Eletricidade e Magnetismo 2021 – Turma IME - IFUSP
Provinha 2 – Resolução

Uma esfera não condutora de raio R tem uma densidade de carga proporcional à distância ao centro $\rho = Ar$, para $r \leq R$ e $\rho = 0$ para $r > R$. Responda em função de A, R e ϵ_0.

a) (2,0) Calcular a carga total sobre a esfera.
Resolução:
Para calcular a carga total da esfera, basta fazer a integral de volume da densidade de carga:

$$Q = \iiint \rho \, dV$$

Como a densidade é esfericamente simétrica (depende apenas de r), podemos considerar a integral em cascas esféricas infinitesimais de raio r e espessura dr, de modo que a integral tripla no volume se converte em uma integral simples no raio:

$$Q = \int_0^R \rho \cdot 4\pi r^2 \, dr$$

Substituindo $\rho = Ar$:

$$Q = 4\pi A \int_0^R r^3 \, dr \rightarrow Q = \pi A R^4$$

b) (2,0) Obtenha o campo elétrico para $r < R$.
Resolução:
Consideramos uma superfície gaussiana esférica de raio $r < R$ e usamos a lei de Gauss:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

A integral de fluxo nos dá

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

A carga interna dentro da esfera de raio r dada por

$$q_{int} = \int_0^r \rho \cdot 4\pi r^2 \, dr = 4\pi A \int_0^r r^3 \, dr = \pi A r^4$$

Assim,

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi A r^4}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{A r^2}{4\epsilon_0}$$

Podemos escrever vetorialmente usando o versor radial $\hat{r}$:

$$\vec{E} = \frac{Ar^2}{4\epsilon_0}\hat{r}, \quad r < R$$

c) (2,0) Obtenha o campo elétrico para $r > R$.
Resolução:
Aplicamos a lei de Gauss considerando agora uma superfície esférica de raio $r > R$:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Nesse caso, a carga interna é carga total da esfera obtida no item (a):

$$q_{int} = Q = \pi A R^4$$

Assim,

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi A R^4}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r^2}$$

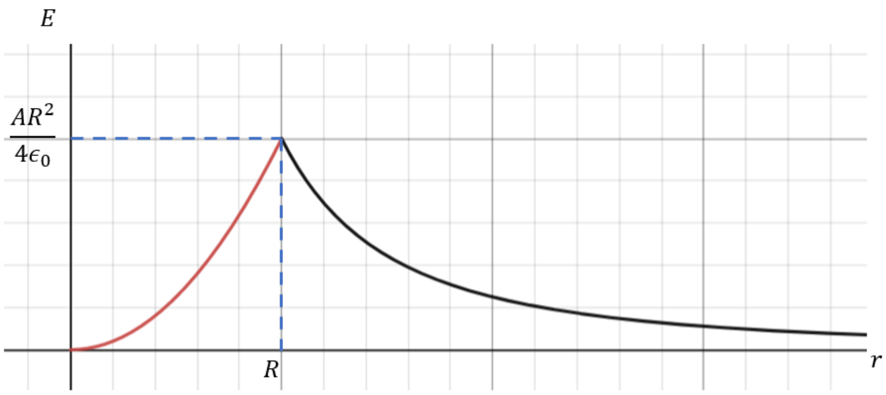
Vetorialmente, temos

$$\vec{E} = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r^2}\hat{r}, \quad r > R$$

d) (1,0) Esboce o gráfico de E em função de r, supondo $A > 0$.
Resolução:
Considerando o que foi obtido nos itens anteriores, temos

$$E = \begin{cases} \dfrac{Ar^2}{4\epsilon_0}, & r < R \\ \dfrac{AR^4}{4\epsilon_0 r^2}, & r > R \end{cases}$$

Com isso, o esboço do campo fica:



e) (3,0) Através de uma casca esférica condutora (inicialmente descarregada) de raios $\boldsymbol{R_1}$ e $\boldsymbol{R_2}$ cortada ao meio, a esfera não condutora é envolvida juntando as duas metades, formando novamente uma casca esférica concêntrica com a esfera (onde $\boldsymbol{R < R_1 < R_2}$). Encontre as densidades superficiais de cargas na superfície interna (raio $\boldsymbol{R_1}$) e externa (raio $\boldsymbol{R_2}$) da casca condutora esférica.

Resolução:

Como o campo dentro do condutor deve ser nulo, a carga q_1 acumulada na superfície interna da casca condutora deve anular a carga da esfera isolante de raio R:

$$q_1 = -Q = -\pi A R^4$$

Além disso, como a casca condutora é neutra, a carga q_2 acumulada na superfície externa é tal que

$$q_1 + q_2 = 0 \rightarrow q_2 = -q_1 = +Q = \pi A R^4$$

Com isso, para calcular as densidades superficiais de carga basta dividir as cargas pelas áreas:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \rightarrow \sigma_1 = -\frac{AR^4}{4R_1^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} \rightarrow \sigma_2 = +\frac{AR^4}{4R_2^2}$$