Resolução de Sistemas Lineares - Método de Gauss

O algoritimo conhecido como Método de Gauss é desenvolvido a partir de dois "ingredientes"básicos:

- Resolução de Sistemas Lineares Triangulares.
- Procedimento de escalonamento.

O Método de Gauss consiste em um algoritmo que surge naturalmente da questão sobre existência e unicidade de soluções de Sistemas Lineares envolvendo n equações e n incógnitas.

Para melhor entender esta observação, considere um sistema de equações lineares da forma:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n-1}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn-1}x_{n-1} & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
\tag{1}
$$

onde $\{a_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ e $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ são coeficientes dados e os valores das incógnitas $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ são fixados pelas equações (1).

Observe que no caso em que $a_{ii} \neq 0;\ 1 \leq i \leq n$, as equações podem ser reescritas na forma:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left\{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n\right\} \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left\{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n\right\} \\
&\vdots \\
x_j &= \frac{1}{a_{jj}}\left\{b_j - a_{j1}x_1 - \cdots + a_{jj-1}x_{j-1} - a_{jj+1}x_{j+1} - \cdots - a_{jn}x_n\right\} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left\{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-2}x_{n-2} - a_{nn-1}x_{n-1}\right\}
\end{aligned}
$$

Utilizando notação matricial nós reescrevemos um sistema linear na forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

As informações que definem as equações do sistema (i.e. os valores dos coeficientes $a_{s'}$ e $b_{s'}$)podem ser organizadas em uma única matriz E, a qual denominamos de matriz estendida:

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{1n} & b_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

A questão de existência e unicidade da solução de um sistema linear da forma (2) é facilmente respondida no caso particular em que o sistema tem a propriedade

$$a_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad \mathrm{i} > \mathrm{j} \tag{4}$$

Sistemas com esta propriedade são denominados de *Triangulares* ou *Escalonados* e o sistema de equações (1) é da forma:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n-1}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1n}x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array} \tag{5}$$

Quando $a_{ii} \neq 0$; $1 \leq i \leq n$, a solução de Sistemas Lineares triangulares pode ser obtida pelo seguinte algoritimo recursivo:

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}[b_n]$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1n-1}}[b_{n-1} - a_{n-1n}x_n]$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k] \tag{6}$$

$$\vdots$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - \sum_{k=2}^{n} a_{1k}x_k]$$

Assim a existência e unicidade da solução é equivalente à condição:

$$a_{ii} \neq 0; \quad 1 \leq i \leq n \tag{7}$$

Observe que esta condição pode ser sintetizada na forma:

$$D = \prod_{1 \leq i \leq n} a_{ii} \neq 0 \tag{8}$$

O valor de D é chamado de *Determinante*. Em geral, quando $D = 0$, o conjunto das colunas da matriz A não constitui um conjunto de vetores *Linearmente Independentes* de R^n e neste caso o sistema é indeterminado se $b \in R^n$ é um vetor no subespaço definido pelas combinações lineares das colunas de A ou impossível se b não pertence a este subespaço.

O sistema tem solução indeterminada se para as linhas em que $a_{ii} = 0$, temos valores x_k; $k > i$ de forma que

$$[b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k] = 0,$$

caso contrário o sistema é impossível.
No caso mais geral em que a condição (4) não está satisfeita, a questão de existência e unicidade pode ser respondida considerando o procedimento de *escalonamento* descrito a seguir, o qual consiste em efetuar *transformações* na matriz estendida E de forma a obter uma nova matriz E cujo sistema linear associado é triangular e, equivalente ao sistema original no sentido de que os conjuntos soluções coincidem. Assim a existência e unicidade da solução do sistema original fica estabelecida pela existência e unicidade do sistema escalonado equivalente.

Procedimento Iterativo de Escalonamento

Primeira Iteração

1.1 Condensação pivotal
Consiste em efetuar uma eventual troca de linhas na matriz E de forma a obter uma matriz estendida com a propriedade

$$|a_{i1}| \leq |a_{11}|; \quad 1 < i \leq n$$

1 .2 Definição de multiplicadores
Efetuada a condensação pivotal, definimos multiplicadores m_{i1} $1 < i \leq n$:

$$m_{i1} = a_{i1}\frac{1}{a_{11}}; \quad 1 < i \leq n$$

Como consequência da condensação pivotal, $|m_{i1}| \leq 1$. Observe também que os multiplicadores m_{i1} estão definidos desde que $a_{11} \neq 0$. Após implementada a condensação pivotal, $a_{11} = 0$ somente se todas as entradas na primeira coluna da matriz E forem nulas, indicando que o sistema é indeterminado ou impossível.

1.3 Substituição de linhas

Utilizando os multiplicadores efetuamos as seguintes trocas de linhas ($1 < i \leq n$):

$$(i - ésima \ \ linha) \rightarrow (i - ésima \ \ linha) - m_{i1} \times (1a. \ \ linha)$$

$$a_{ik} \rightarrow a_{ik} - m_{i1} a_{1k}; \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 < i \leq n$$

$$b_i \rightarrow b_i - m_{i1} b_1; \qquad 1 < i \leq n$$

com este procedimento obtemos uma nova matriz estendida em que as entradas na primeira coluna, a_{i1}; $i > 1$, são nulas pois

$$a_{i1} - m_{i1} a_{11} = a_{i1} - a_{i1} \frac{1}{a_{11}} a_{11} = 0$$

Segunda Iteração

2.1 Condensação pivotal
Consiste em efetuar uma eventual troca de linhas na matriz E de forma a obter uma matriz estendida com a propriedade

$$|a_{i2}| \leq |a_{22}|; \quad 2 < i \leq n$$

2.2 Definição de multiplicadores
Efetuada a condensação pivotal, definimos multiplicadores m_{i2} $2 < i \leq n$:

$$m_{i2} = a_{i2}\frac{1}{a_{22}}; \quad 2 < i \leq n$$

Como consequência da condensação pivotal, $|m_{i2}| \leq 1$. Observe também que os multiplicadores m_{i2} estão definidos desde que $a_{22} \neq 0$. Após implementada a condensação pivotal, $a_{22} = 0$ somente se todas as entradas na segunda colunas da matriz E com indices de linha $i \geq 2$ forem nulas. Como após a 1a. iteração as entradas na primeira coluna para estas linhas são iguais a zero, $a_{22} = 0$, após efetuada a condensação pivotal, implica em que o sistema é indeterminado ou impossível.

2.3 Substituição de linhas

Utilizando os multiplicadores efetuamos as seguintes trocas de linhas ($2 < i \leq n$):

$$(i - \acute{e}sima\ \ linha) \to (i - \acute{e}sima\ \ linha) - m_{i2} \times (2a.\ \ linha)$$

$$a_{ik} \to a_{ik} - m_{i2}a_{2k}; \quad 1 \leq k \leq n, \quad 2 < i \leq n$$
$$b_i \to b_i - m_{i2}b_2; \qquad 2 \leq i \leq n$$

com este procedimento obtemos uma nova matriz estendida em que as entradas na primeira coluna, a_{i1}; $i > 1$, são nulas devido ao fato de que após a 1a. iteração, $a_{i1} = 0$; $i > 1$. Também as entradas na segunda coluna, a_{i2}; $i > 2$, são nulas pois

$$a_{i2} - m_{i2}a_{22} = a_{i2} - a_{i2}\frac{1}{a_{22}}a_{22} = 0$$

k . Iteração

k .1 Condensação pivotal
Consiste em efetuar uma eventual troca de linhas na matriz E de forma a obter uma matriz estendida com a propriedade

$$|a_{ik}| \leq |a_{kk}|; \quad k < i \leq n$$

k .2 Definição de multiplicadores
Efetuada a condensação pivotal, definimos multiplicadores m_{ik} $k < i \leq n$:

$$m_{ik} = a_{ik} \frac{1}{a_{kk}}; \quad k < i \leq n$$

Como consequência da condensação pivotal, $|m_{ik}| \leq 1$. Observe também que os multiplicadores m_{ik} estão definidos desde que $a_{kk} \neq 0$. Também como consequência da condensação pivotal, $a_{kk} = 0$ somente se todas as entradas com indices de linha $i \geq k$ na k-ésima coluna da matriz E forem nulas. Como após as iterações anteriores temos $a_{ij} = 0$ quando $j < k$ e $i > j$, $a_{kk} = 0$ após a condensação pivotal indica que o sistema é indeterminado ou impossível.

k.3 Substituição de linhas
Utilizando os multiplicadores efetuamos as seguintes substituições de linhas:

$$(i - \acute{e}sima\ \ linha) \to (i - \acute{e}sima\ \ linha) - m_{ik} \times (k - \acute{e}sima\ \ linha)$$

$$a_{ij} \to a_{ij} - m_{ik} a_{kj}; \quad 1 \leq j \leq n, \quad k < i \leq n$$
$$b_i \to b_i - m_{ik} b_k; \qquad k < i \leq n$$

com este procedimento obtemos uma nova matriz estendida com entradas $a_{ij} = 0$; quando $j \leq k$ e $i > j$.Estas entradas são nulas devido ao fato de que após as iterações anteriores, $a_{ij} = 0$ quando $j < k$ e $i > j$ e para a k-ésima coluna,

$$a_{ik} - m_{ik} a_{kk} = a_{ik} - a_{ik} \frac{1}{a_{kk}} a_{kk} = 0$$

As transformações envolvidas na condensação pivotal (passos k.1 do procedimento de escalonamento) são implementadas pela multiplicação de E por matrizes de permutação simples P. (i.e. multiplicação por uma matriz P com a propriedade de que $p_{ij} = 0$ ou 1; em cada linha e em cada coluna de P existe apenas uma entrada não nula e na diagonal de P existe no máximo duas entradas nulas). Por exemplo a troca da linha i com a linha j é implementada por uma matriz de permutação em que $p_{ij} = p_{ji} = 1$.

Matrizes P com estas propriedades tem inversa e $P^{-1} = P$, de forma que se x é tal que $Ax = b$ então $PAx = Pb$ e se y é tal que $PAy = Pb$ então $Ay = b$. Assim sistemas lineares $Ax = b$ associadosà matriz estendida E e $PAx = Pb$ associado à matriz estendida PE são equivalentes no sentido que seus conjuntos soluções coincidem.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

As transformações envolvidas nas substituições de linhas (passos k.3) são implementadas pela multiplicação de E por uma matriz S com as propriedades:

$$s_{ii} = 1; \quad 1 \leq i \leq n$$

existe apenas uma entrada não nula fora da diagonal de S.

Por exemplo a troca de linhas:

$$(i - ésima \;\; linha) \rightarrow (i - ésima \;\; linha) - m_{ik} \times (k - ésima \;\; linha)$$

é implementada multiplicando a matriz E por uma matriz S com $s_{ik} = -m_{ik}$.

Observando que $S^* = S^{-1}$ existe e é definida por:
$s^*_{ii} = 1; \quad 1 \leq i \leq n$ e existe apenas uma entrada não nula fora da diagonal de S^*; $s^*_{ik} = m_{ik}$, podemos concluir que que se x é tal que $Ax = b$ então $SAx = Sb$ e se y é tal que $SAy = Sb$ então $Ay = b$. Portanto sistemas lineares $Ax = b$ associadosà matriz estendida E e $SAx = Sb$ associado à matriz estendida SE são equivalentes no sentido que seus conjuntos soluções coincidem.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{1n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} - m_{21}a_{11} & a_{22} - m_{21}a_{12} & \cdots & a_{2n-1} - m_{21}a_{1n-1} & a_{2n} - m_{21}a1n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{1n} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Com estas observações podemos concluir que o sistema triangular obtido no final do processo de escalonamento é equivalente ao sistema original pois todas as transformações envolvidas são implementadas pela multiplicação por matrizes que possuem inversas assegurando a equivalência dos conjuntos soluções.

No caso particular em que todos os passos de condensação pivotal não requer permutação de linhas, o processo de escalonamento é implementado multiplicando a matriz estendida original por uma matriz L^{-1} resultante do produto das matrizes que implementam as substituições de linhas;

$$L^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -m_{nn-\mathbf{1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -m_{nn-\mathbf{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{\mathbf{31}} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{\mathbf{21}} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como observado anteriormente, cada matriz neste produto tem inversa, de forma que a inversa de L^{-1}, é obtida pelo seguinte produto:

$$L =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{\mathbf{21}} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{\mathbf{31}} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn-\mathbf{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{nn-\mathbf{1}} & 1 \end{pmatrix}$$

Nos próximos slides fazemos alguns dos produtos que definem L iniciando da direita para a esquerda.

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{nn-\mathbf{2}} & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & m_{nn-\mathbf{1}} & 1
\end{pmatrix}
=
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{nn-\mathbf{2}} & m_{nn-\mathbf{1}} & 1
\end{pmatrix} \tag{10}
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n-1n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn-2} & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n-1n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn-2} & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{n-1\,n-3} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & m_{n-1\,n-2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{nn-3} & m_{nn-2} & m_{nn-1} & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{n-1\,n-3} & m_{n-1\,n-2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{nn-3} & m_{nn-2} & m_{nn-1} & 1
\end{pmatrix} \tag{12}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{n-\mathbf{2}\,n-\mathbf{3}} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{n-\mathbf{1}\,n-\mathbf{3}} & m_{n-\mathbf{1}\,n-\mathbf{2}} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{n\,n-\mathbf{3}} & m_{n\,n-\mathbf{2}} & m_{n\,n-\mathbf{1}} & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{n-\mathbf{2}\,n-\mathbf{3}} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{n-\mathbf{1}\,n-\mathbf{3}} & m_{n-\mathbf{1}\,n-\mathbf{2}} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & m_{n\,n-\mathbf{3}} & m_{n\,n-\mathbf{2}} & m_{n\,n-\mathbf{1}} & 1
\end{pmatrix} \tag{13}
$$

Efetuando todos os produtos obtemos:

$$L =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n-2n-3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n-1n-3} & m_{n-1n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn-3} & m_{nn-2} & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Assim L consiste em uma matriz triangular inferior ($L_{ij} = 0$; $j > i$) com entradas igual a 1 na diagonal de $L_{ij} = m_{ij}$; $i > j$.

Observamos que dada a matriz A, temos:

$$L^{-1}A =$$

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \cdots & \bar{a}_{1n-2} & \bar{a}_{1n-1} & \bar{a}_{1n} \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \cdots & \bar{a}_{2n-2} & \bar{a}_{2n-1} & \bar{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3n-2} & \bar{a}_{3n-1} & \bar{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{n-2n-2} & \bar{a}_{n-2n-1} & \bar{a}_{n-2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{n-1n-1} & \bar{a}_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n-2n-3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n-1n-3} & m_{n-1n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn-3} & m_{nn-2} & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \cdots & \bar{a}_{1n-2} & \bar{a}_{1n-1} & \bar{a}_{1n} \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \cdots & \bar{a}_{2n-2} & \bar{a}_{2n-1} & \bar{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3n-2} & \bar{a}_{3n-1} & \bar{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{n-2n-2} & \bar{a}_{n-2n-1} & \bar{a}_{n-2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{n-1n-1} & \bar{a}_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Definindo a matriz U por:

$$U = L^{-1}A$$

Temos então:

$$L(L^{-1}A) = LU = A$$

ou seja, quando o sistema linear é determinado, a matriz A pode ser decomposta como um produto de uma matriz triangular inferior, L com uma matriz triangular superior, U.

Em geral uma matriz A não singular, a menos de premutações em linhas, admite decomposição como um produto de uma matriz triangular inferior, L e uma matriz triangular superior U, ou seja $A = PLU$.