UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos
Departamento de Zootecnia

Economia básica para os cursos de graduação em Zootecnia, Engenharia de Alimentos e Engenharia de Biossistemas.

Textos de apoio para as disciplinas
ZAZ0312 – ANÁLISE ECONÔMICA DA AGROPECUÁRIA
ZAZ0763 - ECONOMIA
ZAZ1036 - ECONOMIA APLICADA À ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS

Prof. Rubens Nunes
rnunes@usp.br

Pirassununga, fevereiro de 2012

7. Teoria da firma: custos

7.1. Maximização de lucros com um fator variável

O lucro é definido como a diferença entre a receita total e o custo total da atividade produtiva. A receita total é o produto da quantidade produzida (supostamente vendida) pelo preço do produto. O custo total é o produto da quantidade de insumo utilizada pelo preço do insumo. Como a quantidade produzida é uma função da quantidade de insumo utilizada, podemos considerar que a variável de controle do produtor é a quantidade de insumo utilizada, e escrever a função lucro como uma função da quantidade de insumo utilizada na produção.

$$\pi = \mathrm{p\,y - w\,x}$$

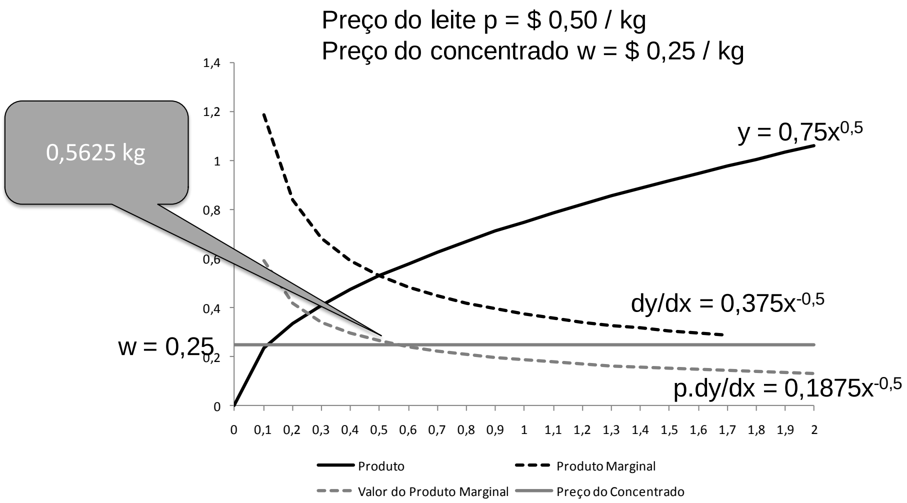
$$\pi = p\,f(x) - wx$$

$$\pi_{max} \Rightarrow \frac{d\pi}{dx} = p\frac{df}{dx} - w = 0$$

$$\pi_{max} \quad \Rightarrow \quad p\frac{df}{dx} = w$$

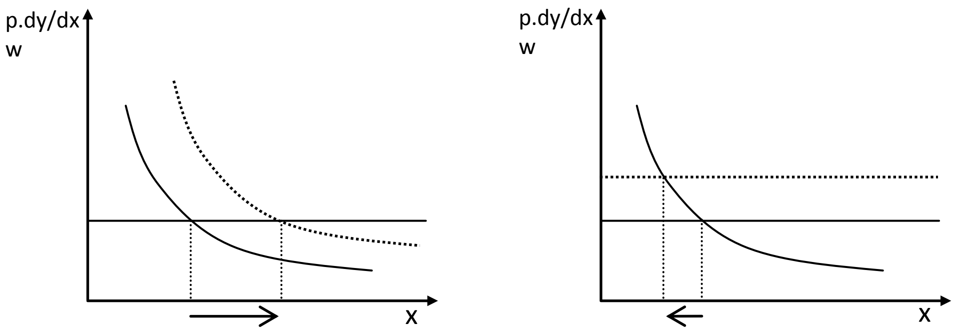
A condição de maximização de lucro pode ser expressa da seguinte maneira: **se a quantidade escolhida do insumo maximiza o lucro, então o valor do produto marginal desse insumo é igual a seu preço**. No exemplo estudado na aula anterior, o produtor tem a liberdade de dar a quantidade de suplemento que quiser para suas vacas, mas, dependendo de sua decisão, ele pode deixar de aproveitar uma oportunidade de lucro, ou desperdiçar recursos. Vamos considerar uma função de produção que tenha produto marginal decrescente, e chamar de x a quantidade de insumo escolhida pelo produtor e de x* a quantidade de insumo que maximiza o lucro. Se x < x*, então o valor do produto marginal é maior que o preço do insumo e o lucro poderia ser aumentado, por meio da utilização de mais insumo. Se o lucro (associado à quantidade x de insumo) puder ser aumentado, então o lucro da produção que utiliza a quantidade x de insumo não é máximo. Se x > x*, o valor do produto marginal é menor do que o preço do insumo. É como se a vaca comesse R$ 1 de suplemento para produzir a mais R$ 0,8 de leite. É fácil perceber que uma redução da quantidade de suplemento aumentaria o lucro. Então, para o lucro de uma produção com produto marginal decrescente ser máximo é preciso que x = x*.

Suponha que a função de produção que relaciona a quantidade de concentrado à quantidade de leite seja $y = 0{,}75x^{0{,}5}$, com os demais fatores de produção fixos. Supondo o preço do leite a $ 0,50/kg e o preço do concentrado a $ 0,25/kg, é possível encontrar a quantidade ótima de insumo x* e a quantidade ótima de leite por vaca y*.



No Gráfico, determinamos a quantidade ótima do insumo variável (concentrado) por meio da condição de que o valor do produto marginal do insumo é igual a seu preço. É tecnicamente possível fazer a vaca dar mais leite, mas, do ponto de vista econômico, o lucro seria menor.

Se houver mudança nos preços do leite (p) e/ou do concentrado (w), a quantidade ótima de concentrado, x*, (e a quantidade ótima de leite por vaca por dia, y*). Um aumento do preço do leite, mantido o preço do concentrado constante, aumenta os valores de x* e y*; um aumento do preço do concentrado, mantido constante o preço do leite, diminui os valores de x* e y*.



(b) aumento do preço do leite

(a) aumento do preço do concentrado

É importante observar que y* existirá apenas se o insumo apresentar rendimentos decrescentes. Considere, por exemplo, uma função de produção com rendimentos constantes: y = ax, em que y é a quantidade de produto, x, a de insumo, e a é o coeficiente técnico de transformação do insumo em produto (uma unidade de insumo permite produzir de forma eficiente "a" unidades de produto, ou, para se obter uma unidade de produto é necessário empregar 1/a unidades de insumo). O lucro é dado por $\pi = py - a^{-1}\,y$. As condições de primeira ordem da maximização do lucro implicam que p = 1/a. Observem que essa condição não depende da quantidade produzida, não existindo uma quantidade finita y* que maximize o lucro.

7.2. Custos de produção em uma função de produção com um fator variável

Ao empregar fatores de produção e insumos, o produtor incorre em custos. Alguns fatores e insumos são adquiridos no mercado, com preços conhecidos. Outros fatores de produção são de propriedade do produtor, e são utilizados sem pagamento em dinheiro. Essas despesas não pagas devem ser computadas no custo de produção?

Para decidir essa questão é preciso entender a natureza do custo, de um ponto de vista da teoria econômica[1]. Custo, em Economia, está associado à escolha: se a dona de casa escolhe fazer um bolo, ela escolha também abrir mão de certa quantidade de farinha, de alguns ovos, açúcar, etc., além de alguma quantidade de combustível para assar a massa e de seu próprio tempo. Todos esses bens valiosos poderiam ter outro uso, ou ainda permanecer estocados. O tempo que a dona de casa alocou na produção do bolo poderia ser empregado para outra atividade, até mesmo para o lazer. Então, o bolo custou os ingredientes da receita, mais o combustível, mais o serviço dos equipamentos de cozinha, mais o tempo da dona de casa. O custo do bolo é tudo o que foi sacrificado para que o bolo existisse.

Custo, no sentido de **sacrifício** ou **benefício alternativo não realizado**, é designado como **custo de oportunidade**. Nas empresas familiares, os proprietários realizam diversas funções administrativas e operacionais, ser receber salário. O trabalho dos membros da família, mesmo que não seja pago, representa, do ponto de vista econômico, um custo, pois as horas trabalhadas na empresa familiar poderiam ser usadas em outras atividades, inclusive no trabalho remunerado para terceiros. O salário que os membros da família deixam de receber é o custo de oportunidade do trabalho na empresa familiar.

Em alguns casos, o custo de oportunidade é facilmente identificado com um montante de dinheiro. Quando o produtor compra insumos ou sementes, ele abre mão de certa quantia em dinheiro. O custo de oportunidade do insumo é o preço pago. Em outros casos, o custo de oportunidade não é observável, pois se refere ao valor de transações "virtuais": qual seria o salário que o trabalhador por conta própria receberia se trabalhasse para um empregador? Qual seria o valor do arrendamento da terra que o produtor cultiva? Ainda que, em alguns casos seja difícil de avaliar, para a Economia, custo é o custo de oportunidade associado a uma escolha.

Estudaremos agora o custo de uma produção que tem apenas um fator variável e um conjunto de fatores fixos. A quantidade dos fatores fixos é dada ao longo do ciclo de produção, e não pode ser alterada. O produtor controlará apenas a quantidade do fator variável, e, indiretamente a quantidade produzida. Uma parte do **custo total** é o custo de dispor dos fatores fixos. Essa parte não varia com a quantidade produzida e é chamada de **custo fixo**. O aluguel de um ponto comercial, por exemplo, não guarda proporção com o faturamento do negócio: mesmo que não venda nada, o comerciante deve pagar o aluguel. O outro componente do custo é o **custo variável**, pois varia com a quantidade produzida. Para produzir mais, é necessário utilizar uma quantidade maior de insumos, e isso custa mais caro. Os custos variáveis podem ser evitados, se o produtor decidir não produzir; os custos fixos são inevitáveis, ao menos no curto horizonte temporal em que ocorre a decisão de quanto produzir.

[1] Como veremos adiante, a contabilidade tem definições e procedimentos que não coincidem totalmente com os da teoria econômica.

Custo Total (y) = Custo Fixo + Custo Variável (y)

O custo variável é o custo da menor quantidade de insumo tecnicamente necessária para se obter a quantidade y de produto. A inversa da função de produção informa a quantidade de insumo necessária à produção eficiente para cada quantidade de produto:

$y = f(x) \quad dy/dx > 0$ (função de produção)

$x = f^{-1}(y) \quad dx/dy > 0$ (insumo requerido na produção)

Sendo x_i a quantidade de cada fator fixo, w_i o preço (ou custo de oportunidade) dos fatores fixos, x_j a quantidade do fator variável, e w_j o preço do fator variável, a função custo é:

$$C(y) = \sum_{i=1}^{i} w_i \, x_i \; + \; w_j \, f^{-1}(y)$$

Retomando o exemplo do concentrado oferecido às vacas para aumentar a produção de leite, poderíamos escrever o lucro apenas como uma função da quantidade produzida. A hipótese aqui é a de que a **firma é tomadora de preços**, isto é, ela é incapaz de fixar os preços do produto e/ou do insumo unilateralmente.

$$\pi = \mathrm{p\,y - w\,x}$$

Contudo, x não é qualquer quantidade de insumo, mas a menor quantidade suficiente para produzir a quantidade y. Se invertermos a função de produção, encontraremos a quantidade de insumo eficiente associada a cada quantidade de produto. A inversa da função de produção informa a quantidade de insumo requerida para produzir determinada quantidade de produto. Sendo y = f(x) a função de produção, podemos representar o lucro como uma função da quantidade produzida:

$$x = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y})$$

$$\pi = \mathrm{p\,y - w\,f^{-1}(y)}$$

Nessa equação, o termo py é a função receita total e w $f^{-1}(y)$ é a função custo. Se o lucro for máximo, teremos

$$\frac{d\pi}{dy} = 0$$

$$\mathrm{p - w}\,\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} \; = \; 0$$

$$\mathrm{p = w}\,\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}$$

A condição de maximização de lucro significa que, se existir uma quantidade y* que maximize o lucro, então, quando essa quantidade for produzida, **o preço do produto** será **igual ao custo marginal**. O termo dx/dy informa qual é o aumento da utilização do insumo se houver um aumento marginal (muito pequeno, infinitesimal) da quantidade produzida. O requisito marginal de insumo (dx/dy) multiplicado pelo preço do insumo fornece o custo marginal, que pode ser interpretado como a “velocidade” com que o custo cresce quando se aumenta a quantidade produzida.

No exemplo da produção de leite em que o concentrado é o insumo variável havíamos suposto que a função de produção era representada por $y = 0,75x^{0,5}$, ou seja, a quantidade adicional de leite é igual a três quartos da raiz quadrada da quantidade de concentrado. Tanto o produto quanto o insumo são dados em kg/vaca/dia. P preço do leite era $ 0,50 / kg e o do concentrado, $ 0,25 / kg. A quantidade de concentrado necessária para obter o leite é dada pela inversa da função de produção $x = (4/3\ y)^2$. O lucro como função da quantidade produzida e dos preços do produto e do insumo é representado pela equação:

$$\pi\ (y) = py - wx(y)$$

$$\pi\ (y) = 0,5\ y - 0,25\ (4/3\ y)^2$$

Para obter a quantidade y* que maximiza o lucro, inspecionamos as Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$dp/dy = 0 \rightarrow 0,5 - 2\ .\ 0,25\ .\ (4/3)^2\ y^* = 0$$

$$y^* = 0,5625 \text{ kg leite/vaca/dia}$$

A quantidade de suplemento necessária para produzir y* é, por coincidência, 0,5625 kg concentrado/vaca/dia.

7.3. Produto marginal dos fatores fixos (curto prazo)

Os fatores variáveis sujeitos a rendimentos decrescentes são utilizados até o ponto em que o valor do produto marginal iguala o preço do fator. Com os fatores fixos essa condição não se verifica:

(i) Mesmo que o produto marginal seja maior que o preço do fator, não é possível aumentar a quantidade utilizada na produção. Por exemplo, a área do estabelecimento agropecuário não é facilmente ajustada, mesmo que o valor do produto marginal da terra seja alto.

(ii) Um fator fixo abundante será utilizado até seu produto marginal ser nulo. Como o custo de ter a quantidade fixa do fator não pode ser mudado, qualquer contribuição positiva desse fator melhora o resultado do produtor. Quando o produto marginal de um fator é igual a zero, é muito provável que o estabelecimento agropecuário não utilize toda a quantidade disponível desse fator (por exemplo, deixando terras sem uso econômico).

(iii) Um produtor que maximiza o lucro nunca utilizará o fator fixo em níveis que ele apresente produto marginal negativo.

Para generalizar os resultados obtidos até aqui vamos representar a quantidade disponível de um fator fixo por q e a quantidade utilizada por x. Nesse caso, o produtor maximiza lucro se

$$\frac{dy}{dx}\ (q - x) = 0$$

Note que essa condição será observada se (i) o produto marginal dy/dx for zero, (podendo sobrar a quantidade q – x do fator fixo) e/ou (ii) não sobrar nenhuma quantidade não utilizada do fator fixo (q = x).

É comum, por exemplo, estabelecimentos agropecuários familiares apresentarem alta produtividade da terra e baixa produtividade do trabalho. Em geral, os estabelecimentos agropecuários familiares tem área pequena, comparados aos estabelecimentos que empregam intensivamente mão-de-obra assalariada, e uma relativa abundância de trabalho dos membros da família. Apesar de o produto marginal da terra ser elevado, o agricultor familiar não consegue aumentar a quantidade de terra empregada na produção, pois seria preciso capital para adquirir o direito de uso de terra (compra ou arrendamento) em localização que permitisse o uso dos recursos existentes no estabelecimento, como as de um estabelecimento vizinho. A produtividade é baixa porque o mercado de trabalho tem imperfeições (custos de informação, mobilidade, sazonalidade da demanda, etc.) que o levam a não absorver toda a oferta potencial de mão-de-obra. Assim, mesmo com baixa produtividade, o trabalho no estabelecimento familiar é, em muitos casos, a melhor alternativa para o agricultor.

7.4. Maximização de lucros com dois ou mais fatores variáveis

Quando temos mais de um fator variável, surge o problema de determinar qual é a combinação ótima dos fatores variáveis, isto é, qual a combinação que minimiza o custo de produção. A solução depende de se os fatores são complementares, substitutos perfeitos ou fatores que apresentam simultaneamente certo grau de complementaridade e de substitutibilidade.

No caso de insumos complementares, os insumos são utilizados em proporções fixas. A função de produção para o caso de dois insumos variáveis é

$$y = \min \{ax_1; bx_2\}$$

Os coeficientes técnicos a e b são fixos e correspondem ao inverso da menor quantidade necessária do respectivo insumo para se produzir uma unidade do produto. Para se produzir uma molécula de água são necessários dois átomos de hidrogênio e um átomo de oxigênio:

número de moléculas de água = min {1/2 número de átomos de hidrogênio ; 1 número de átomos de oxigênio}

ou seja, com vinte átomos de hidrogênio e trinta átomos de oxigênio podemos fazer apenas 10 moléculas de água, “sobrando” 20 átomos de oxigênio. A quantidade produzida de moléculas de água será o menor número escolhido entre a metade do número de átomos de hidrogênio e o número de átomos de oxigênio.
A função custo de uma tecnologia com insumos complementares perfeitos é

$$C(y) = w_1\, 1/a\, y + w_2\, 1/b\, y = (w_1\, 1/a + w_2\, 1/b)\, y$$

No caso de substitutos perfeitos, o produto pode ser obtido com qualquer um dos insumos separadamente, ou ainda com qualquer combinação dos dois substitutos perfeitos. A função de produção é separável, no sentido de que é possível identificar separadamente a contribuição isolada de cada um dos insumos para a produção:

$$y = ax_1 + bx_2$$

Um exemplo próximo de insumos substitutos perfeitos é dado pelo etanol e pela gasolina usados em veículos flex. O produto, isto é, o percurso em quilômetros, é uma função das quantidades de etanol e/ou de gasolina colocadas no tanque:

Km percorridos = 10 km/l . quantidade de etanol (l) + 15 km/l . quantidade de gasolina (l)

O consumidor escolherá a alternativa que permite cumprir o percurso desejado ao menor custo possível. Uma função custo com insumos substitutos perfeitos é:

$$C(y) = \min \{ w_1 1/a\ y ; w_2 1/b\ y\}$$

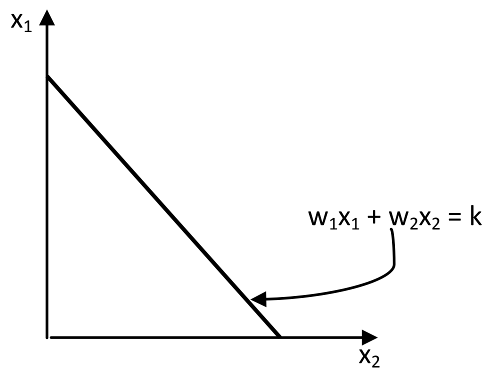
Observe que, se os preços dos insumos forem proporcionais a seus produtos marginais, isto é, $w_1/a = w_2/b$, qualquer combinação dos insumos substitutos perfeitos terá o mesmo custo. Se os preços não forem proporcionais aos produtos marginais do insumo, o dispêndio mínimo para produzir y será alcançado com a utilização de apenas um insumo, o que apresentar melhor relação benefício (produto marginal) / custo (preço).

A função custo dá o menor dispêndio necessário para produzir determinada quantidade de produto, dados os preços de insumos e fatores de produção.

As **isoquantas** (seção 4.5) contem todos os conjuntos de quantidades de insumos que permitem produzir a mesma quantidade de produto. Uma isoquanta é um subconjunto do conjunto de possibilidades de produção, definido pela propriedade de que cada elemento desse subconjunto, constituído por cestas de insumos, é capaz de produzir a mesma quantidade de produto. Vamos definir agora um outro subconjunto do conjunto de possibilidades de produção: vamos agrupar todas as cestas de insumos que custam o mesmo valor. Esse subconjunto é o **isocusto**, definido, no caso de dois insumos variáveis por

$$w_1x_1 + w_2x_2 = k$$

em que w é o preço do insumo, x, sua quantidade, e k>o é uma constante.

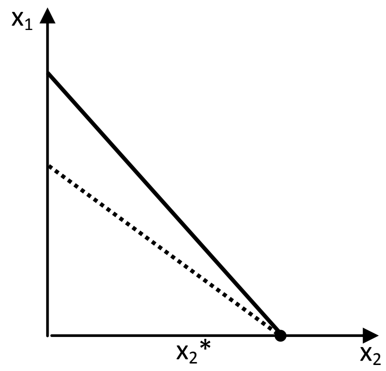


Um isocusto define implicitamente uma função em que a quantidade de um insumo depende da quantidade do outro insumo:

$$x_1 = k/w_1 - (w_2/w_1)\, x_2$$

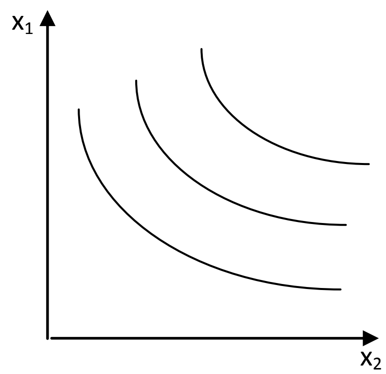
O coeficiente angular da linha de isocusto é - w_2/w_1. Um aumento do preço do insumo 1 reduz a inclinação da linha de isocusto; um aumento do preço do insumo 2 aumenta a inclinação. Um aumento no dispêndio, mantidos os preços constantes, desloca a linha de isocusto para cima e para a direita.

Vamos juntar a linha de isocusto (linha contínua) e a isoquanta (tracejada) referentes a complementos perfeitos em um mesmo gráfico.

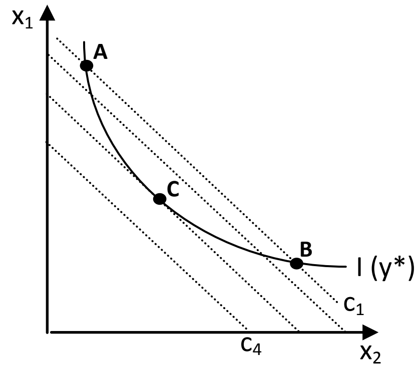


No caso, a cesta de insumos (0 ; x_2*) é a que permite produzir a quantidade y ao menor custo possível.

Quando a escolha envolve insumos que são substitutos e complementos imperfeitos, a escolha da cesta de insumos que minimiza o dispêndio associado à produção de certa quantidade torna-se um pouco mais complicado, pois as isquantas são estritamente convexas. O gráfico apresenta um **mapa de isoquantas** convexas.



O problema da firma pode ser colocado de duas formas equivalentes: (i) encontrar as quantidades x_1* e x_2* que permitam produzir determinada quantidade y* ao menor custo possível, ou (ii) encontrar as quantidades x_1* e x_2* que com certo orçamento permitam produzir a maior quantidade y* de produto possível.

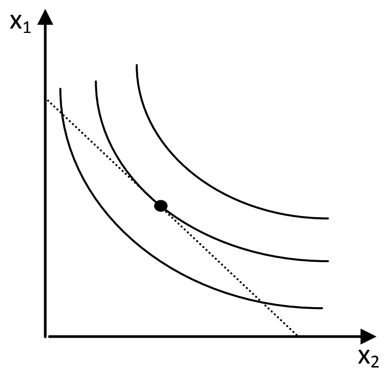


A cesta de insumos (x_1* ; x_2*) que minimiza o custo de produzir y* pertence à isoquanta I (y*). Isso quer dizer que é tecnicamente possível fazer a quantidade y* com a referida cesta de insumos. Além disso, a cesta de insumos (x_1* ; x_2*) deve pertencer à linha de isocusto (c) de menor valor, isto é, a linha que estiver mais à esquerda e a baixo. A linha c_4 está associada a um custo menor que as demais linhas representadas no gráfico. Entretanto, com as combinações de insumos contidas na isocusto c_4 não é tecnicamente possível produzir a quantidade y*. A linha de isocusto c_1 tem dois pontos associados à cestas de insumos suficientes para produzir y* (pontos A e B), mas y* pode ser produzido com custo menor. O ponto C é a intersecção da isoquanta ao nível y* com a isocusto de menor nível que tem pontos comuns com a isoquanta.

Na cesta que minimiza o custo de produzir y*, a linha de isocusto tangencia a isoquanta. As duas linhas (isocusto e isoquanta) tem a mesma inclinação apenas no ponto C. Vimos que a inclinação da linha de isocusto é – w_2/w_1 , e a inclinação da isoquanta é a taxa marginal de substituição - $\partial y/\partial x_2$ / $\partial y/\partial x_1$. Portanto, **na cesta que minimiza o custo** de produzir y* **os preços dos insumos são proporcionais aos respectivos produtos marginais**.

Podemos tratar do problema dual fixando primeiramente certo orçamento (custo), para depois procurar a cesta de insumos que permite produzir a maior quantidade tecnicamente possível.

Quanto mais acima e à direita, maior a quantidade associada à isoquanta. O gráfico representa uma isoquanta que é tecnicamente impossível de ser alcançada com o custo predeterminado.



A solução do problema corresponde ao ponto em que a linha de isocusto tangencia a isoquanta. A partir da solução do “problema do produtor” encontra-se a função custo.

7.5. A função custo associada à função de produção Cobb-Douglas

A função Cobb-Douglas[2] é usada largamente em Economia, tanto para representar relações insumo – produto (função de produção), como para representar as preferências do consumidor. Com duas variáveis independentes, sua forma é: $y = Ax_1^a x_2^b$, em que A, a, e b, são constantes.

O problema do produtor consiste em minimizar o dispêndio para produzir a quantidade y, escolhendo as quantidades adequadas dos insumos 1 e 2, considerando os respectivos preços. A função objetivo é o dispêndio associado à aquisição dos insumos, e a restrição é a quantidade a ser produzida.

$$C(w, \mathrm{y}) = \min \ \mathrm{w}_1 x_1 + \mathrm{w}_2 x_2$$
$$tal \ \text{ que } \ x_1^a x_2^b = \mathrm{y}$$

O par (x_1^* ; x_2^*) que resolve o problema de minimização de custo condicionada é o mesmo que soluciona a minimização incondicionada da Função Lagrangeana, em que λ é o multiplicador de Lagrange[3]:

$$\mathrm{L} = \mathrm{w}_1 x_1 + \mathrm{w}_2 x_2 - \lambda\left(x_1^a x_2^b - \mathrm{y}\right)$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_1} = w_1 - \lambda a x_1^{a-1} x_2^b = 0$$
$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_2} = w_2 - \lambda b x_1^a x_2^{b-1} = 0$$
$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda} = x_1^a x_2^b - \mathrm{y} = 0$$

Dividindo-se as duas primeiras equações das C.P.O., obtem-se uma relação entre as quantidades ótimas x_1^* e x^{2*}, que permitirá escrever uma em função da outra: $x^{2*} = f(x_1^*, y)$. Com isso, é possível escrever a função de produção como função da quantidade de apenas um dos insumos.

---

[2] Engenheiros navais ingleses, que utilizaram a forma funcional proposta por Knut Wicksell para estudar empiricamente a indústria naval. Cobb, C. W.; Douglas, P. H. (1928). "A Theory of Production". American Economic Review 18 (Supplement): 139–165.

[3] Calculadas nas quantidades x_1^* e x_2^* que solucionam o problema, a restrição e a função objetivo são tangentes, tendo portanto a mesma inclinação: $\partial C/\partial x_1$ / $\partial C/\partial x_2$ = $\partial y/\partial x_1$ / $\partial y/\partial x_2$, então existe um número λ diferente de zero tal que $\partial C/\partial x_1 = \lambda\ \partial y/\partial x_1$ e $\partial C/\partial x_2 = \lambda\ \partial y/\partial x_2$. O multiplicador de Lagrange (λ), na minimização de custo, informa a sensibilidade da função objetivo, o custo, a variações marginais na restrição, ou seja, na quantidade produzida (em quanto o custo será reduzido se reduzirmos “um pouquinho” a produção: o multiplicador corresponde ao custo marginal.

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{ax_1^{a-1}x_2^{b}}{bx_1^{a}x_2^{b-1}}=\frac{ax_2}{bx_1}\Rightarrow x_2=\frac{bx_1w_1}{aw_2}$$

$$\mathrm{x}_1^{a}\left(\frac{bw_1}{aw_2}x_1\right)^{b}=y$$

$$x_1^{a+b}\left(\frac{aw_2}{bw_1}\right)^{b}=y$$

$$x_1^{a+b}=\left(\frac{aw_2}{bw_1}\right)^{-b}y$$

$$x_1{*}=\left(\frac{aw_2}{bw_1}\right)^{\frac{-b}{a+b}}y^{\frac{1}{a+b}}$$

Encontramos a quantidade ótima do insumo 1, como uma função dos preços dos insumos e da quantidade produzida. Repetimos o procedimento para o insumo 2.

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{ax_1^{a-1}x_2^{b}}{bx_1^{a}x_2^{b-1}}=\frac{ax_2}{bx_1}\Rightarrow x_1=\frac{ax_2w_2}{bw_1}$$

$$\left(\frac{ax_2w_2}{bw_1}\right)^{a}x_2^{b}=y$$

$$\left(\frac{aw_2}{bw_1}\right)^{a}x_2^{a+b}=y$$

$$x_2^{a+b}=\left(\frac{aw_2}{bw_1}\right)^{-a}y$$

$$x_2{*}=\left(\frac{aw_2}{bw_1}\right)^{\frac{-a}{a+b}}y^{\frac{1}{a+b}}$$

A função custo é obtida pela multiplicação dos preços dos insumos pelas respectivas quantidades ótimas (Σwx*).

$$C(w,y)=w_1\left(\frac{aw_2}{bw_1}\right)^{\frac{b}{a+b}}y^{\frac{1}{a+b}}+w_2\left(\frac{aw_2}{bw_1}\right)^{\frac{-a}{a+b}}y^{\frac{1}{a+b}}$$

$$C(w,y)=\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}}+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-a}{a+b}}\right]w_1^{\frac{a}{a+b}}w_2^{\frac{b}{a+b}}y^{\frac{1}{a+b}}$$

Vamos a um exemplo numérico. Os preços dos insumos 1 e 2 são respectivamente 0,5 e 0,25, e a função de produção é $y = x_1^{0,75}x_2^{0,25}$. A quantidade a ser produzida é 100.

$$C(w, \mathrm{y}) = \min \;\; 0{,}5\, x_1 + 0{,}25\, x_2$$
$$tal \;\; \text{que} \;\; x_1^{0,75} x_2^{0,25} = \mathrm{y}$$

As condições de primeira ordem (C.P.O.) da minimização da função lagrangeana são:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0{,}5 - \lambda \left(0{,}75 x_1^{-0,25} x_2^{0,25}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0{,}25 - \lambda \left(0{,}25 x_1^{0,75} x_2^{-0,75}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \; x_1^{0,75} x_2^{0,25} - \; 100 = 0$$

A partir das duas primeiras C.P.O, obtem-se uma relação entre as quantidades dos dois insumos que deve ser verificada na solução do problema. A terceira C.P.O. informa simplesmente que o nível de produção especificado deve ser alcançado com as quantidades de insumo x_1* e x_2*.

$$\frac{\partial L / \partial x_1}{\partial L / \partial x_2} \Rightarrow \frac{0{,}75 x_1^{-0,25} x_2^{0,25}}{0{,}25 x_1^{0,75} x_2^{-0,75}} = \frac{0{,}5}{0{,}25}$$

$$0{,}75 \frac{x_2}{x_1} = 0{,}5 \;\; \Rightarrow \; x_2 = \frac{2}{3} x_1 \Leftrightarrow \; x_1 = \frac{3}{2}\, x_2$$

Não sabemos ainda quais são as quantidades que solucionam o problema, mas sabemos que a quantidade do insumo 1 deverá ser dois terços da quantidade do insumo 2. Sabemos também que é preciso produzir 100 unidades. Substituindo a quantidade do insumo 2 na função de produção temos:

$$x_1^{0,75} \left(\frac{2}{3} x_1\right)^{0,25} = 100$$

$$x_1^* = 100\, \left({}^{2}\!/_{3}\right)^{-0,25} = \;\; 110{,}7$$

$$x_2 = \; {}^{2}\!/_{3}\; x_1 \; \Longrightarrow \; x_2^* = 73{,}8$$

As variáveis independentes da função custo são a quantidade produzida e os preços dos insumos. Para obtê-la, podemos escrever:

$$x_1^* = y\; \left({}^{2}\!/_{3}\right)^{-0,25} \;\; \text{e} \;\; x_2^* = \; {}^{2}\!/_{3}\; x_1^*$$

$$C(y, \boldsymbol{w}) = \; w_1\, y\; \left({}^{2}\!/_{3}\right)^{-0,25} + \; w_2 \left({}^{2}\!/_{3}\right) y\; \left({}^{2}\!/_{3}\right)^{-0,25}$$

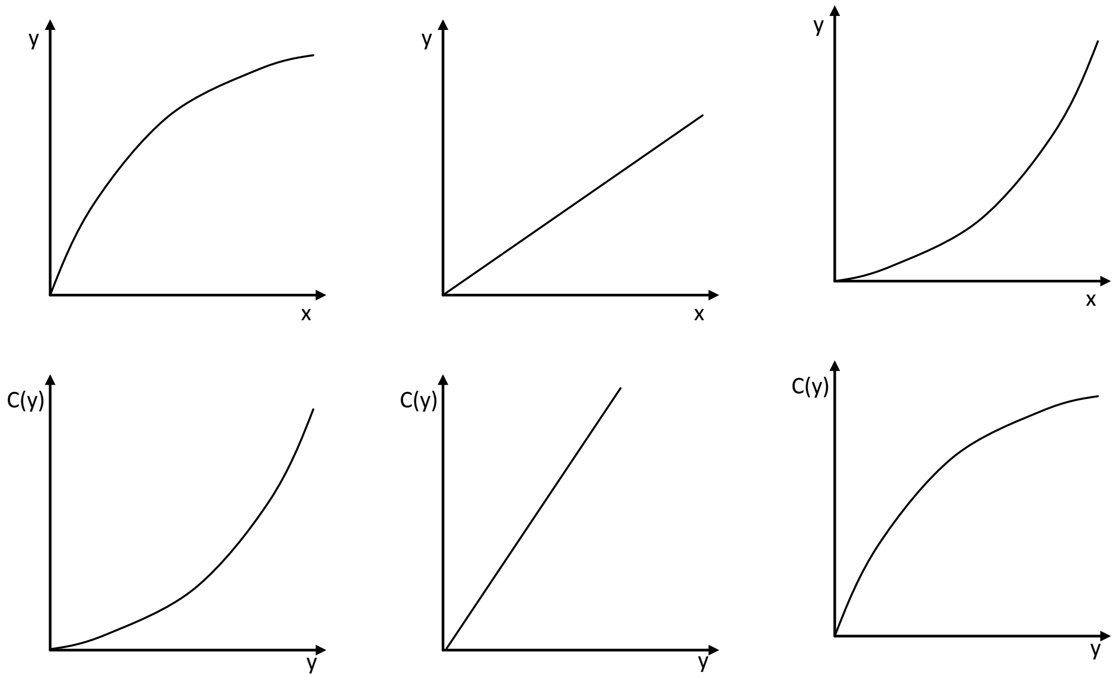
$$C(y, \boldsymbol{w}) = \; y\; \left({}^{2}\!/_{3}\right)^{-0,25} \left(0{,}5 + 0{,}25\; {}^{2}\!/_{3}\right)$$

$$C(y, \boldsymbol{w}) \cong 1{,}57\ y$$

7.6. As formas das curvas de custos

Assim como a função de produção, a função custo total é monotonicamente crescente. Esse fato é consequência do requisito de eficiência econômica: se a função de produção não fosse crescente, um aumento da quantidade de insumo não causaria um aumento da quantidade de produto; a quantidade adicional de insumo teria sido desperdiçada e isso conflita com a noção de eficiência. De modo semelhante, se fosse possível aumentar a produção sem aumentar o custo, a produção inicial não era eficiente. As funções de produção e custo total estão intimamente relacionadas, pois ambas incorporam o requisito de eficiência.

As funções de produção e de custo total são como imagens espelhadas uma da outra: se a função de produção é côncava, a função custo é convexa. A concavidade da função de produção decorre dos retornos decrescentes de um ou mais fatores de produção, ou, se tratamos do curto prazo, do efeito de fatores de produção fixos. Se os fatores de produção tornam-se menos produtivos à medida que a produção aumenta, o custo aumenta a taxas crescentes, pois para cada unidade adicional de produto são requeridas quantidades cada vez maiores de insumos.



Rendimentos Decrescentes

Rendimentos Constantes

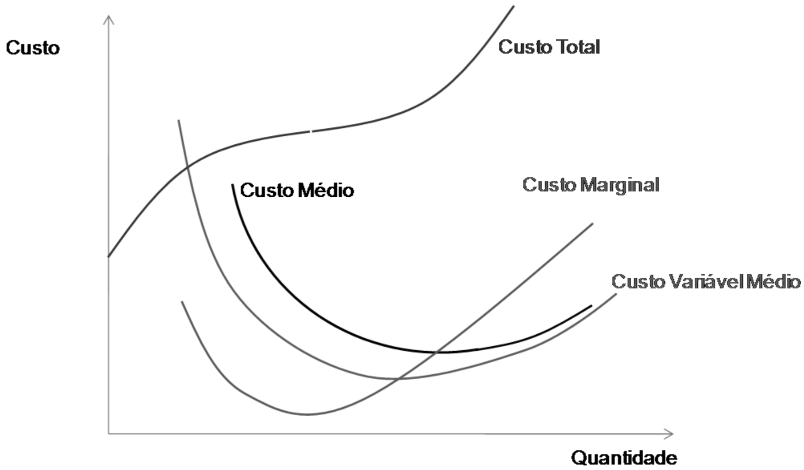
Rendimentos Crescentes

A partir da função Custo Total – C(y) – são definidas as funções Custo Médio e Custo Marginal, úteis para analisar a escolha da quantidade ótima a ser produzida.

Custo Médio: é o custo total dividido pela quantidade produzida. CMe (y) = C(y)/y.

Custo Marginal: é o incremento do custo total associado a uma pequena variação da quantidade produzida; é a “velocidade” com que os custos crescem à medida que a produção aumenta; é o custo da última unidade produzida. CMa(y) = dC(y)/dy.

No curto prazo, caracterizado pela presença de fatores fixos, definem-se ainda o Custo Fixo Médio e o Custo Variável Médio. O Custo Fixo Médio é monotonicamente decrescente e tende a zero quando a produção tende a infinito. Costuma-se dizer que os custos fixos são “diluídos” à medida que a quantidade produzida aumenta. Os custos variáveis são aqueles que variam com a quantidade produzida. São decrescentes quando o custo marginal for menor que o custo médio; crescentes, quando o custo marginal for maior que o custo médio.



As curvas de custo variável médio e custo (total) médio aproximam-se quando a quantidade produzida aumenta, pois a diferença entre elas, o custo fixo médio, tende a zero. A curva de custo marginal corta as curvas de custo variável médio e de custo (total) médio em seus pontos de mínimo. Isso não ocorre por acaso.

$$CMe = \frac{\mathrm{CT(Q)}}{\mathrm{Q}} \qquad CMg = \frac{dCT}{dQ}$$

$$\text{custo medio minimo} \Rightarrow \frac{\mathrm{dCMe}}{\mathrm{dQ}} = 0$$

$$\frac{\mathrm{dCMe}}{\mathrm{dQ}} = -\frac{\frac{dCT}{dQ}Q - CT}{Q^2} = 0$$

$$\frac{dCT}{dQ}Q - CT = 0$$

$$\frac{dCT}{dQ}Q \quad = CT$$

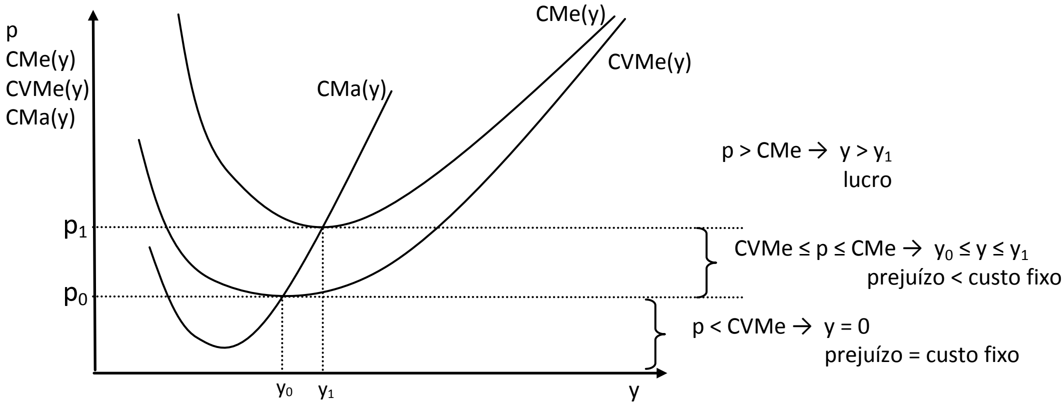
$$\frac{dCT}{dQ} = \frac{CT}{Q}$$

$$\text{custo marginal} \;=\; \text{custo medio (calculados no ponto de mínimo da curva de custo médio)}$$

7.7. A oferta da firma e a oferta do mercado

Vamos assumir a hipótese de que a **firma** é **tomadora de preços** nos mercados de produtos e insumos. A firma maximiza o lucro escolhendo produzir a quantidade y* para a qual o preço do produto é igual ao custo marginal. Então, para cada preço do produto, dados os preços dos insumos, a firma escolherá a melhor quantidade a produzir, isto é, a que gerar o maior lucro possível. Como vimos (seção 5.2), o lucro máximo da firma será alcançado quando a quantidade produzida for tal que o preço do produto seja igual ao custo marginal.

Contudo, observando o gráfico com as curvas de custo médio, custo variável médio e custo marginal, constatamos que, em certos casos, a quantidade que iguala o preço ao custo marginal gera prejuízo.



Para preços abaixo de p_0, a firma não consegue recuperar sequer os custos variáveis. Então sua melhor resposta é parar de produzir, tendo como prejuízo os custos fixos. Se ela produzisse alguma coisa, o prejuízo seria maior ainda[4].

Para preços entre p_0 e p_1, a firma terá prejuízo se produzir uma quantidade tal que o custo marginal seja igual ao preço, porém esse prejuízo será menor que os custos fixos. A firma recupera todo o custo variável e parte dos custos fixos. Assim, é preferível operar com prejuízo a cessar a atividade.

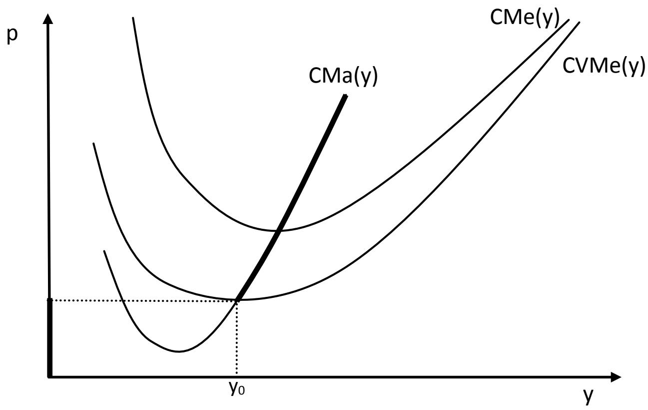
Para preços maiores que p_1, a firma terá o lucro máximo ao produzir a quantidade que iguala preço e custo marginal.

A curva de oferta da firma é

$$y(p,\boldsymbol{w}) = \begin{cases} 0\,, & se\ p < CVMe\ mínimo \\ y^*\ tal\ que\ p = CMa(y^*), & se\ p \geq CVMe\ mínimo \end{cases}$$

[4] Apesar de ser uma situação excepcional, em certas ocasiões o café deixa de ser colhido, pois os custos de colheita, beneficiamento e armazenagem excedem o preço recebido pelo produtor.

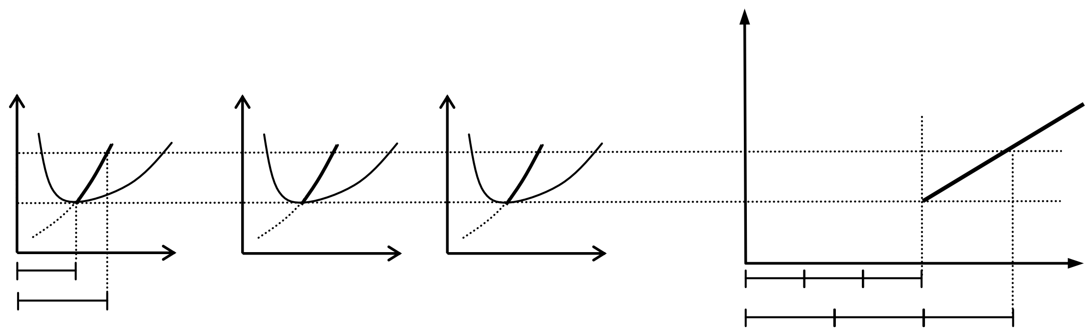
Em outros termos, a **curva de oferta da firma** é o **ramo ascendente da curva de custo marginal acima da curva de custo variável médio**. Para preços abaixo do custo variável médio, a quantidade ofertada é nula. Observe que a função oferta é descontínua: se o preço alcançar o custo variável médio mínimo, a quantidade ofertada saltará de zero para a quantidade correspondente ao mínimo custo variável médio, sem passar por quantidades intermediárias.



No longo prazo não há fatores fixos; por conseguinte, não há custos fixos. A curva de custo médio coincide com a curva de custo variável médio. A quantidade para qual o custo médio de longo prazo é mínimo é a escala mínima economicamente viável. Produzir quantidades menores será tecnicamente possível, porém com ineficiências.

A oferta de mercado é a soma das quantidades ofertadas pelas firmas para cada preço. Costuma-se dizer que a oferta de mercado é a “soma horizontal” das ofertas das firmas individuais. Se houver n firmas no mercado, a oferta de mercado será

$$Q^O = \sum_{i=1}^{n} y_i\,(p, \boldsymbol{w})$$



7.8. Custos: as visões da Economia e da Contabilidade

Economistas e contadores referem-se frequentemente aos custos de um produto, mas, em geral, eles não querem dizer a mesma coisa, ainda que a palavra seja a mesma.

O objetivo da Contabilidade Geral é o levantamento da situação patrimonial das organizações. Patrimônio é um estoque (riqueza), ao passo que a produção, a que se refere o custo econômico, é um fluxo (renda). Para determinar o valor do patrimônio de uma firma, o Balanço Patrimonial classifica os bens, direitos e obrigações da firma em itens do Ativo, do Passivo e do Patrimônio Líquido. Os itens do Ativo representam bens de propriedade da firma (terras, máquinas, insumos em estoque, produtos acabados ou em processo de produção) e direitos da firma em relação a terceiros (como o direito de receber o valor de uma venda a prazo). O Passivo engloba os direitos de terceiros com relação à firma, ou seja, as obrigações da firma para com outras pessoas, firmas e governo. Os impostos a pagar, os salários devidos, as parcelas não pagas do financiamento de bens, os títulos relativos a compras a prazo são itens do Passivo. O Patrimônio Líquido representa os recursos próprios da firma, tipicamente o capital integralizado pelos sócios e os lucros e prejuízos acumulados durante a existência da firma até o momento em que se faz o balanço.

O Ativo representa a aplicação dos recursos da firma, isto é, onde ela “gasta”, ou, mais propriamente, aloca os recursos. Tais recursos podem se originar da própria firma (Patrimônio Líquido) ou podem ser créditos tomados de terceiros (Passivo). Assim, no Balanço Patrimonial sempre se verificará a identidade

Ativo = Passivo + Patrimônio Líquido

... independentemente da situação econômico-financeira da firma. Uma empresa pode estar “quebrada” e ainda assim a identidade se mantém. Diz-se que a firma tem “passivo a descoberto” quando o valor das obrigações é maior que a soma dos bens e direitos mais o patrimônio líquido da firma, que, nesse caso, assume valor negativo. Se fossem vendidos todos os bens e direitos da firma, o montante apurado não seria suficiente para pagar todos os credores.

O Balanço Patrimonial é, então, uma fotografia da firma em um determinado ponto do tempo. Como podemos saber o resultado da atividade da firma? Da mesma forma que nos anúncios de tratamentos para emagrecer, para testemunhar a eficácia do método oferecido, se comparam fotos da pessoa “antes” e “depois” do tratamento. A diferença entre as fotos é o resultado do exercício ...

Os conceitos fundamentais para a apuração do resultado são as receitas e as despesas. As receitas são classificadas em operacionais (venda dos bens produzidos pela firma) ou não operacionais (rendas não associadas diretamente à atividade produtiva da firma, como o arrendamento de terras para terceiros, a receita de juros sobre os saldos positivos nas contas bancárias, etc.). As despesas correspondem ao valor dos bens e serviços utilizados nas operações da firma. Quando a firma adquire e mantem em estoque insumos, ela não incorreu em despesa, apenas seu patrimônio mudou de forma: uma riqueza que estava na forma de dinheiro em caixa passou a assumir a forma de produtos estocados. A despesa ocorrerá à medida que os insumos adquiridos forem sendo consumidos nas atividades da firma.

Para apurar as despesas relativas a determinado item (parafusos) em certo período (2010) é feita a seguinte conta:

(A) Parafusos em estoque - saldo em 31.12.2009: $ 1.000,00
(B) Parafusos adquiridos no período: $ 2.000
(C) Parafusos em estoque – saldo em 31.12.2010: $ 500
(D) Despesas com parafusos (01.01 a 31.12.2010): D = A + B – C = $ 2.500

No exemplo, a despesa com parafusos foi de $ 2.500. Não importa se todos os parafusos foram usados corretamente na produção, se alguns foram extraviados, ou danificados. O fato é que "desapareceram" $ 2.500 em parafusos, isto é, houve uma despesa com parafusos.

O Resultado do Exercício será a variação do patrimônio da firma no período. Suponha que a firma tivesse produzido mesas e cadeiras. Esses móveis foram vendidos, talvez alguns estejam em estoque, prontos para a venda. Em todo o caso, o valor dos ativos (dinheiro em caixa ou produtos acabados em estoque) da firma aumentou.

O resultado do exercício é o valor criado no período: a diferença entre os aumentos (produção e venda) e as reduções do ativo (despesas). O resultado do exercício é igual ao valor da produção menos o valor das despesas.

As despesas referem-se a um período; os custos, a produtos. A Contabilidade de Custos procura determinar o custo dos produtos distribuindo as despesas entre os produtos da firma. No caso dos insumos, a apropriação das despesas pelos produtos é imediata. Mas o rateio de custos fixos e de custos compartilhados por diferentes linhas de produção requer o estabelecimento de critérios (em grande medida arbitrários) para a apropriação das despesas correspondentes.

A contabilidade só registra os valores pagos e recebidos em dinheiro em algum momento, que pode não coincidir com o momento em que o insumo ou fator de produção é efetivamente usado. A economia entende como custo o custo de oportunidade dos fatores, sejam eles pagos em dinheiro ou não.

As ineficiências no processo produtivo são contabilizadas como despesas. O custo em economia pressupõe a produção eficiente.

A contabilidade registra, em termos de valores monetários, o que de fato aconteceu com a firma em determinado período; a análise microeconômica foca as alternativas de ação da firma, isto é, todas as escolhas, em termos de possibilidades de produção, que se apresentam à firma.

Ração de custo mínimo e ração de lucro máximo

Minimizar o custo de produzir a quantidade ótima de um bem equivale a **maximizar o lucro**. Este box tem o objetivo de chamar a atenção para a necessidade de termo em mente o **problema** com o qual estamos lidando, isto é qual é a **função objetivo** e quais são as **restrições técnicas e econômicas**.

Suponha que se deseja produzir uma ração para um certo animal a custo mínimo pela mistura de dois ingredientes A e B, vendidos aos preços:

Produto A: R$ 3,00 por Kg
Produto B: R$ 4,00 por kg

Sabe-se que o animal necessita de nutrientes, cujas quantidades mínimas (em unidades por semana) mostramos a seguir:

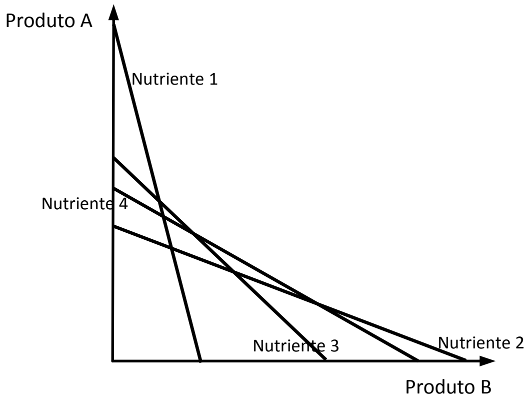
Nutriente 1 – 50 unidades
Nutriente 2 – 100 unidades
Nutriente 3 – 60 unidades
Nutriente 4- 180 unidades

Os nutrientes acima serão obtidos dos produtos A e B, cuja composição está indicada na tabela:

Nutrientes	Composição (unidades de Nutriente por kg do produto)	
	Produto A	Produto B
1	5	25
2	25	10
3	10	10
4	35	20

Vamos representar todas as alternativas factíveis, isto é, todas as combinações dos produtos 1 e 2 que atendem aos requisitos nutricionais. Em uma combinação factível, a oferta de cada um dos nutrientes tem que ser maior ou igual ao requisito nutricional mínimo.

$$\begin{cases} 5\,x_A + 25\,x_B \geq 50 \\ 25\,x_A + 10\,x_B \geq 100 \\ 10\,x_A + 10\,x_B \geq 60 \\ 35\,x_A + 20\,x_B \geq 180 \end{cases}$$



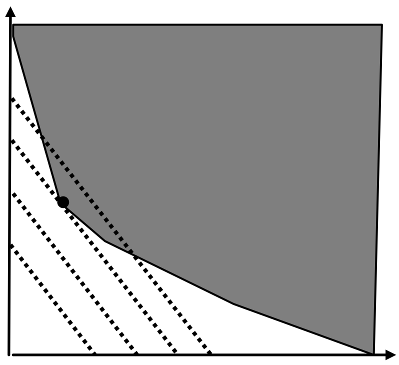
Ração de custo mínimo e ração de lucro máximo

Qualquer combinação dos produtos A e B pertencentes ao polígono acima de todas as restrições satisfaz o requisito nutricional mínimo; as combinações sobre uma determinada linha. Observe que os ingredientes A e B comportam-se como substitutos perfeitos em relação a cada um dos nutrientes.

Introduzindo linhas de isocusto (pontilhadas), encontramos a combinação de produtos que gera a ração de menor custo: é a intersecção da linha de isocusto de mais baixo valor com o conjunto de combinações tecnicamente factíveis, indicada no gráfico pelo ponto.

A ração por animal por semana que minimiza o custo é composta por 5 kg do ingrediente A e 1 kg do ingrediente B. Com tal composição, atinge-se a requisição mínima dos nutrientes 1 e 3, havendo um pequeno excesso dos nutrientes 2 e 4. O custo por kg da ração será C = $ 3 / kg . 5 kg + $ 4 /kg . 1 kg = $ 19 / kg. (Como se chega a esse resultado? Como você resolveria o problema?)

Essa ração maximiza o lucro? Não sabemos, pois o objetivo deste problema é manter o animal vivo ao menor custo possível. Observe que nem a quantidade produzida, nem o preço do produto entraram no problema. O **custo mínimo para manter o animal vivo** pode não coincidir com o **custo correspondente ao lucro máximo**.



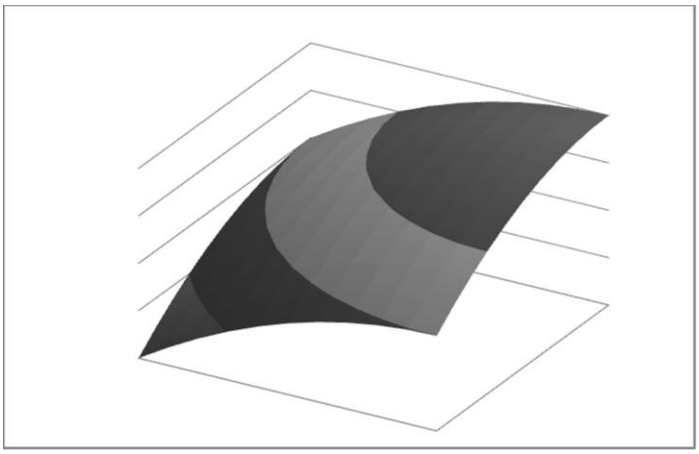
Otimização condicionada a restrições

Para termos uma noção intuitiva de problemas de otimização sujeita a uma ou mais restrições, vamos fazer um experimento mental. O qwerty é um pequeno animal imaginário criado em uma gaiola com base de 1m x 1m. O animalzinho gosta de dormir aquecido e, como algumas cobras, percebe o calor no meio ambiente. Há, em um dos cantos da gaiola, uma fonte de calor. Contudo, o qwerty não pode se aninhar nesse canto, pois seus movimentos são restringidos por uma grade colocada na gaiola. O problema do querty é encontrar, dentro do espaço que lhe é dado, o ponto mais agradável para uma soneca, isto é, aquele que tem a maior temperatura.

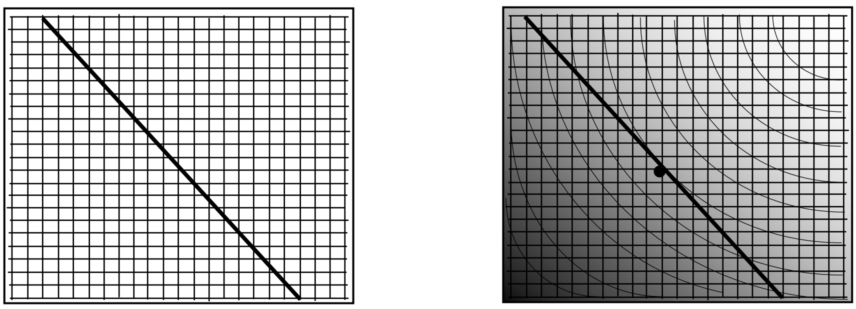
Se representarmos a gaiola em um plano cartesiano, os vértices seriam os pontos (0 , 0); (0 , 1); (1 , 0); e (1 , 1). Neste último está localizada a fonte de calor. Suponha que a temperatura de um ponto seja proporcional ao quadrado de sua distância em relação à fonte de calor (1 , 1):

$T_{(x\,,\,y)} = T_0 - \sigma[(1 - x)^2 + (1 - y)^2]$

em que $T_{(a\,,\,b)}$ é a temperatura no ponto (a , b), T_0 é a temperatura na superfície da fonte de calor, x é a coordenada do ponto no eixo das abscissas, e y, no eixo das ordenadas; σ é uma constante, cuja unidade de medida é graus / m^2 (o que permite "converter" distância em temperatura). O Gráfico representa a temperatura em cada ponto da base da gaiola como função de sua posição.



O diagrama abaixo representa a base da gaiola, com a barreira que restringe a movimentação do qwerty. Do lado esquerdo, está o modo como um humano vê; do lado direito, está a visão do qwerty, que é sensível à temperatura (imagine que ele enxergue a radiação infra vermelha): quanto mais claro o ponto, maior sua temperatura. Os arcos são isotermas, ou seja, conjuntos de pontos que tem a mesma temperatura.



O ponto preto assinala o local escolhido pelo qwerty. Como não temos a visão do qwerty, se quisermos prever qual será sua escolha precisamos identificar alguma propriedade da escolha ótima. O ponto escolhido satisfaz duas condições: (i) ele pertence ao espaço em que o qwerty pode se movimentar, isto é, a escolha obedece a restrição imposta, e (ii) ele é o ponto de maior temperatura do pedaço da gaiola delimitado pela barreira. Não existe nenhum outro ponto acessível que tenha temperatura maior que o ponto escolhido. Nesse ponto**, a isoterma** que passa por ele **é tangente à restrição** ao movimento do qwerty.

Ao longo de uma isoterma, a temperatura é constante. Assim, para permanecer em uma mesma isoterma, os deslocamentos devem ser de tal ordem que os aumentos de temperatura causados pela aproximação da fonte de calor na direção do eixo x (ordenadas) sejam compensados por reduções de temperatura provocadas pelo afastamento da fonte de calor na direção do eixo y (abscissas). O Diferencial

$T_0 - [(1 - x)^2 + (1 - y)^2] = c$

$DT = \partial T/\partial x \, dx + \partial T/\partial y \, dy = 0$

$\partial T/\partial x \, dx = - \partial T/\partial y \, dy$

$\partial T/\partial x \, / \, \partial T/\partial y = - dy \, / \, dx$ [5]

A barreira, por sua vez, pode ser representada como uma função linear:

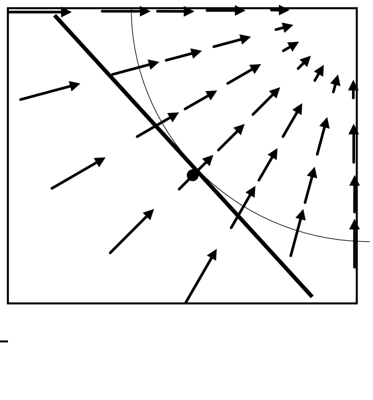
$\alpha x + \beta y = k$

$y = k/\beta - \alpha/\beta \, x$

A inclinação da barreira é $- \alpha/\beta$. Por outro lado, a inclinação da reta tangente à isoterma em determinado ponto é dada por $- \partial T/\partial x \, / \, \partial T/\partial y$, calculado nesse ponto. Então, se no ponto ótimo a isoterma e a barreira são tangentes, elas tem, nesse ponto, a mesma inclinação:

$$\boldsymbol{- \partial T/\partial x \, / \, \partial T/\partial y = - \alpha/\beta}$$

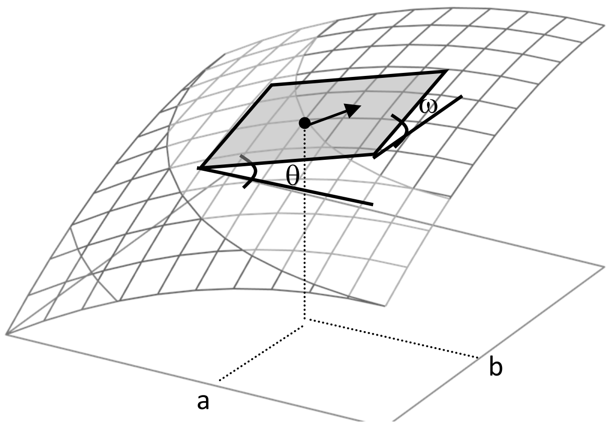
Vamos propor uma nova representação da gaiola, que associa a cada ponto uma direção e uma intensidade, representadas respectivamente pela orientação e pelo comprimento da seta associada a esse ponto. A direção é a em que ocorre o maior ganho de temperatura; a intensidade corresponde ao ganho de temperatura. Quanto mais distante da fonte de calor, maior é o aumento de temperatura associado a uma nova aproximação da fonte. Por isso, as setas tornam-se mais curtas à medida que se aproximam da fonte de calor.



[5] Teorema da Função Implícita

No ponto escolhido, **a direção em que a temperatura cresce mais intensamente é perpendicular à restrição** (barreira) **e à reta tangente à isoterma**.

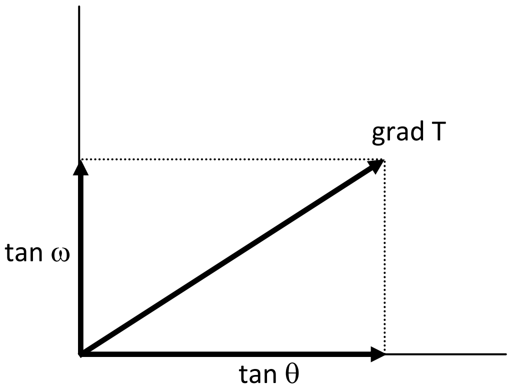
Vamos interpretar esse resultado. A derivada parcial ∂T/∂x informa o quanto a temperatura cresce quando nos aproximamos da fonte de calor, movimentando-nos na direção do eixo x. Seu valor corresponde à tangente do ângulo θ na figura abaixo. Note que o ângulo θ é a inclinação do plano tangente ao ponto T (a,b) na direção do eixo x. De modo semelhante, a derivada parcial ∂T/∂y é a tangente do ângulo ω e informa a taxa de crescimento da função temperatura no ponto (a , b) na direção do eixo y.



A seta que sai do ponto (a , b) representa o vetor gradiente da função T nesse ponto, e é dado por

$$\nabla T = grad\, T = \frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial T}{\partial y} j$$
$$\nabla T = \tan\theta \;\; i + \tan\omega \;\; j$$

... em que i e j são os vetores unitários (1 , 0) e (0 , 1) respectivamente



Se f é diferenciável no ponto (a,b) e grad f(a,b)≠0 então:

a) A direção de grad f(a,b) é:

- Perpendicular ao contorno de f que passa por (a,b)
- Paralelo à direção de f crescente

b) O módulo do gradiente é a taxa de variação máxima de f no ponto.