Funções monótonas

Teo Seja $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ monótona Então f é integrável

Def. $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ dizemos que f é uma função crescente se $x>y$ então $f(x)\geq f(y)$ (se $f(x)>f(y)$ dizemos que f é estritamente crescente).

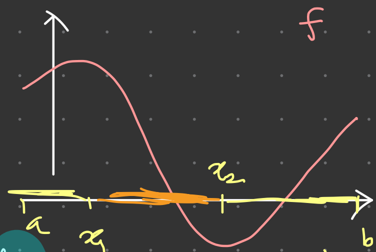
Def. $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ é decrescente se $x>y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$.

Se $f(x)<f(y)$, dizemos que f é estritamente decrescente

As funções acima são também chamadas de monótonas

Def Dizemos $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ é monótona por partes se existe uma partição de $[a,b]$ tal que em cada subintervalo desta partição temos f monótona

(x_{i-1}, x_i) subintervalos

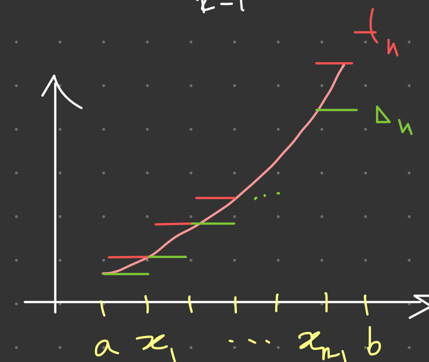


$$\int_a^b f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \int_{x_2}^b f$$

$$P=\{a=x_0, x_1,\dots,x_n=b\} \text{ com } x_0<x_1<\dots<x_n.$$

Lema. $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ crescente e $x_k = a + k\frac{(b-a)}{n}$ com $k=1,2,\dots,n$.

Se $I\in\mathbb{R}$ satisfaz
$$\frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \le I \le \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$
$\forall n\in\mathbb{N}$, então
$$\int_a^b f(x)\,dx = I.$$



dem. Se s_n e t_n são as seguintes funções escadas:

$$s_n(x) = f(x_{k-1}) \qquad x\in(x_{k-1},x_k)$$
$$t_n(x) = f(x_k)$$

Note que

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\frac{(b-a)}{n} = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$
$$\int_a^b t_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{(b-a)}{n} = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

$$\therefore \quad \int_a^b s_n(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b t_n(x)\,dx$$

Como f crescente, logo monótona, é integrável $\exists \int_a^b f(x)\,dx$

Mas, temos $\int_a^b s_n(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b t_n(x)\,dx$.

$$0 \leq \left| I - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b \big(t_n(x) - s_n(x)\big)\,dx$$

$$\leq \frac{(b-a)}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \frac{(b-a)}{n}$$

$$\leq \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1}) \big) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\big(f(b) - f(a)\big) = \frac{C}{n} \quad \forall n$$

$$C = (b-a)(f(b) - f(a)) \qquad \therefore I = \int_a^b f \quad \blacksquare$$

OBS: Resultado análogo ao lema anterior pode ser provado assumindo f decrescente

Exemplo: $f(x) = x^p$, $x \geqslant 0$, p inteiro positivo $0 < b < +\infty$

f é monótona, logo é integrável $\int_0^b x^p dx = ?$

Note que $\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$ (Exercício 13 seção 4.10. Prova-se por indução)

$$\frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq \int_0^b x^p dx \leq \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$x_k = k \frac{b}{n}$

$k = 0, 1, \ldots, n$

$$\frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{kb}{n}\right)^p \leq \int_0^b x^p dx \leq \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kb}{n}\right)^p$$

$$\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^p \leq \int_0^b x^p\,dx \leq \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^p$$

$$\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\sum_{k=0}^{n-1}k^p \leq \int_0^b x^p\,dx \leq \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^p \leq \frac{n^{p+1}}{b^{p+1}}\int_0^b x^p\,dx \leq \sum_{k=1}^{n}k^p \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\frac{n^{p+1}}{p+1}\underbrace{\frac{p+1}{b^{p+1}}\int_0^b x^p\,dx}_{=1} \rightsquigarrow \int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n}k^p$$

Propriedades de integrais

$f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ integráveis, $c_1, c_2, \dots, c_n$ constantes.

$\boxed{a \leq b}$

(A) $$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(B) $$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

(C) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

i) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

ii) $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(D) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$0 = \int_a^a f = \int_a^b f + \int_b^a f$$

(E) Se $f \leq g$ em $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(F) $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ak}^{bk} f\left(\frac{x}{k}\right)dx \quad k \neq 0$$

Exemplo

$$\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1} \qquad p\in\mathbb{N} \quad b>0.$$

(i) $b<0$

$$\int_0^b x^p\,dx = -\int_0^{-b} (-x)^p\,dx = (-1)^{p+1}\int_0^{-b} x^p\,dx$$

$$= (-1)^{p+1}\,\frac{(-b)^{p+1}}{p+1} = \overset{1}{\cancel{(-1)^{2p+2}}}\,\frac{b^{p+1}}{p+1}$$

$$\therefore \int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1} \rightsquigarrow \int_b^0 x^p\,dx = -\frac{b^{p+1}}{p+1}.$$

(ii) $$\int_a^b x^p\,dx = \int_a^0 x^p\,dx + \int_0^b x^p\,dx$$

$$= -\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{p+1}}{p+1} = \frac{1}{p+1}\left(b^{p+1} - a^{p+1}\right).$$

(iii) $$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^n c_i x^i\right) dx = \sum_{i=0}^n \int_a^b c_i x^i \, dx = \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b x^i \, dx$$

$$= \sum_{i=0}^n c_i \left(\frac{b^{i+1}}{i+1} - \frac{a^{i+1}}{i+1} \right)$$

Exercício:

$$\int_{-1}^{2} \{x^3 - x + 1\} \, dx .$$