

FATORAÇÕES LU

① ELIMINAÇÃO DE GAUSS SEM TROCAS DE LINHAS

DEF: SEJA UMA MATRIZ QUADRADA DE ORDEM n . A SUBMATRIZ PRINCIPAL DOMINANTE DE ORDEM k , $1 \leq k \leq n$, É A MATRIZ QUADRADA DE ORDEM k A_k FORMADA PELOS ELEMENTOS

$$(A_k)_{ii} = a_{ii}, \quad 1 \leq i \leq k$$

O MINOR PRINCIPAL DOMINANTE DE ORDEM k , $1 \leq k \leq n$, É O DETERMINANTE DE A_k .

TEOREMA 1: SEJA A UMA MATRIZ $n \times n$. ENTÃO É POSSÍVEL TRIANGULARIZAR A PELO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS, SEM TROCAS DE LINHAS, SE E SOMENTE SE TODOS OS MENORES PRINCIPAIS DOMINANTES DE A SÃO NÃO NULOS.

DEM (EXERCÍCIO)

EXEMPLOS

- 1) MATRIZES DIAGONAIS DOMINANTES INVERSÍVEIS
- 2) MATRIZES ESTRITAMENTE DIAGONAIS DOMINANTES
- 3) MATRIZES SIMÉTRICAS DEFINIDAS POSITIVAS

SUPONHA ENTÃO QUE A MATRIZ A $n \times n$ SATISFAZ AS CONDIÇÕES DO TEOREMA 1. AS ETAPAS DO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS PODEM SER DESCRITAS MATRICIALMENTE COMO:

(VAMOS CONSIDERAR SOMENTE A MATRIZ A E NÃO A MATRIZ AUMENTADA)

1ª ETAPA:

$$A^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -m_{21} & 1 & & \\ -m_{31} & & 1 & \\ \vdots & 0 & & \ddots \\ -m_{n1} & & & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} \cdot A$$

ONDE m_{i1} , $2 \leq i \leq n$, SÃO OS MULTIPLICADORES

2ª ETAPA

$$A^{(2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -m_{32} & 1 & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \\ 0 & -m_{n2} & & 1 \end{bmatrix}}_{L_2} \cdot A^{(1)}$$

K-ÉSIMA ETAPA : $A^{(k)} = L_k A^{(k-1)}$ ONDE

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & -m_{k+1,k} & & 1 & \\ & \vdots & 0 & & \ddots \\ & -m_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

PORTANTO, TEMOS

$$U = A^{(n-1)} = L_{n-1} \cdots L_k \cdots L_1 \cdot A$$

Logo,

$$A = (L_{n-1} \cdots L_k \cdots L_1)^{-1} U = \underbrace{L_1^{-1} \cdots L_k^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_L \cdot U$$

EXERCÍCIO

$$(a) \quad L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & m_{kn,k} & & 1 \\ & \vdots & 0 & \ddots \\ m_{nk} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ m_{n1} & m_{n2} & & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}}_L$$

TEOREMA 2 SEJA A UMA MATRIZ QUADRADA. ENTÃO A PODE SER TRIANGULARIZADA PELO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS, SEM TROÇAS DE LINHAS, SE E SOMENTE SE EXISTIREM

- UMA ÚNICA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR U COM ELEMENTOS DIAGONAIS NÃO NULOS
- UMA ÚNICA MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR L COM ELEMENTOS DIAGONAIS IGUAIS A 1

TAIS QUE $\boxed{A = L \cdot U}$ (DECOMPOSIÇÃO OU FATORAÇÃO LU)

UMA VEZ OBTIDA A FATORAÇÃO LU DE A (PELO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS OU POR OUTRO ALGORITMO), PODAMOS RESOLVER UM SISTEMA LINEAR $Ax = b$ DA SEGUINTE FORMA:

$$Ax = b$$

$$L(Ux) = b$$

d É O LADO DIREITO MODIFICADO

$$\begin{cases} L \cdot d = b & (\text{OBTENHA } d \text{ POR SUBSTITUIÇÕES PROGRESSIVAS}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U \cdot x = d & (\text{OBTENHA } x \text{ POR SUBSTITUIÇÕES REGRESSIVAS}) \end{cases}$$

EXEMPLO VAMOS REFATER O EXEMPLO DA AULA PASSADA

⋮

E QUANDO É NECESSÁRIO TROCAS DE LINHAS?

- A MATRIZ DE PERMUTAÇÃO ELEMENTAR P_{ik} É A MATRIZ OBTIDA DA MATRIZ IDENTIDADE I PERMUTANDO-SE AS SUAS LINHAS i E k . DADA UMA MATRIZ B $n \times m$, O RESULTADO DE $P_{ik} \cdot B$ É A MATRIZ OBTIDA DE B PERMUTANDO-SE AS SUAS LINHAS i E k
- UMA MATRIZ DE PERMUTAÇÃO P É UMA MATRIZ OBTIDA DA MATRIZ IDENTIDADE PERMUTANDO-SE AS SUAS LINHAS. TODA MATRIZ DE PERMUTAÇÃO PODE SER ESCRITA COMO O PRODUTO DE MATRIZES DE PERMUTAÇÃO ELEMENTARES
- SE B É UMA MATRIZ $n \times m$, O RESULTADO DE $P \cdot B$ É A MATRIZ OBTIDA DE B COM AS LINHAS PERMUTADAS DE ACORDO COM AS PERMUTAÇÕES DAS LINHAS DA MATRIZ IDENTIDADE.

SUPONHA QUE A É UMA MATRIZ INVERSÍVEL. A SUA TRIANGULARIZAÇÃO PELO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS PODE SER DESCRITA COMO:

1ª ETAPA: $A^{(1)} = L_1 P_{1\pi_1} A$, ONDE $P_{1\pi_1}$ É A MATRIZ DE PERMUTAÇÃO ELEMENTAR ENTRE AS LINHAS 1 E $\pi_1 \geq 1$

2ª ETAPA: $A^{(2)} = L_2 P_{2\pi_2} A^{(1)}$, ONDE $P_{2\pi_2}$ É A MATRIZ DE PERMUTAÇÃO ELEMENTAR ENTRE AS LINHAS 2 E $\pi_2 \geq 2$

K-ÉSIMA ETAPA: $A^{(k)} = L_k P_{k\pi_k} A^{(k-1)}$, ONDE $P_{k\pi_k}$ É A MATRIZ DE PERMUTAÇÃO ELEMENTAR ENTRE AS LINHAS k E $\pi_k \geq k$
:

LOGO, TENOS

$$U = A^{(n-1)} = L_{n-1} P_{n-1, \pi_{n-1}} \cdots L_k P_{k\pi_k} \cdots L_1 P_{1\pi_1} A$$

COMO $\pi_i \geq i$, PODE-SE MOSTRAR QUE $P_{i\pi_i}$ COMUTA COM L_k PARA TODO $k < i$, O QUE NOS DÁ

$$U = L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 \underbrace{P_{n-1, \pi_{n-1}} P_{n-2, \pi_{n-2}} \cdots P_{1, \pi_1}}_P A$$

P (MATRIZ DE PERMUTAÇÃO)

E PORTANTO $LU = PA$

TEOREMA 3 SEJA A UMA MATRIZ QUADRADA. ENTÃO A É INVERSÍVEL SE E SOMENTE SE EXISTIREM

- UMA MATRIZ DE PERMUTAÇÃO P
- UMA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR U COM ELEMENTOS DIAGONAIS NÃO NULOS
- UMA MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR L COM ELEMENTOS DIAGONAIS IGUAIS A 1

TAIS QUE $PA = LU$

SE CONHECERMOS A DECOMPOSIÇÃO $PA = LU$ DE UMA MATRIZ A , PODEMOS RESOLVER UM SISTEMA LINEAR $Ax = b$ DA SEGUINTE FORMA:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \underbrace{PA}x &= Pb \quad (\text{PERMUTE AS ENTRADAS DE } b) \\ \underbrace{LU}x &= Pb \\ \begin{cases} Ld = Pb & (\text{MODIFICAÇÃO DO LADO DIREITO}) \\ Ux = d & (\text{SOLUÇÃO}) \end{cases} \end{aligned}$$

PENSE EM COMO IMPLEMENTAR UMA DECOMPOSIÇÃO $PA = LU$

EXEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -9 & 12 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b; \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 51 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad LUx = b; \quad \begin{cases} L \cdot d = b \\ Ux = d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L \cdot d = b: \quad d_1 &= 20 \Rightarrow d_1 = 20 \\ 2d_1 + d_2 &= 51 \Rightarrow d_2 = 51 - 2 \cdot 20 = 11 \\ -\frac{5}{3}d_1 + \frac{2}{3}d_2 + d_3 &= 1 \Rightarrow d_3 = 1 + \frac{5}{3} \cdot 20 - \frac{2}{3} \cdot 11 = 27 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 27 \end{bmatrix}$$

"JÁ FIZEMOS"

$$\begin{aligned} Ux = d \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ -5x_2 + 2x_3 = 11 \\ 9x_3 = 27 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ALGORITMOS P/ A RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS TRIANGULARES:

$$\begin{aligned} L \cdot d = b: \quad d_1 &= b_1 \\ \text{PARA } i &= 2, \dots, n \\ d_i &= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_j \\ \text{FIM} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \cdot x = d: \quad x_n &= d_n / u_{nn} \\ \text{PARA } i &= n-1, \dots, 1 \text{ (PASSO - 1)} \\ x_i &= (d_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j) / u_{ii} \\ \text{FIM} \end{aligned}$$

ASSUMINDO A EXISTÊNCIA DA FATORAÇÃO LU DE A ,
ENTÃO PODEMOS OBTER OS COEFICIENTES DE L E DE U SEM
FAZER MENÇÃO AO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS.

$$A = LU \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj}$$

L É TRIANG. INFERIOR $\Rightarrow l_{ik} = 0$ SE $k > i$

U É TRIANG. SUPERIOR $\Rightarrow u_{ki} = 0$ SE $k > i$

$$\Downarrow \text{min}(i,i) \\ a_{ij} = \sum_{k=1} l_{ik} u_{kj}$$

$$\downarrow^1 \\ i=1 \quad a_{1j} = l_{11} u_{1j} \Rightarrow u_{1j} = a_{1j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

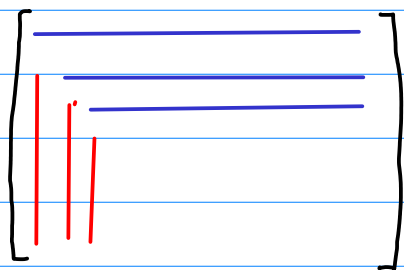
$$i=1, i \geq 2: a_{i1} = l_{i1} u_{11} \Rightarrow l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, \quad 2 \leq i \leq n$$

$$i=2, i \geq 2: a_{2j} = l_{21} u_{1j} + u_{2j} \Rightarrow u_{2j} = a_{2j} - l_{21} u_{1j}, \quad 2 \leq j \leq n$$

$$i=2, i \geq 3: a_{i2} = l_{i1} u_{12} + l_{i2} u_{22} \Rightarrow l_{i2} = (a_{i2} - l_{i1} u_{12})/u_{22}, \quad 3 \leq i \leq n$$

$$\vdots \\ i=n, i \geq n: u_{ni} = a_{ni} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{ki}$$

$$i=n, i \geq n+1: l_{in} = (a_{in} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{ik} u_{kn})/u_{nn}$$



U
 L

ALGUMAS MATRIZES IMPORTANTES

1) UMA MATRIZ A É DIAGONAL DOMINANTE SE, PARA CADA LINHA $i=1, 2, \dots, n$, TIVERMOS

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n |a_{is}|$$

OBS: HÁ MANEIRAS INDIRETAS PARA SE DETERMINAR SE UMA MATRIZ DIAG. DOM. É INVERSÍVEL

2) UMA MATRIZ É ESTRITAMENTE DIAGONAL DOMINANTE SE, PARA CADA LINHA $i=1, \dots, n$, TIVERMOS

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n |a_{is}|$$

OBS SE A É ESTRITAMENTE DIAG. DOM., ENTÃO ELA É INVERSÍVEL

3) DIZEMOS QUE UMA MATRIZ A É SIMÉTRICA DEFINIDA POSITIVA (S.D.P.) SE

$$(i) a_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (A \text{ É SIMÉTRICA})$$

$$(ii) x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0$$

OBS SE A É S.D.P., ENTÃO OS SEUS MENORES PRINCIPAIS DOMINANTES SÃO POSITIVOS

Obs: $x^T A x = x^T \cdot (Ax)$: PRODUTO ESCALAR DE x POR Ax

$x, y \in \mathbb{R}^n$ (VETORES COLUNA)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \underbrace{\langle x_i, y_i \rangle}_{\substack{\text{PRODUTO ESCALAR} \\ \text{DO } \mathbb{R}^n}}$$