APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

VOLUMES

DISCIPLINA: CÁLCULO II (LOB1004)

Profa. Diovana A. S. Napoleão

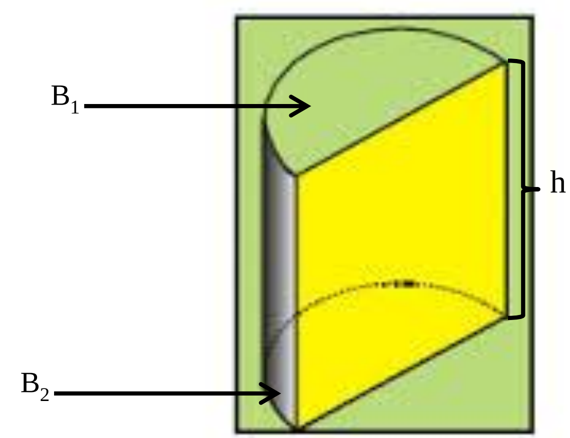
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS BÁSICAS E AMBIENTAIS

VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

- Começamos com um tipo simples de sólido chamado **cilindro (ou, mais precisamente, um cilindro reto).** Como ilustrado na Figura 1(a), um cilindro é delimitado por uma região plana B1, denominada **base, e uma região congruente B2 em um** plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que unem B1 a B2. Se a área da base é A e a altura do cilindro (distância de B1 a B2) é h, então, o volume V do cilindro é definido como:

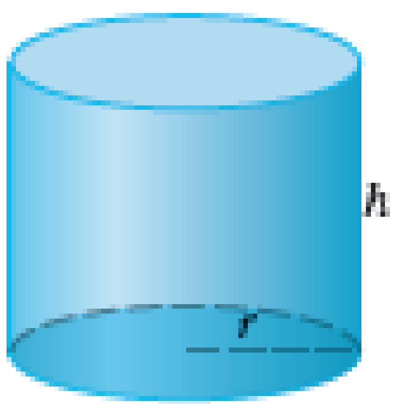
$$V = Ah$$

Figura 1(a)

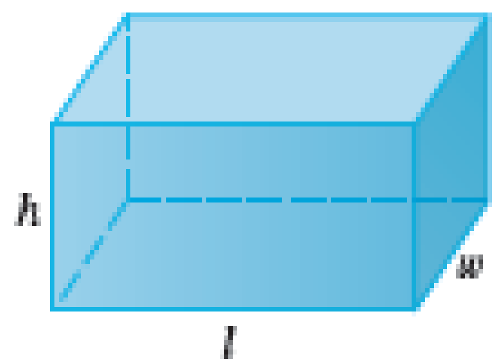


VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Em particular, se a base é um círculo com raio r, então o cilindro é um cilindro circular com o volume V = π r2h, Figura 1(b), e se a base é um retângulo com comprimento l e largura w, então o cilindro é uma caixa retangular (também denominado paralelepípedo retangular) com o volume V = lwh, Figura 1(c).



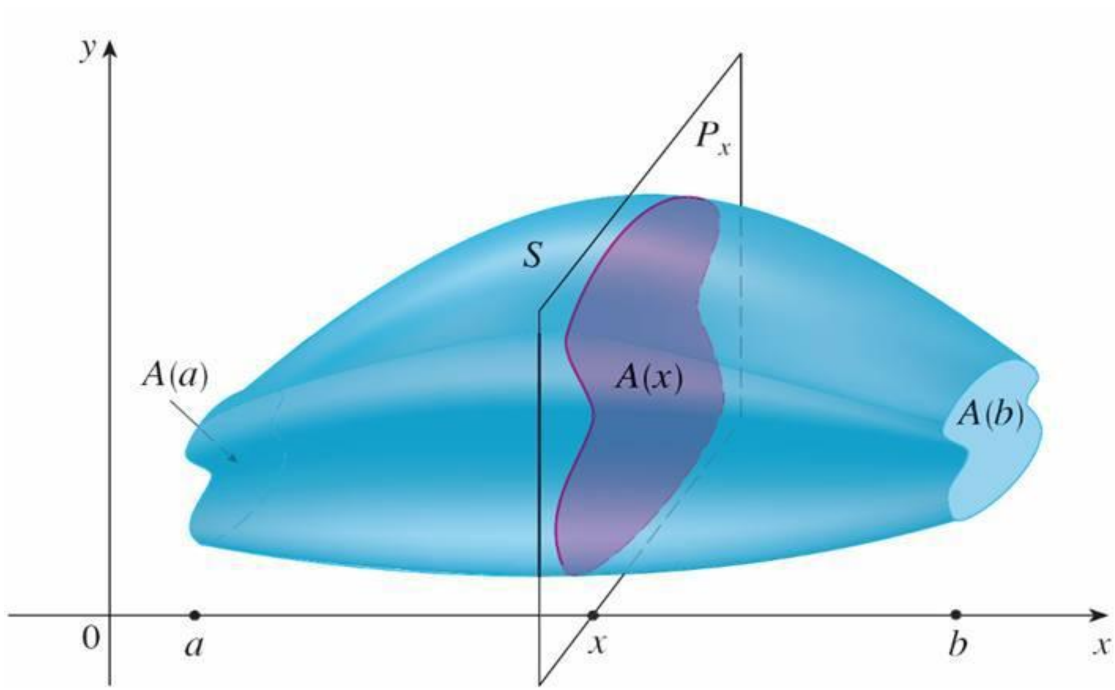
(b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$



(c) Caixa retangular $V = lwh$

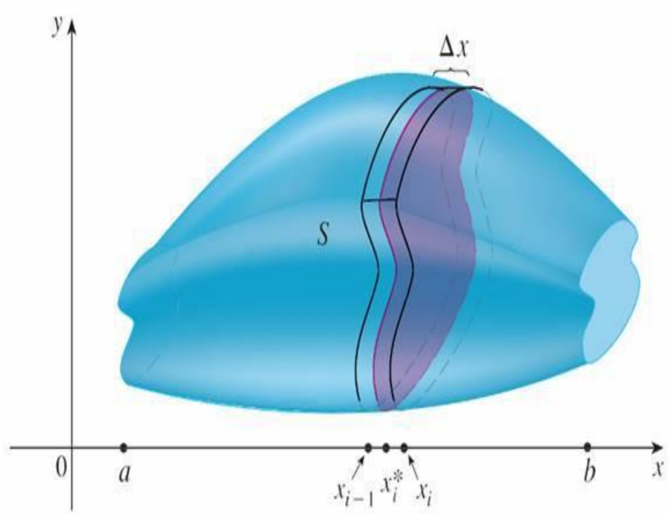
VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

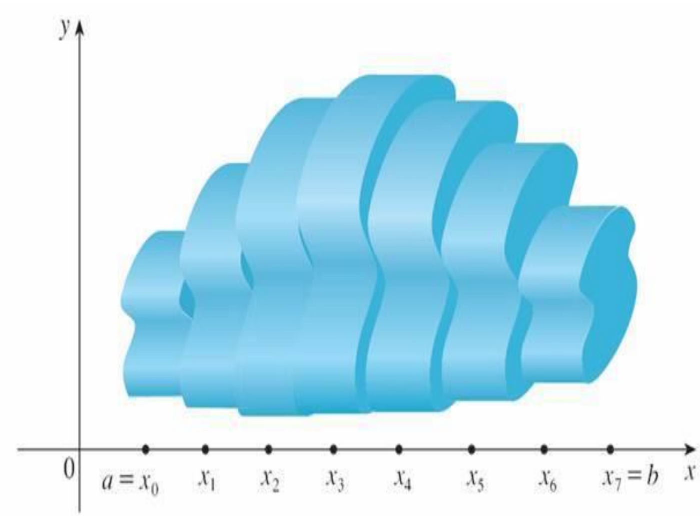
Seja A(x) a área da secção transversal de S no plano Px perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde a ≤ x ≥ b, Figura 2. Fatiando a região S e passando por x, calcule a área de uma fatia. A área da secção transversal A(x) irá variar quando x aumenta de a até b.



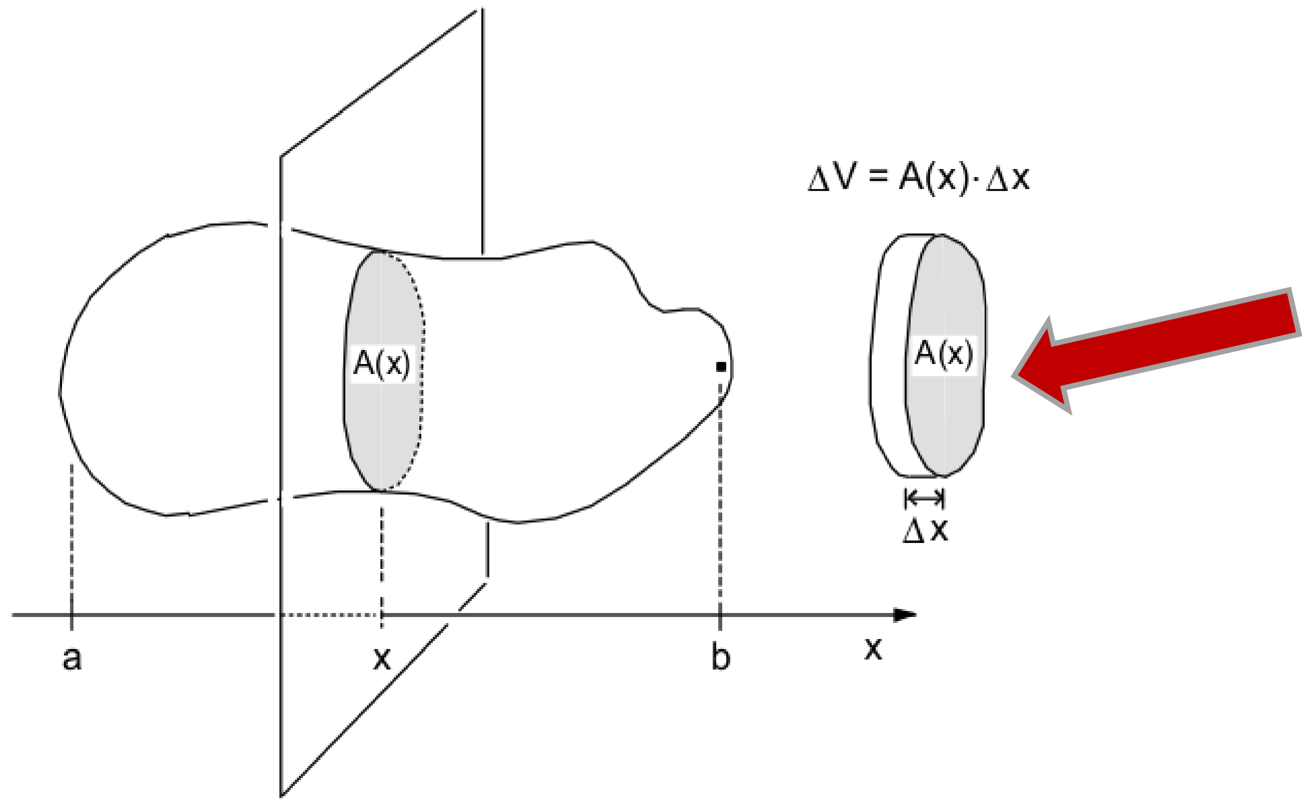
1-VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

Vamos dividir S em n "fatias" de larguras iguais Δx usando os planos Px1, Px2, . . . para fatiar o sólido. Se escolhermos pontos amostrais xi* em [xi – 1, xi], poderemos aproximar a i -ésima fatia Si (a parte de S que está entre os planos Pxi–1 e Pxi) a um cilindro com área de base A (xi*) e "altura" Δx, conforme Figura 3.





VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO



Adicionando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

VOLUME POR FATIAMENTO E ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO

- **Esta aproximação parece quando n→∞. Portanto, definimos o volume como o limite dessas somas quando n→∞. Mas reconhecemos o limite da soma de Riemann como uma integral definida, e dessa forma temos a seguinte definição.**

Definição de volume Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\, \Delta x = \int_a^b A(x)\, dx.$$

2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

Um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de um eixo no plano é denominado sólido de revolução. Para determinar o volume de um sólido, precisamos somente observar que a área da seção transversal A(x) é um disco de raio R(x), a distância entre a fronteira da região bidimensional é o eixo de revolução. A área é portanto:

$$A(x) = \pi(\text{Raio})^2$$
$$A(x) = \pi R(x)^2$$

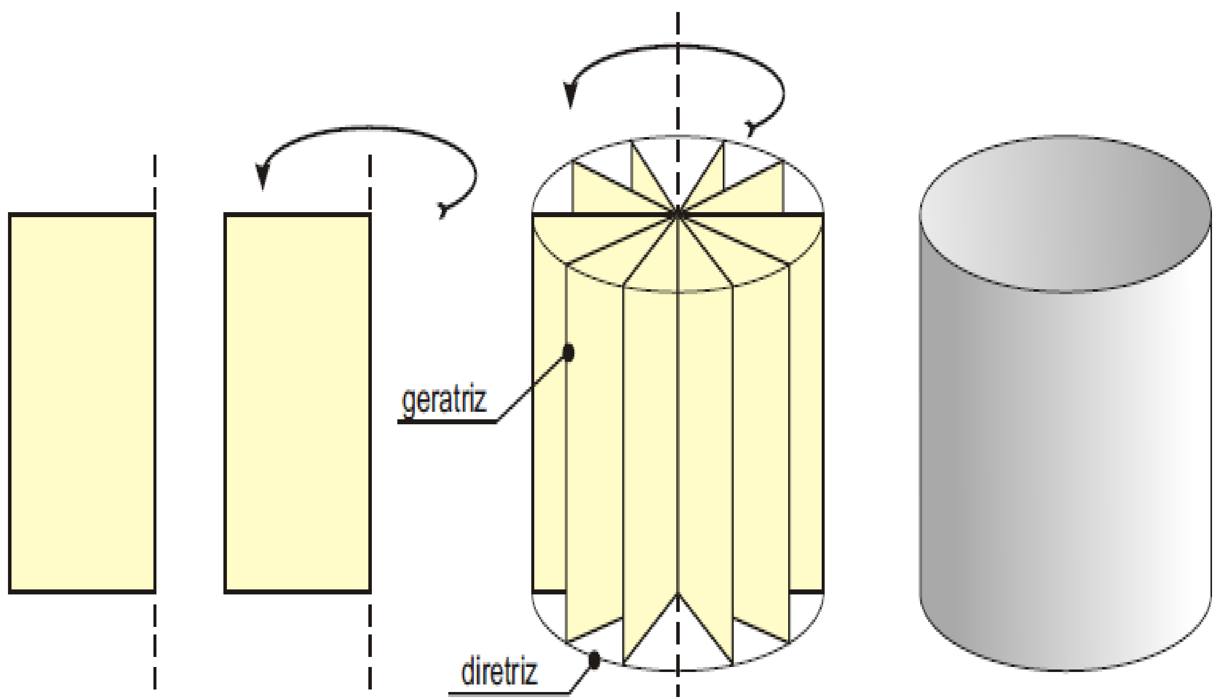
Com base na definição de volume, tem-se:

$$V = \int_a^b A(x)dx \quad = \int_a^b \pi\,[R(x)]^2$$

2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

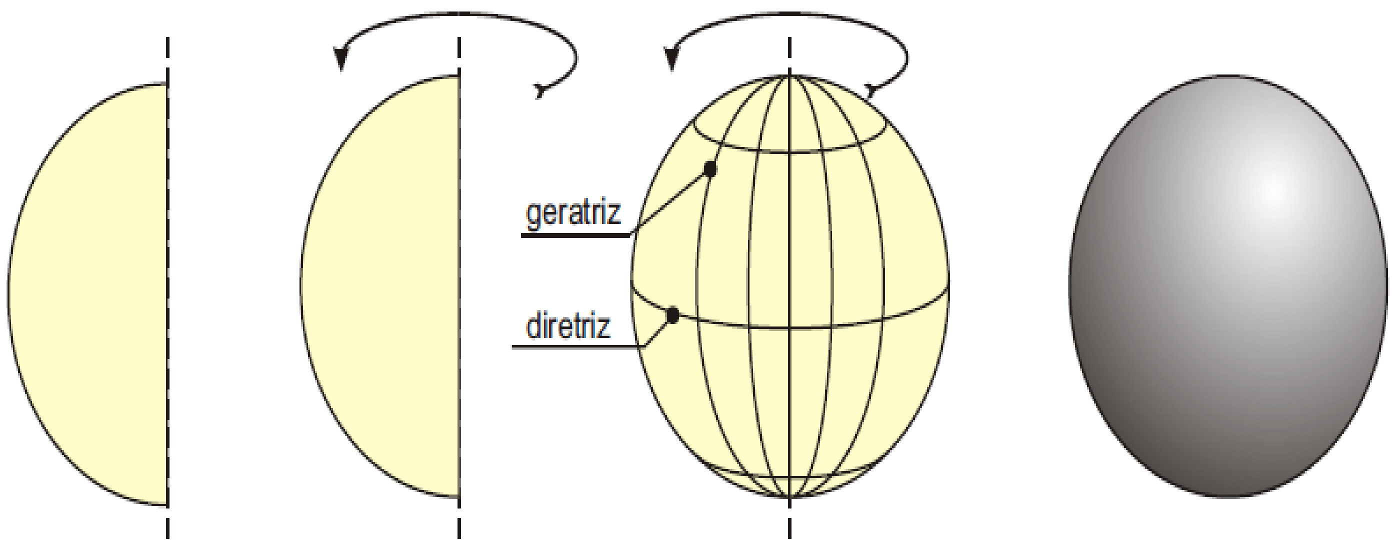
ALGUNS EXEMPLOS DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO:

Cilindro - Sólido de revolução gerado através da rotação de um retangulo em torno de um eixo coincidente com um de seus lados.



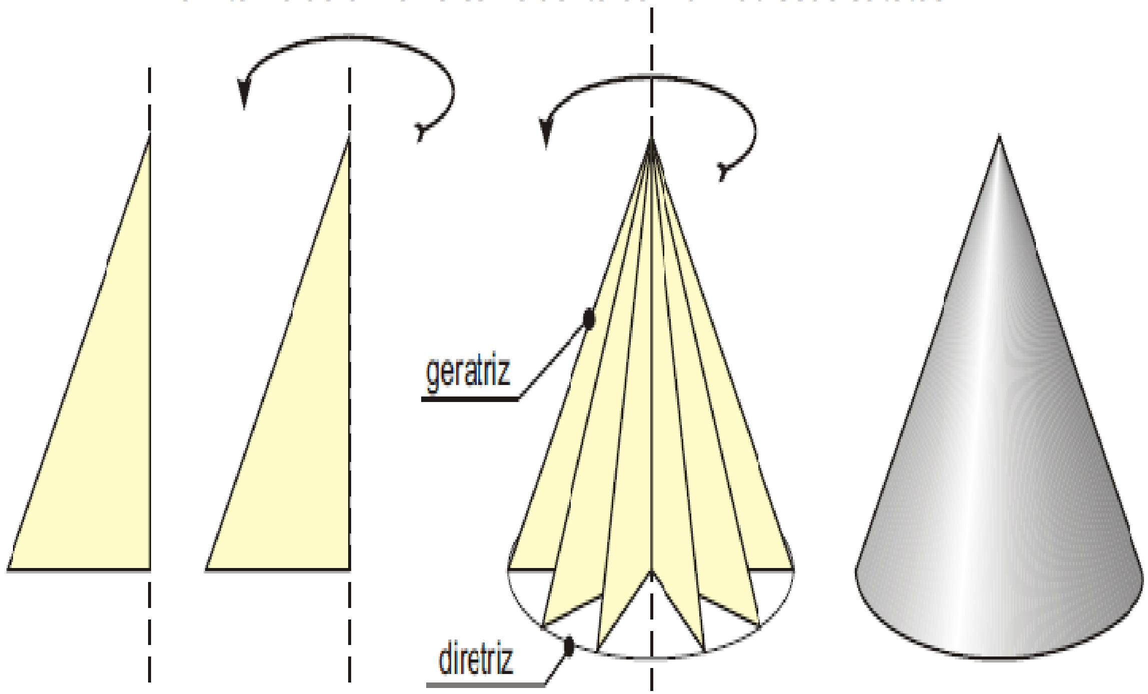
2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

Esfera - Sólido de revolução gerado através da rotação de uma semi - circunferência em torno de um eixo coincidente com o diametro.

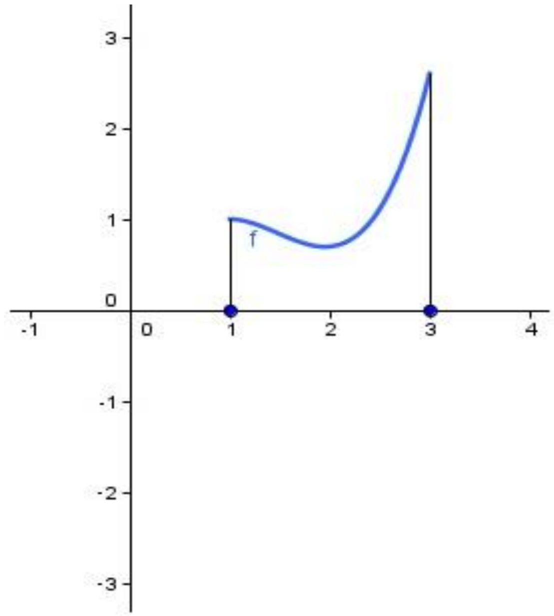


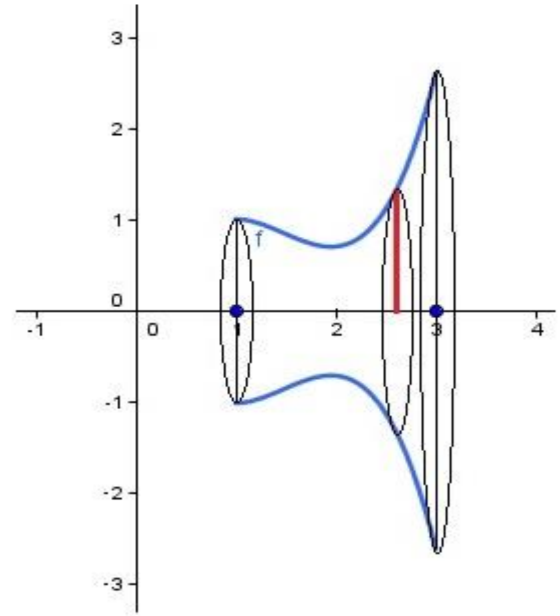
2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

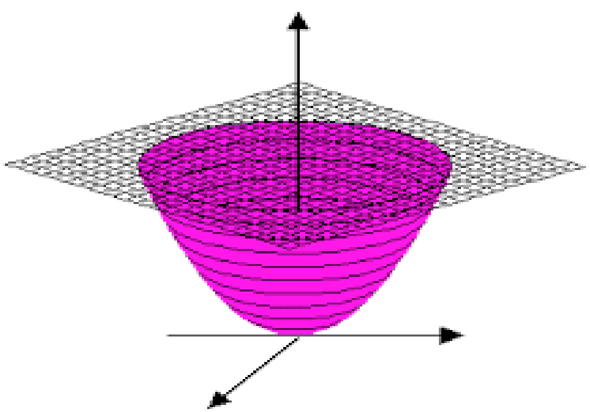
Cone - Sólido de revolução gerado através da rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo coincidente com um de seus catetos.

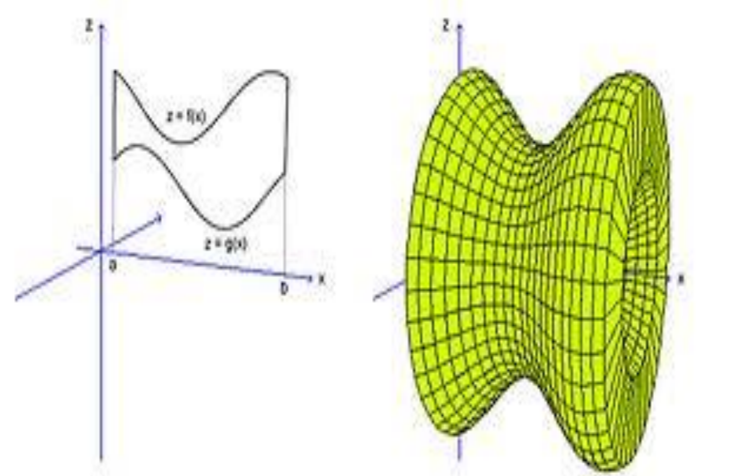


2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO









2- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO DISCO

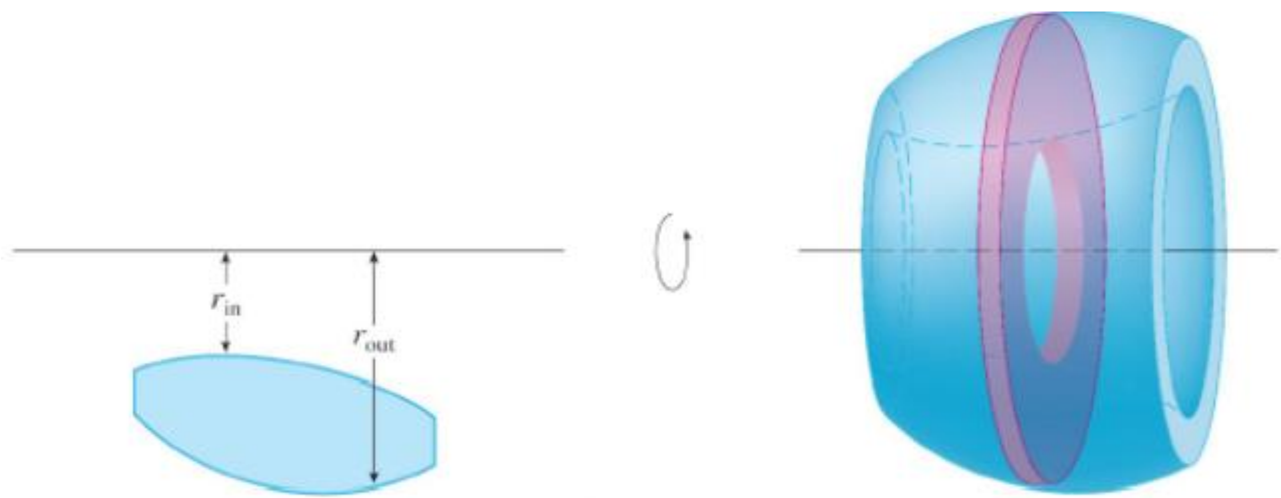
Definição 2: Seja f uma função contínua em [a, b] e seja R a região delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas verticais x=a e x=b.
O volume V do sólido gerado pela revolução de R em torno do eixo Ox é:

$$V = \int_a^b \pi \, [f(x)]^2 \, dx$$

Se uma região revolve em torno de uma reta no plano, o sólido resultante é um sólido de revolução.

3- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO ANEL (ARRUELAS)

O método dos discos pode ser estendido para sólidos de revolução com buracos, substituindo o disco representativo por um anel (arruela). A arruela é formada pela revolução de um retângulo em torno de um eixo (x ou y).
Consideraremos a região limitada por um raio externo R(x) e por um raio interno r(x), conforme a figura apresentada:

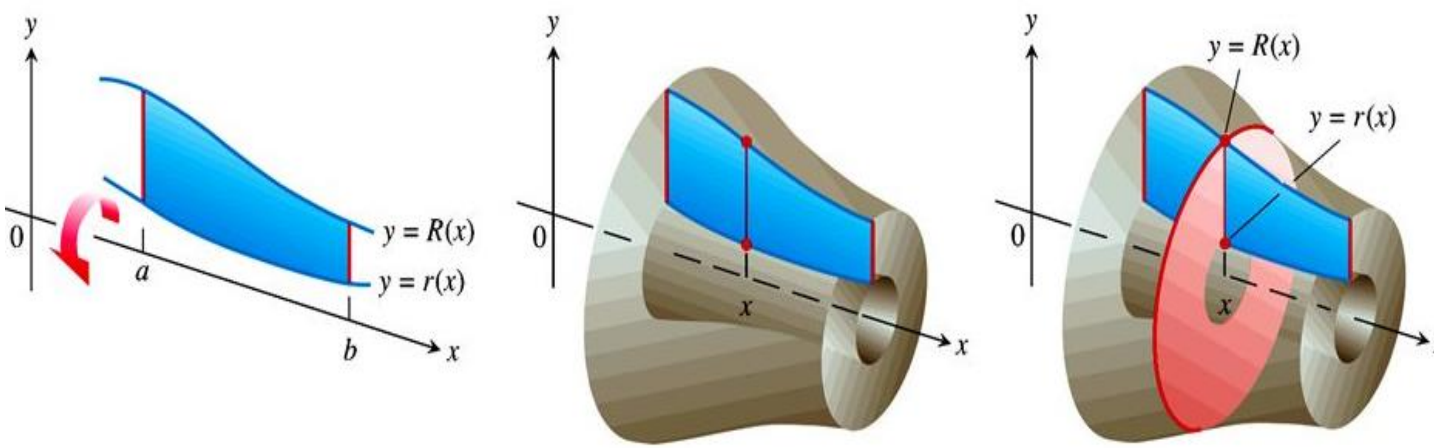


$$V = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2$$

3- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: O MÉTODO DO ANEL (ARRUELAS)

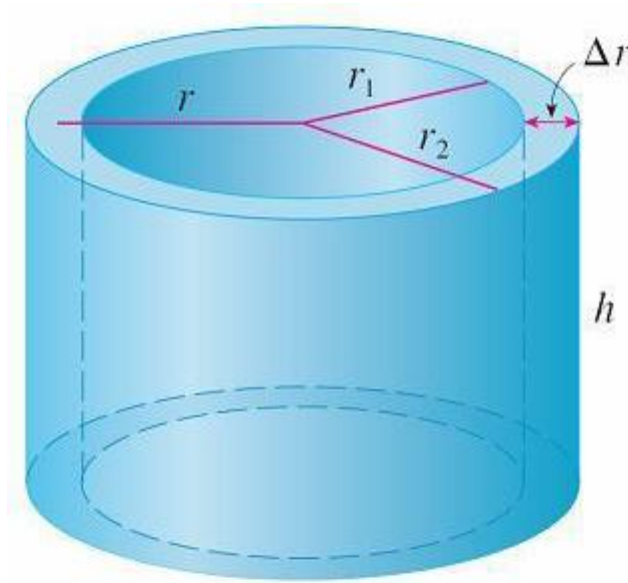
Se a região de sólido de revolução gira em torno do seu eixo de revolução o volume será expresso por:

$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2)dx$$



4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

No método das cascas cilíndricas tomaremos o cilindro como exemplo e o consideraremos como um anel, conforme a figura:



A Figura apresenta uma casca cilíndrica com raio interno r_1 raio externo r_2 e altura h.

4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Seu volume V é calculado subtraindo o volume V_1 do cilindro interno a partir do volume V_2 do cilindro externo:

$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$

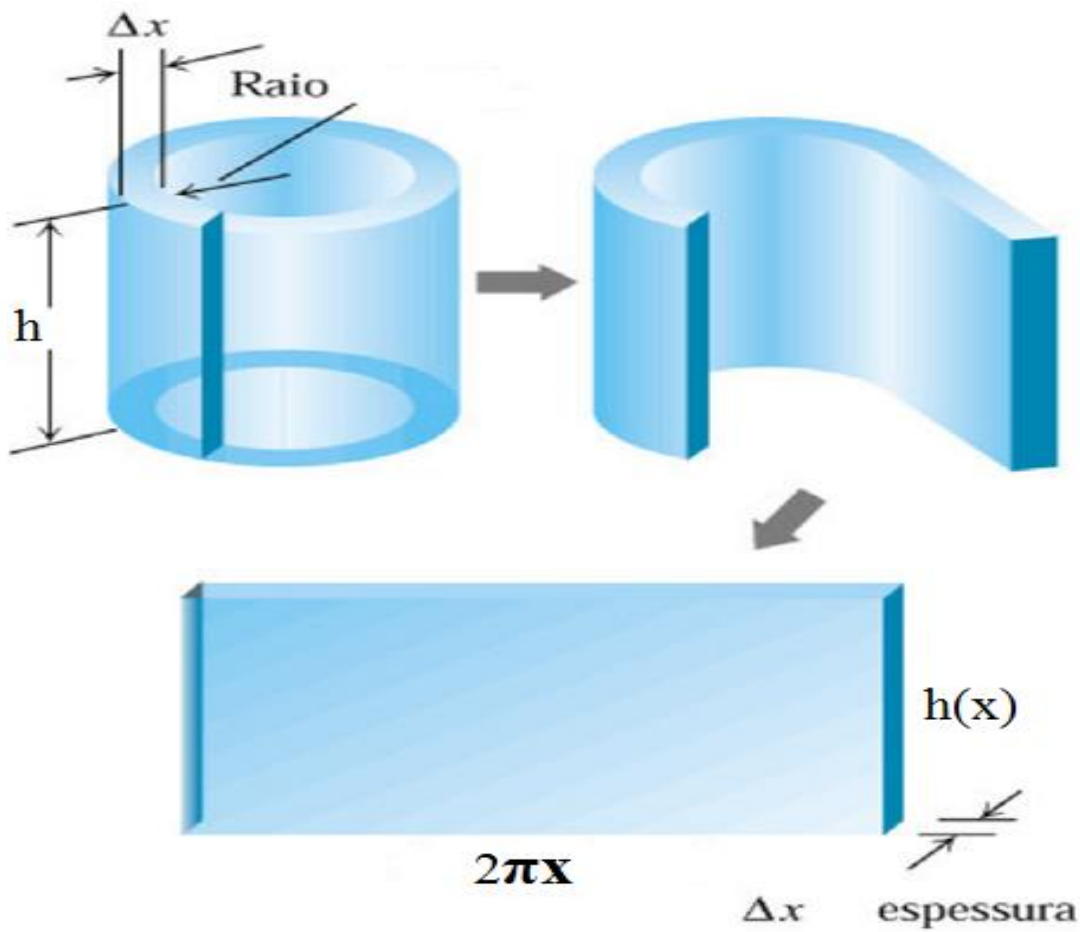
$$V = \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h$$

$$V = 2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \quad \Delta r \quad h$$

Logo a fórmula para o volume de casca cilíndrica será:

$$V = 2\pi\, r\,.h.\,\Delta r$$

4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS



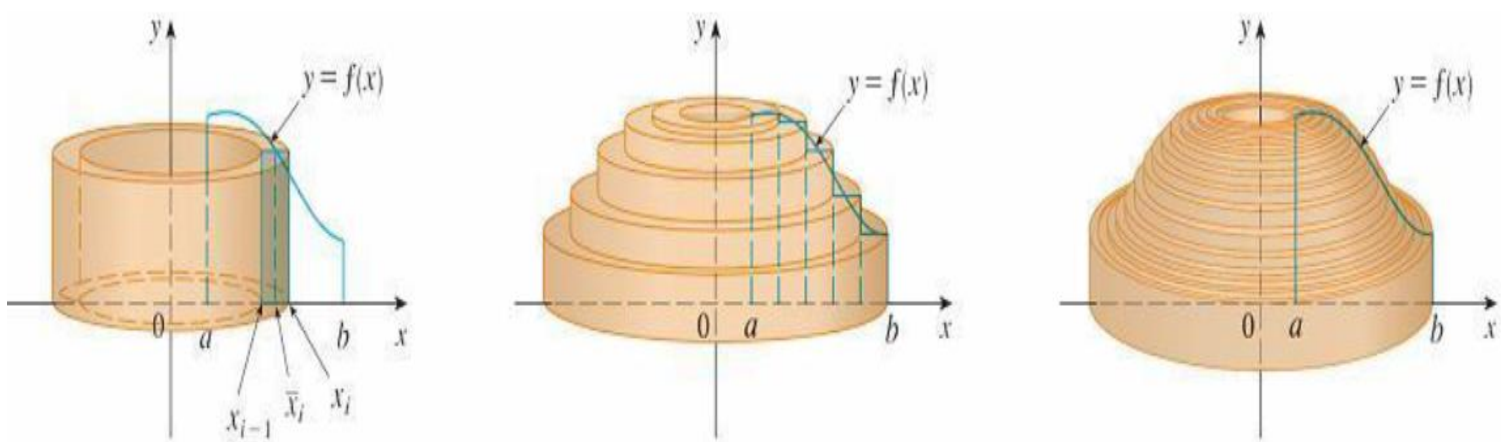
$$V = \int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{área}} . \ \underbrace{[h(x)]}_{\text{altura}} \ \underbrace{dx}_{\text{espessura}}$$

4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Dividimos o intervalo [a, b] em n subintervalos [xi – 1, xi] da mesma largura ∆x e consideramos o ponto médio do i -ésimo subintervalo.

Se o retângulo com base [x i – 1, xi] e altura $f(x_i)$ é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica com raio médio, altura, e espessura ∆x, assim, pela fórmula seu volume será:

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$



4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Portanto, uma aproximação para o volume V de S é dada pela soma dos volumes dessas cascas:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor quando $n \to \infty$. Mas, pela definição de uma integral, sabemos que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

4- SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

Por definição:

O volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y (eixo x) da região sob a curva y= f(x) de a até b

$$V = \int_a^b (2\pi x).\ [h(x)]\quad dx$$

ou

$$V = \int_a^b (2\pi x).\ [h(y)]\quad dy$$