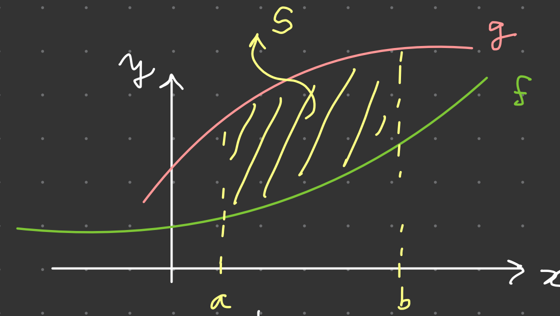
Área entre gráficos de funções

Teo. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis com $f(x) \leq g(x)$ $x \in [a,b]$.
Então a região $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ é mensurável
e $a(S) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$.



dem. Suponha a princípio f e g não negativas.

Se
$$G = \{(x,y) : x \in [a,b]\ \ 0 \leq y \leq g(x)\}$$
$$F = \{(x,y) : x \in [a,b]\ \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$
$\Rightarrow$ $a(G) = \int_a^b g(x)\,dx$ e $a(F) = \int_a^b f(x)\,dx$.

$\therefore$ $S = G - F \rightsquigarrow S$ mensurável e $a(S) = a(G) - a(F)$,

$$\therefore\ a(S) = \int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

Se f e g não são não negativas, podemos escolher $c \in \mathbb{R}$ tq.

$f(x)+c$ e $g(x)+c$ é não negativo (aqui usamos que f e g são ltdas).

$$\therefore \quad 0 \leq f(x)+c \leq g(x)+c \rightsquigarrow \quad G_c = \{(x,y) \,.\, x \in [a,b] \quad 0 \leq y \leq g(x)+c\}$$

$$F_c = \{(x,y) \,.\, x \in [a,b] \quad 0 \leq y \leq f(x)+c\}$$

$S_c = G_c - F_c$ é mensurável e

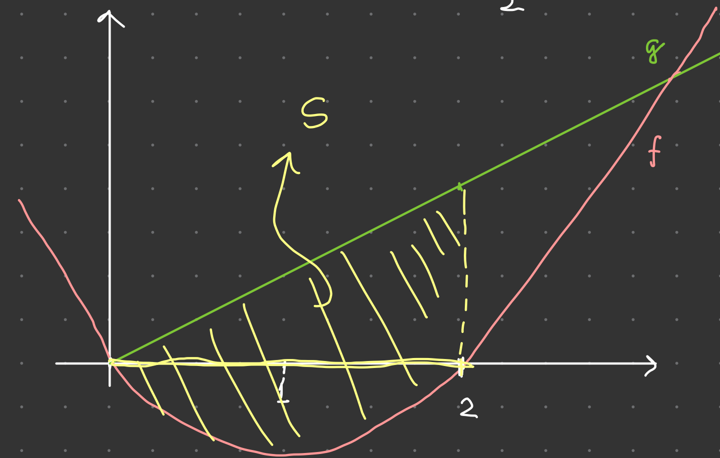
$$a(S_c) = a(G_c) - a(F_c) = \int_a^b \{g(x)+c\}\,dx - \int_a^b \{f(x)+c\}\,dx$$

$$= \int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx.$$

S_c é uma translação de S $\rightsquigarrow$ $a(S_c) = a(S)$. ▨

$$S_c = \{(x,y) : x \in [a,b] \text{ e } f(x)+c \leq y \leq g(x)+c\}$$

Exemplos: 1) Calcule a área delimitada por $f(x) = x(x-2)$ e $g(x) = \frac{x}{2}$, $x \in [0,2]$.



$$a(S) = \int_0^2 \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

$$= \int_0^2 \left\{ \frac{x}{2} - x^2 + 2x \right\} dx$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^2 x\,dx - \int_0^2 x^2\,dx.$$

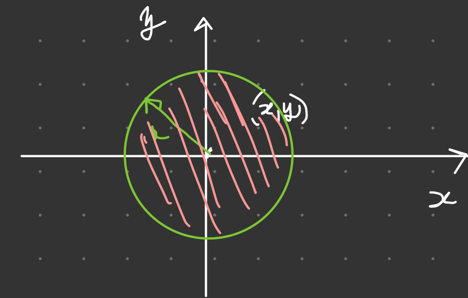
$$= \frac{5}{2}\,\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}.$$

$\blacksquare$

2) Área do disco

$$D_r = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2 \}$$ Disco de raio $r > 0$.

$$\text{dist}((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2} \leq r$$



$$D_r = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-r,r] \, , \, -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2} \}$$

Note que D_r é mensurável pois é a região delimitada pelo gráfico de funções monótonas por partes.

$$\therefore \; a(D_r) = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \, dx .$$

Se $r = 1 \rightsquigarrow a(D_1) = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, dx$.

↑ área disco unitário.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ak}^{bk} f\left(\frac{x}{k}\right)dx \qquad k \neq 0$$

$$a(D_r) = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 2r\int_{-r}^{r}\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,dx = 2r^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= r^2\, a(D_1). \qquad \therefore \quad a(D_r) = \pi r^2.$$

Definição: $\quad a(D_1) = \pi$.

Teo. Sejam $a,b \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $f(x) = x^{1/n}$, $x \in [a,b]$ é integrável com $\int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{b^{\frac{n+1}{n}} - a^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}}$.

dem. Observe que f possui inversa $g(x) = x^n$ pois $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

$g(x)$ é crescente, logo temos que f é crescente. Suponha que não,

se $x > y$ e $f(x) < f(y)$, temos $x = g(f(x)) < g(f(y)) = y$ $\lightning$.

$\therefore$ $f(x) \geq f(y)$ sempre que $x > y$. $\Longrightarrow$ f é integrável

Spg. $a = 0$ $\qquad y(x) = x^{1/n} \qquad x(y) = y^n$

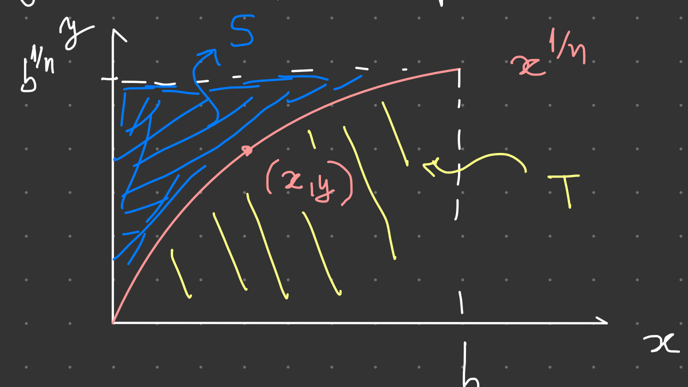
Exercício

$a > 0$

$T = \{(x,y) \; x \in [0,b] \; 0 \leq y \leq x^{1/n}\}$

$S = \{(x,y) : y \in [0, b^{1/n}] \; 0 \leq x \leq y^n\}$

$a(T) = b\, b^{1/n} - a(S)$.



$$a(S) = \int_0^{b^{1/n}} y^n \, dy = \frac{b^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}$$

$$\therefore \quad a(T) = b^{\frac{n+1}{n}} - \frac{b^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} = \frac{n\, b^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} = \frac{b^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad \blacksquare$$

$$\int_a^b = \int_a^0 + \int_0^b$$

$$- \int_0^a$$