

SISTEMAS LINEARES

$$Ax = b$$

A : MATRIZ $n \times n$; $b \in \mathbb{R}^n$ — DADOS
 $x \in \mathbb{R}^n$ — INCÓGNITA

EM COMPONENTES:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

SISTEMA LINEAR

COM n EQUAÇÕES

E n INCÓGNITAS

- SE $\det(A) \neq 0$, O SISTEMA LINEAR TEM SOLUÇÃO E ELA É ÚNICA
(SISTEMA DETERMINADO)
- EM MUITAS APLICAÇÕES, É POSSÍVEL DETERMINAR INDIRETAMENTE QUE O DETERMINANTE DA MATRIZ É NÃO NULO

IREMOS SUPOR QUE $\det(A) \neq 0$. A SOLUÇÃO PODE SER CALCULADA PELA REGRA DE CRAMER:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

ONDE A_i É A MATRIZ OBTIDA DE A SUBSTITUINDO-SE A SUA COLUNA i PELO VETOR COLUNA b .

- PROBLEMA: MUITAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS ($O(n!)$)
POR EXEMPLO, PARA $n = 20$: $\sim 1.3 \times 10^{10}$ OPERAÇÕES

PREJUDICA A EFICIÊNCIA E AUMENTA A PROPAGAÇÃO DE ERROS DE ARREDONDAMENTO

NEM TODO SISTEMA LINEAR É COMPLICADO. EXEMPLOS:

1) MATRIZES DIAGONAIS

$$Dx = b; \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}; \quad d_i \neq 0$$

$$\text{SOLUÇÃO: } x_i = b_i/d_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

2) MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES

$$Ux = b; \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix}; \quad u_{ii} \neq 0$$

RESOLUÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO REGRESSIVA

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}; \quad \text{PARA } i = n-1, n-2, \dots, 1, \\ x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right) / u_{ii}$$

3) MATRIZES TRIANGULARES INFERIORES

$$Lx = b; \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

SUBSTITUIÇÃO PROGRESSIVA

$$x_1 = b_1/l_{11}; \quad \text{PARA } i = 2, \dots, n, \quad x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right) / l_{ii}$$

IDEIA: OBTER UM NOVO SISTEMA LINEAR CUJA SOLUÇÃO É A MESMA QUE A SOLUÇÃO DO SISTEMA ORIGINAL, E CUJA MATRIZ TEM UMA ESTRUTURA MAIS SIMPLES

NO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS, BUSCA-SE UM SISTEMA LINEAR $Ux = d$, CUJA MATRIZ É TRIANGULAR SUPERIOR. PARA ISTO, USAM-SE AS SEGUINTE PROPRIEDADES (VERIFIQUE COMO EXERCÍCIO)

(i) PERMUTAR DUAS LINHAS DE UM SISTEMA LINEAR NÃO MUDA A SUA SOLUÇÃO

(ii) SUBSTITUIR UMA LINHA DO SISTEMA LINEAR POR UMA COMBINAÇÃO LINEAR DELA COM OUTRA LINHA DO SISTEMA NÃO MUDA A SOLUÇÃO

OBS: PERMUTAR DUAS LINHAS DE UMA MATRIZ MUDA O SINAL DO SEU DETERMINANTE. SUBSTITUIR UMA LINHA DE UMA MATRIZ POR UMA COMBINAÇÃO LINEAR DELA COM OUTRA LINHA DA MATRIZ NÃO MUDA O SEU DETERMINANTE

NO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS, VAMOS APLICANDO AS TRANSFORMAÇÕES (i) E (ii) DE FORMA QUE, A CADA ETAPA, OS ELEMENTOS ABAIXO DA DIAGONAL SÃO ZERADOS. COMO HÁ MAIS DE UMA MANEIRA DE FAZER ESTE ESCALONAMENTO, IREMOS PADRONIZAR AS OPERAÇÕES CONFORME DESCRITO A SEGUIR. ASSUMIREMOS QUE $\det(A) \neq 0$.

FAÇA $A^{(0)} = \overbrace{[A \ b]}^{\text{MATRIZ AUMENTADA } n \times n+1}$ SE $a_{11}^{(0)} = 0$, PERMUTE A LINHA 1 COM ALGUMA LINHA $i > 1$ TAL QUE $a_{i1}^{(0)} \neq 0$. ISTO SEMPRE É POSSÍVEL (POR QUE?)

PRIMEIRA ETAPA :

$a_{11}^{(0)}$ É O PIVÔ. DEFINA OS MULTIPLICADORES

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad 2 \leq i \leq n$$

SUBSTITUA A LINHA i POR ELA MENOS m_{i1} VÊZES A LINHA 1, PARA $2 \leq i \leq n$. CHAME A NOVA MATRIZ (AUMENTADA) DE $A^{(1)}$. NOTE QUE $a_{i1}^{(1)} = 0$, $2 \leq i \leq n$

SEGUNDA ETAPA: SE $a_{22}^{(1)} = 0$, PERMUTE A LINHA 2 COM ALGUMA LINHA $i > 2$ TAL QUE $a_{i2}^{(1)} \neq 0$. USE O MESMO NOME PARA A MATRIZ AUMENTADA. O PIVÔ AGORA É $a_{22}^{(1)}$. CALCULE OS MULTIPLICADORES

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad 3 \leq i \leq n.$$

SUBSTITUA A LINHA i POR ELA MENOS m_{i2} VÊZES A LINHA 2, $3 \leq i \leq n$. CHAME A NOVA MATRIZ DE $A^{(2)}$. NOTE QUE $a_{i2}^{(2)} = 0$, $3 \leq i \leq n$.

ETC ...

APÓS NO MÁXIMO $n-1$ ETAPAS, OBTENHAMOS UMA MATRIZ AUMENTADA REPRESENTANDO UM SISTEMA LINEAR

$$Ux = d$$

QUE TEM A MESMA SOLUÇÃO QUE O SISTEMA ORIGINAL E CUJA MATRIZ U É TRIANGULAR SUPERIOR. (d É O LADO DIREITO MODIFICADO)

EXEMPLOS: VER EXEMPLOS 2.1 E 2.2 DO LIVRO
"NOÇÕES DE CÁLCULO NUMÉRICO"

NÚMERO DE OPERAÇÕES ARITMÉTICAS
(ADIÇÕES, MULTIPLICAÇÕES E DIVISÕES)

"TRIANGULARIZAÇÃO" DA MATRIZ: $\frac{4n^3 + 3n^2 - 7n}{6}$ ($O(n^3)$)

RESOLUÇÃO DO SISTEMA TRIANGULAR: n^2 ($O(n^2)$)

TOTAL: $\frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$

PIVÔ

RASCUNHO

$$\begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ \cancel{a_{21}} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} & \tilde{b}_2 \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ \cancel{a_{41}} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} & \tilde{b}_4 \end{array} \right]$$

Modificadores

$$m_{21} = a_{21}/a_{11}$$

$$m_{31} = a_{31}/a_{11}$$

$$m_{41} = a_{41}/a_{11}$$

$$l_2 \rightarrow l_2 - m_{21} \times l_1 = l_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} l_1$$

$$l_3 \rightarrow l_3 - m_{31} \times l_1 = l_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} l_1$$

$$l_4 \rightarrow l_4 - m_{41} \times l_1 = l_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} l_1$$

— / —

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20$$

$$-5x_2 + 2x_3 = 11$$

$$9x_3 = 27$$

$$x_3 = \frac{27}{9} = 3; \quad x_2 = \frac{11 - 2x_3}{-5} = \frac{11 - 6}{-5} = -1$$

$$x_1 = \frac{20 + 2x_2 - 5x_3}{3} = \frac{20 - 2 - 15}{3} = 1$$

SOLUÇÃO: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

CURIOSIDADE (POR ENQUANTO)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{ENTÃO, } L \cdot U = A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -9 & 12 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_U = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ 6 & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -8 & 10 \end{pmatrix}}_{P.A}$$

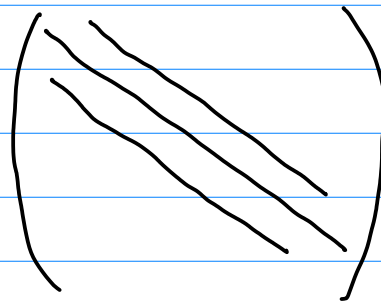
↳ PERMUTAÇÃO

— / —

LAPACK

— / —

BANDA



← TRIDIAGONAL