SME0824 Gestão da Qualidade

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Prof. Cibele Russo

cibele@icmc.usp.br

http://www.icmc.usp.br/~cibele

https://www.youtube.com/cibelerussoUSP

[1] Referência principal: Montgomery, Douglas C. Introdução ao controle estatístico da qualidade. Grupo Gen-LTC, Sétima edição. 2016.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Em alguns casos, é preferível utilizar o desvio-padrão amostral S do que a amplitude R.

1. Quando o tamanho da amostra n é moderadamente grande, digamos, $n > 10$ ou 12 (o método da amplitude para estimar σ perde eficiência estatística para tamanhos de amostras moderados ou grandes),
2. Quando o tamanho da amostra n é variável.

Construção de gráficos $\bar{X}$ e S: similar aos gráficos $\bar{X}$ e R.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Em alguns casos, é preferível utilizar o desvio-padrão amostral S do que a amplitude R.

1. Quando o tamanho da amostra n é moderadamente grande, digamos, $n > 10$ ou 12 (o método da amplitude para estimar σ perde eficiência estatística para tamanhos de amostras moderados ou grandes),
2. Quando o tamanho da amostra n é variável.

Construção de gráficos $\bar{X}$ e S: similar aos gráficos $\bar{X}$ e R.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Em alguns casos, é preferível utilizar o desvio-padrão amostral S do que a amplitude R.

1. Quando o tamanho da amostra n é moderadamente grande, digamos, $n > 10$ ou 12 (o método da amplitude para estimar σ perde eficiência estatística para tamanhos de amostras moderados ou grandes),
2. Quando o tamanho da amostra n é variável.

Construção de gráficos $\bar{X}$ e S: similar aos gráficos $\bar{X}$ e R.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Em alguns casos, é preferível utilizar o desvio-padrão amostral S do que a amplitude R.

1. Quando o tamanho da amostra n é moderadamente grande, digamos, $n > 10$ ou 12 (o método da amplitude para estimar σ perde eficiência estatística para tamanhos de amostras moderados ou grandes),
2. Quando o tamanho da amostra n é variável.

Construção de gráficos $\bar{X}$ e S: similar aos gráficos $\bar{X}$ e R.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Se a variância da característica da qualidade σ^2 é desconhecida, um estimador não-viesado é a variância amostral

$$\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

No entanto, o desvio padrão amostral S não é um estimador não-viesado para σ.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Se a variância da característica da qualidade σ^2 é desconhecida, um estimador não-viesado é a variância amostral

$$\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

No entanto, o desvio padrão amostral S não é um estimador não-viesado para σ.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Pode-se mostrar que se a distribuição dos dados é normal, S estima $c_4\sigma$ em que c_4 é uma constante que depende do tamanho da amostra n.

Além disso, o desvio padrão de S é $\sigma\sqrt{1-c_4^2}$.

Essa informação pode ser útil para construir os gráficos de controle de $\bar{X}$ e S.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Pode-se mostrar que se a distribuição dos dados é normal, S estima $c_4\sigma$ em que c_4 é uma constante que depende do tamanho da amostra n.

Além disso, o desvio padrão de S é $\sigma\sqrt{1 - c_4^2}$.

Essa informação pode ser útil para construir os gráficos de controle de $\bar{X}$ e S.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Pode-se mostrar que se a distribuição dos dados é normal, S estima $c_4\sigma$ em que c_4 é uma constante que depende do tamanho da amostra n.

Além disso, o desvio padrão de S é $\sigma\sqrt{1 - c_4^2}$.

Essa informação pode ser útil para construir os gráficos de controle de $\bar{X}$ e S.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Considere o caso em que um valor de referência é dado a σ. Como $E(S) = c_4\sigma$, a linha central para o gráfico de controle de S é $c_4\sigma$ e os limites de controle serão dados por

$$\begin{aligned}
\text{LSC}_S &= c_4\sigma + 3\sigma\sqrt{1 - c_4^2} \\
\text{LC}_S &= c_4\sigma \\
\text{LIC}_S &= c_4\sigma - 3\sigma\sqrt{1 - c_4^2}
\end{aligned}$$

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

É usual definir duas constantes

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2} \text{ e } B_6 = c_4 + 2\sqrt{1 - c_4^2}.$$

Assim, os gráficos de controle ficam dados por

$$\begin{aligned} \text{LSC}_S &= B_6\sigma \\ \text{LC}_S &= c_4\sigma \\ \text{LIC}_S &= B_5\sigma \end{aligned}$$

(valores de B_5 e B_6 na Tabela VI no `e-disciplinas.usp.br`.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Se nenhum valor de referência for dado a σ, temos que estimá-lo com base em amostras passadas.

Suponha que m amostras preliminares estejam disponíveis, cada uma de tamanho n, e suponha que s_i seja o desvio-padrão observado da i-ésima amostra.

A média dos m desvios-padrão é

$$\bar{s} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} s_i$$

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Se nenhum valor de referência for dado a σ, temos que estimá-lo com base em amostras passadas.

Suponha que m amostras preliminares estejam disponíveis, cada uma de tamanho n, e suponha que s_i seja o desvio-padrão observado da i-ésima amostra.

A média dos m desvios-padrão é

$$\bar{s} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} s_i$$

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

A estatística $\bar{s}/c_4$ é um estimador não-viesado de σ. Então, os parâmetros para o gráfico são

$$\begin{aligned}
\text{LSC}_{\bar{S}} &= \bar{s} + 3\frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} \\
\text{LC}_{\bar{S}} &= \bar{s} \\
\text{LIC}_{\bar{S}} &= \bar{s} - 3\frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}
\end{aligned}$$

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

É usual definir as constantes

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} \text{ e } B_4 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2}$$

Assim, os gráficos de controle ficam dados por

$$\begin{aligned} \text{LSC}_S &= B_4\bar{s} \\ \text{LC}_S &= \bar{s} \\ \text{LIC}_S &= B_3\bar{s} \end{aligned}$$

Exercício: Verifique que $B_4 = B_6/c_4$ e $B_3 = B_5/c_4$.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Quando $\bar{s}/c_4$ é usado para estimar σ, podemos definir os limites de controle para o gráfico $\bar{X}$ correspondente como

$$\begin{aligned}
\text{LSC}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{x}} + \frac{3\bar{s}}{c_4\sqrt{n}} \\
\text{LC}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{x}} \\
\text{LIC}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{x}} - \frac{3\bar{s}}{c_4\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Definindo a constante $A_3 = \dfrac{3}{c_4\sqrt{n}}$, os limites do gráfico se tornam

$$\begin{aligned}
\text{LSC}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s} \\
\text{LC}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{x}} \\
\text{LIC}_{\bar{X}} &= \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s}
\end{aligned}$$

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Note que fizemos a suposição de desvio-padrão amostral

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

Alguns autores consideram n no denominador. Neste caso, as constantes serão alteradas.

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Quando o tamanho de amostra é variável,

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

e

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}}$$

Gráficos de controle para $\bar{X}$ e S

Nesse caso (tamanho de amostra variável), as constantes A_3, B_3 e B_4 vão depender do tamanho da amostra usado em cada subgrupo individual. Exemplo:

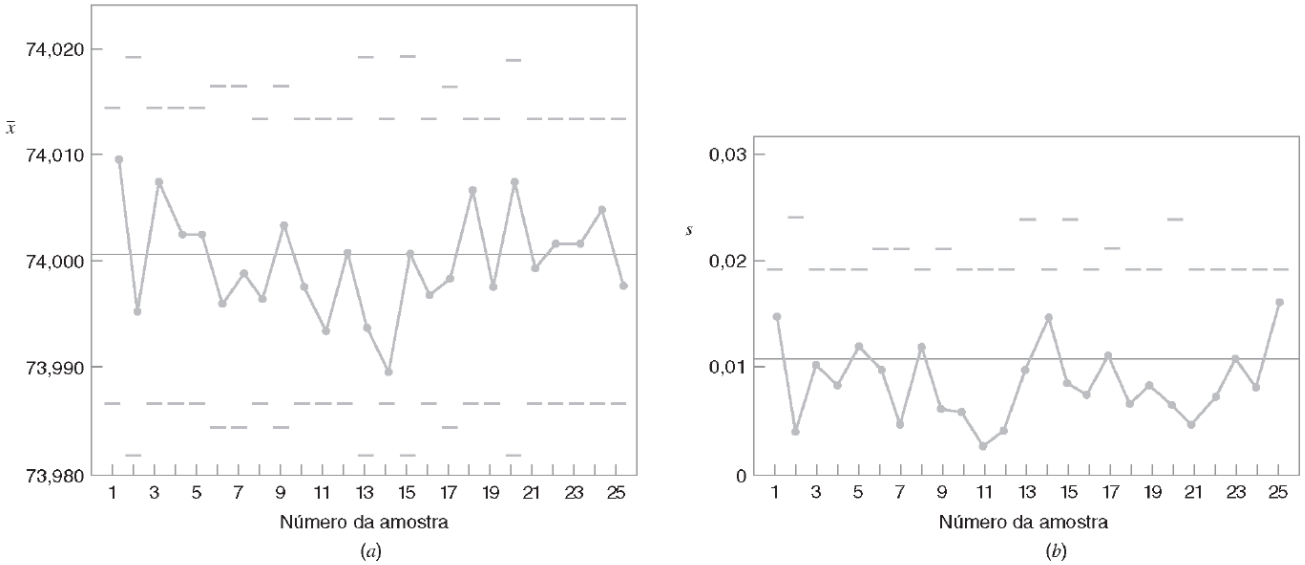

FIGURA 6.18 Os gráficos de controle (*a*) $\bar{x}$ e (*b*) s para os dados dos anéis de pistão com tamanho de amostra variável, Exemplo 6.4.

Fonte: Montgomery (2016)

Exercício

Considere novamente os dados do cozimento, com amostras de tamanho 5 coletadas. Os dados estão apresentados na Tabela Cozimento.xls em `e-disciplinas.usp.br`.

Desenvolva e analise gráficos de controle para $\bar{x}$ e S. Compare com os gráficos $\bar{X}$ e R analisados anteriormente. Comente os motivos das principais diferenças.