{1}{j\omega C} \hat{I}$ | tensão atrasada de $90^\circ$ em relação à corrente |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------|

## 1.3 Relação fasorial no indutor

Considere um indutor com a tensão  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$  na convenção do receptor



$$i(t) = \frac{1}{L} \int v(\tau) d\tau = \frac{V_m}{\omega L} \sin(\omega t + \theta) = \frac{V_m}{\omega L} \cos(\omega t + \theta - 90^\circ)$$

$$\hat{I} = \frac{1}{\omega L} V_m e^{j\theta} e^{-j90^\circ} = \frac{1}{j\omega L} \hat{V}$$

|                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $\hat{V} = j\omega L \hat{I}$ corrente atrasada de $90^\circ$ em relação à tensão |
|-----------------------------------------------------------------------------------|

## 1.4 Exercício

O circuito da Figura 2 consiste numa associação paralela dos bipolos  $B_1$ ,  $B_2$ , e  $B_3$  alimentados com um gerador de tensão com excitação co-senoidal. O diagrama fasorial correspondente é mostrado na Figura 3. Assinale a alternativa correta.

Dado:  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ .

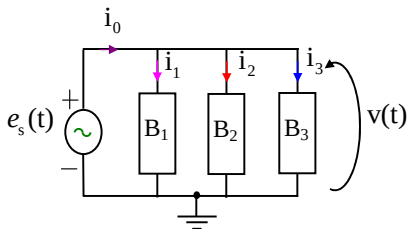


Figura 2

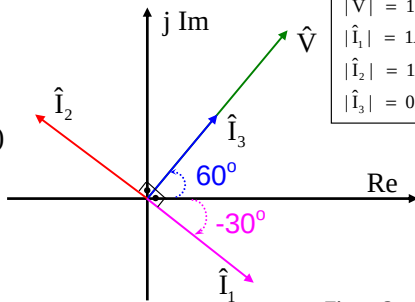


Figura 3

|                             |
|-----------------------------|
| $ \hat{V}  = 10\text{V}$    |
| $ \hat{I}_1  = 1\text{A}$   |
| $ \hat{I}_2  = 1\text{mA}$  |
| $ \hat{I}_3  = 0,1\text{A}$ |

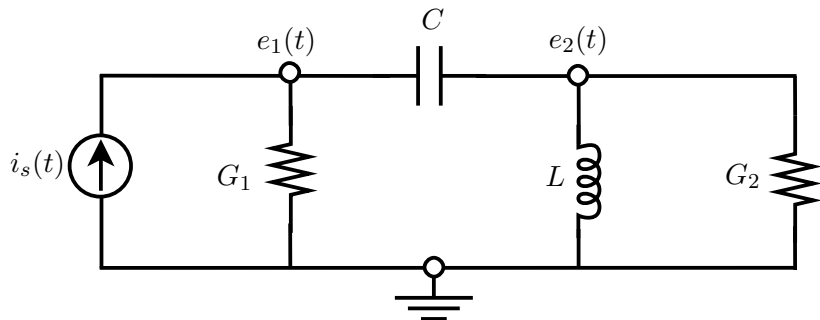
## 1.4 Exercício (continuação)

- a)  $B_1$  é um capacitor com  $C = 1\text{F}$  e  $B_2$  é um indutor com  $L = 10\text{ }\mu\text{H}$ .
- b)  $B_1$  é um indutor com  $L = 1\text{H}$  e  $v(t) = 10 \sin(10t + 150^\circ)$  (V,s).**
- c)  $B_3$  é um resistor com  $R = 100\Omega$  e  $i_2(t) = \cos(20t + 150^\circ)$  (mA,s).
- d)  $B_1$  é um capacitor com  $C = 10\text{ }\mu\text{F}$  e  $i_1(t) = \sin(10t - 30^\circ)$  (A,s).
- e) n.d.a



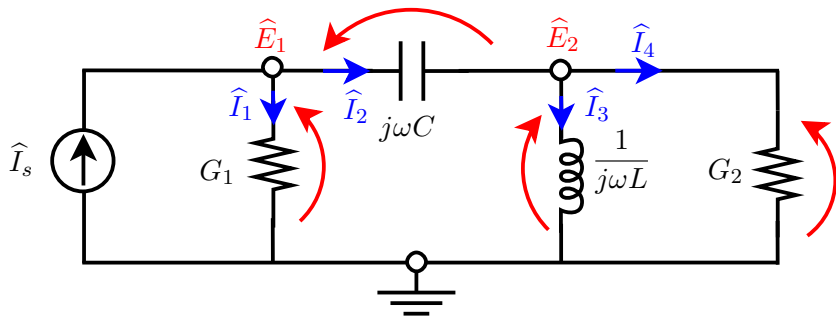
## 1.5 Análise Nodal em RPS

Deseja-se analisar o circuito abaixo em regime permanente senoidal.



- Vamos redesenhar o circuito usando admitâncias e fasores.

## 1.5 Análise Nodal em RPS

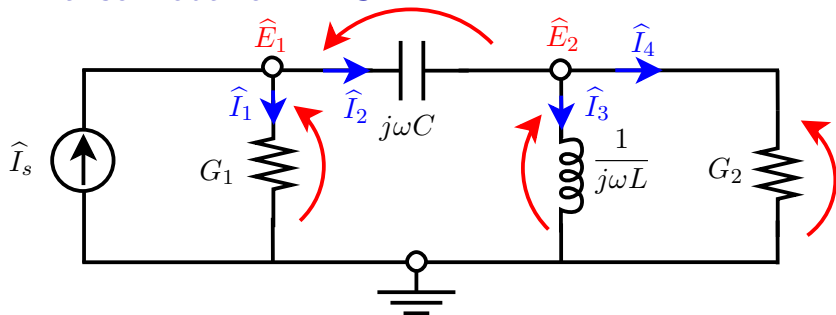


- Vamos escrever a 1ª LK nos nós 1 e 2:

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{I}_s$$

$$-\hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4 = 0$$

## 1.5 Análise Nodal em RPS



- Vamos escrever as correntes de ramos em função das tensões nodais  $\hat{E}_1$  e  $\hat{E}_2$ :

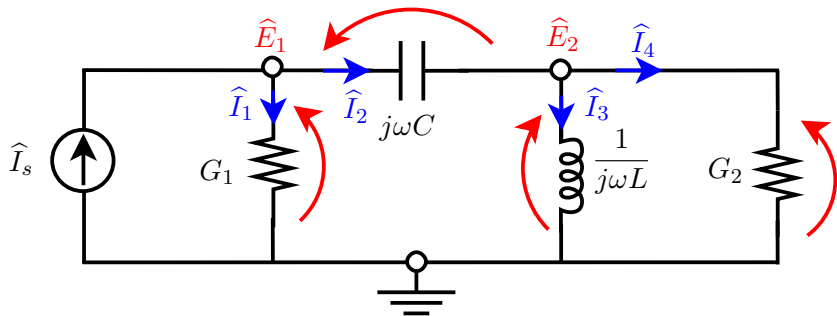
$$\hat{I}_1 = G_1 \hat{E}_1$$

$$\hat{I}_2 = j\omega C (\hat{E}_1 - \hat{E}_2)$$

$$\hat{I}_3 = \frac{1}{j\omega L} \hat{E}_2$$

$$\hat{I}_4 = G_2 \hat{E}_2$$

## 1.5 Análise Nodal em RPS



- Substituindo nas equações da 1ª LK e organizando:

$$(G_1 + j\omega C)\hat{E}_1 - j\omega C\hat{E}_2 = \hat{I}_s$$

$$-j\omega C\hat{E}_1 + \left(G_2 + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right)\hat{E}_2 = 0$$

## 1.5 Análise Nodal em RPS

$$\begin{bmatrix} G_1 + j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C & G_2 + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerando  $G_1 = 1 \text{ S}$ ,  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 2 \text{ H}$ ,  $G_2 = 0,5 \text{ S}$  e  $i_s(t) = 10 \cos(2t + 45^\circ)$ , (A,s), obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 + j2 & -j2 \\ -j2 & 0,5 + j1,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo, obtemos

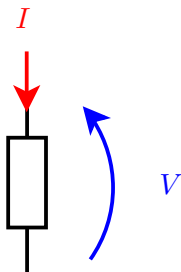
$$\hat{E}_1 = 6,22/\underline{41^\circ} \text{ V} \quad \text{e} \quad \hat{E}_2 = 6,83/\underline{65^\circ} \text{ V}$$

Finalmente,

$$e_1(t) = 6,22 \cos(2t + 41^\circ), \text{ (V,s)}$$

$$e_2(t) = 6,83 \cos(2t + 65^\circ), \text{ (V,s)}$$

## 2.1 Corrente Contínua - CC

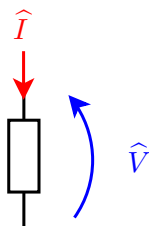


### ► LEI DE OHM

$$\frac{V}{I} = R$$

Resistência CC =  $R_{CC}$

## 2.2 Corrente Alternada - CA



- Equivalente CA da LEI DE OHM

$$\frac{\hat{V}}{\hat{I}} = Z = R + jX$$

- $Z$ : impedância do dispositivo
- $R$ : componente resistivo ou dissipativo ( $R_{CA}$ )
- $X$ : componente reativo ou reatância
- $R$  e  $X$  são funções da frequência

**Exemplo:** Resistor em série com um indutor ideal,  
 $Z(j\omega) = R + j\omega L$

## 2.3 Recíprocas

### Admitância

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + X^2}}_G + j \underbrace{\frac{-X}{R^2 + X^2}}_B$$

$G$ : componente condutivo

$B$ : susceptância

|    |                             |                             |
|----|-----------------------------|-----------------------------|
| CC | Resistência ( $R_{CC}$ )    | Condutância ( $G_{CC}$ )    |
| CA | Impedância ( $Z(j\omega)$ ) | Admitância ( $Y(j\omega)$ ) |