

Instituto de Física USP

Física V - Aula 05

Professora: Mazé Bechara

Aula 05 – Distribuições comuns aos constituintes de qualquer matéria na mecânica estatística clássica

1. A mecânica estatística clássica de Maxwell-Boltzmann - continuação

- v. **A distribuição de módulo de velocidades (Maxwelliana)** no equilíbrio termodinâmico (a partir da distribuição de velocidades).
- vi. **Conceito e cálculo de módulo de velocidade mais provável, módulo de velocidade menos provável, média do módulo e média do módulo ao quadrado.**
- vii. **A distribuição da energia cinética de um sistema qualquer na temperatura T (a partir da distribuição do módulo de velocidades). Energia cinética média, energia cinética mais provável e energia cinética menos provável.**
- viii. **Aplicação (com valores numéricos): gases da atmosfera a 300K, desprezando a interação com a gravidade terrestre.**

2. Medidas experimentais dos módulos de velocidade – a validação experimental direta da distribuição .

A distribuição (gaussiana) normalizada das velocidades para qualquer sistema *(discussão em aula)*

$$f(\vec{v}) = f(v_x, v_y, v_z) = A^3 e^{-\frac{mv_x^2}{kT}} A^3 e^{-\frac{mv_y^2}{kT}} A^3 e^{-\frac{mv_z^2}{kT}} = f(v_x) f(v_y) f(v_z)$$

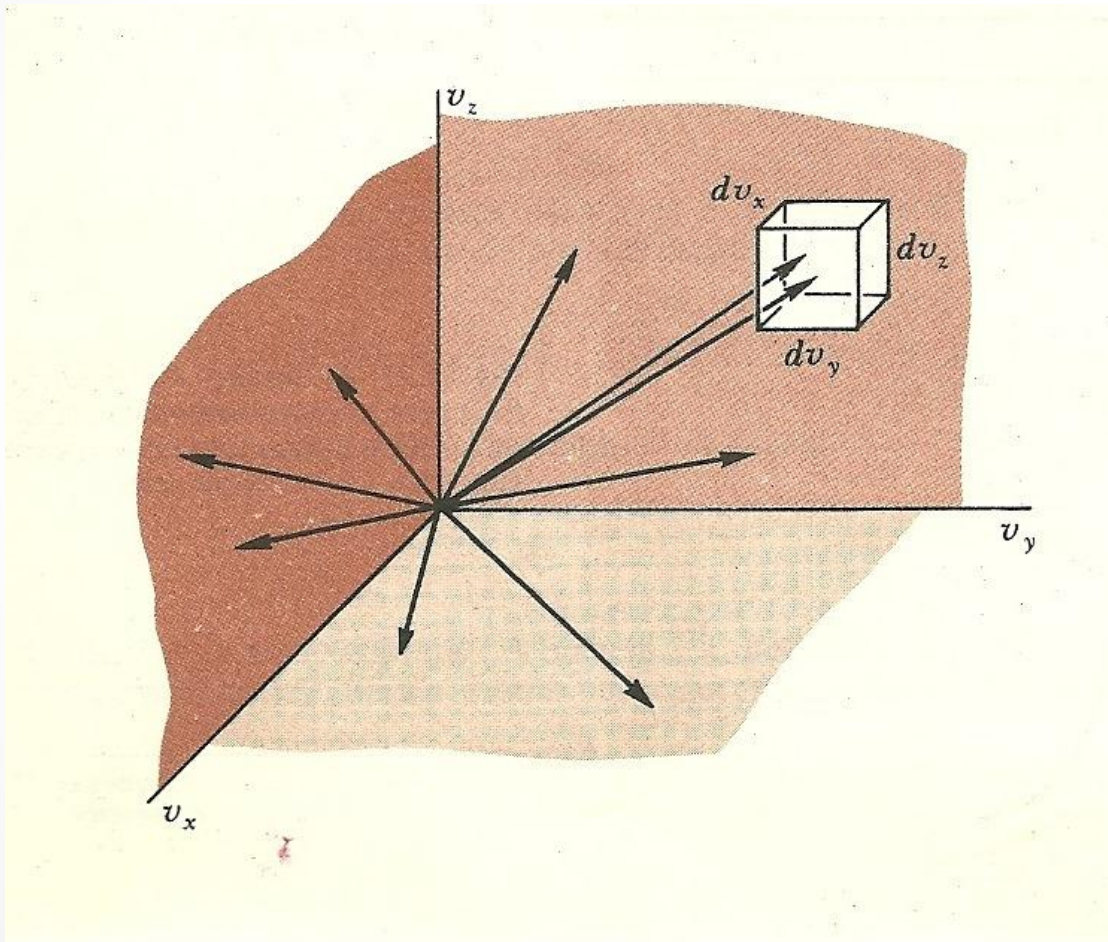
$$\iiint_{\text{todos } \vec{v}} f(v_x) f(v_y) f(v_z) dv_x dv_y dv_z = 1$$

$$f(\vec{v}) = \frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N dv_x dv_y dv_z} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}}$$

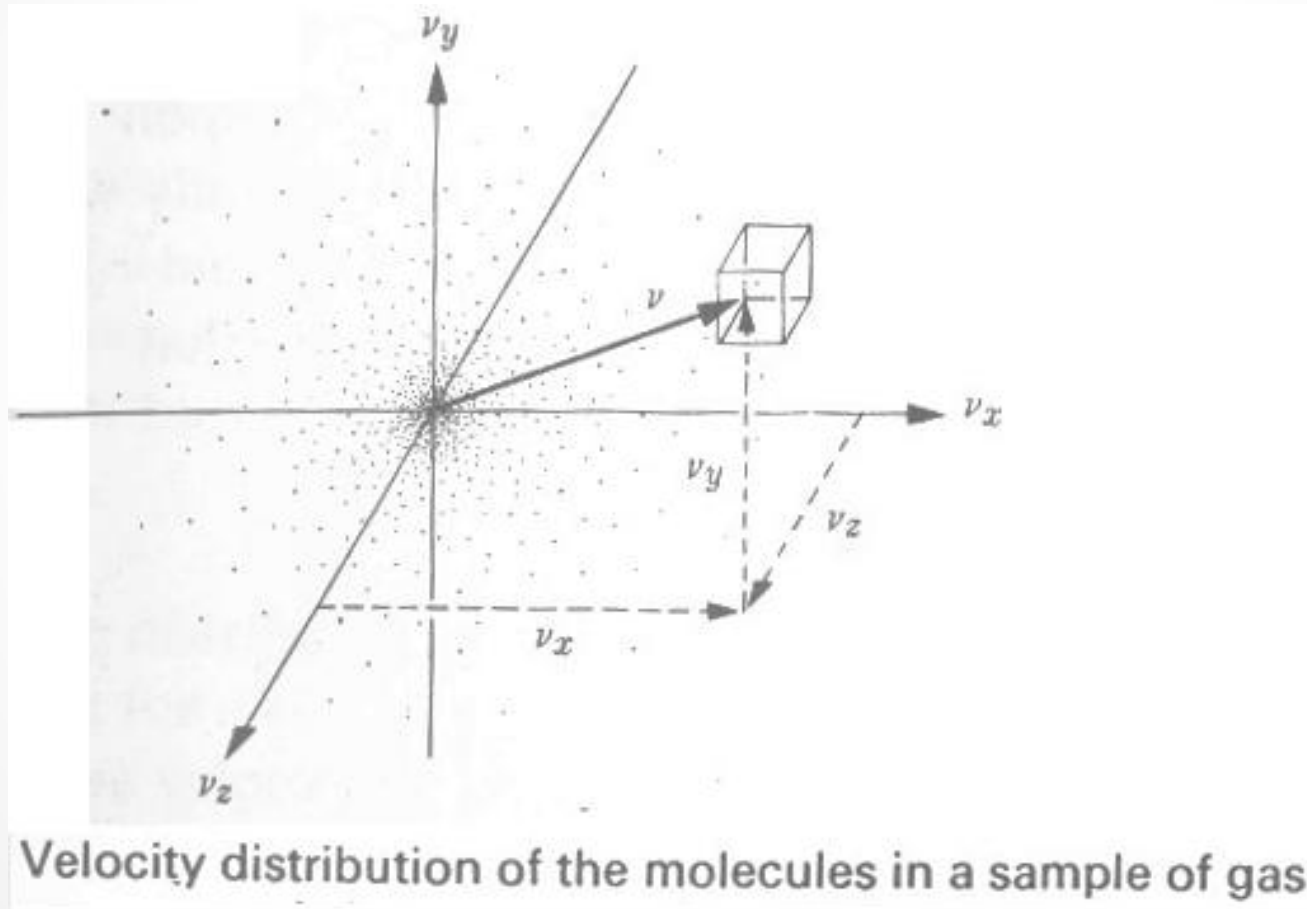
A distribuição de velocidades é a mesma para todos os sistemas e independe das outras variáveis da energia dos constituintes, em particular das variáveis espaciais e da existência de forças externas.

Isto não ocorre na Física Quântica – aguarde!!

Uma representação do espaço das velocidades (variável contínua)



Representação da distribuição de velocidades de um sistema qualquer de muitas partículas na temperatura T



Nesta representação a densidade de pontos é proporcional ao valor da distribuição

Representação geométrica: fração de partículas com mesmo módulo de velocidades dentro de dv

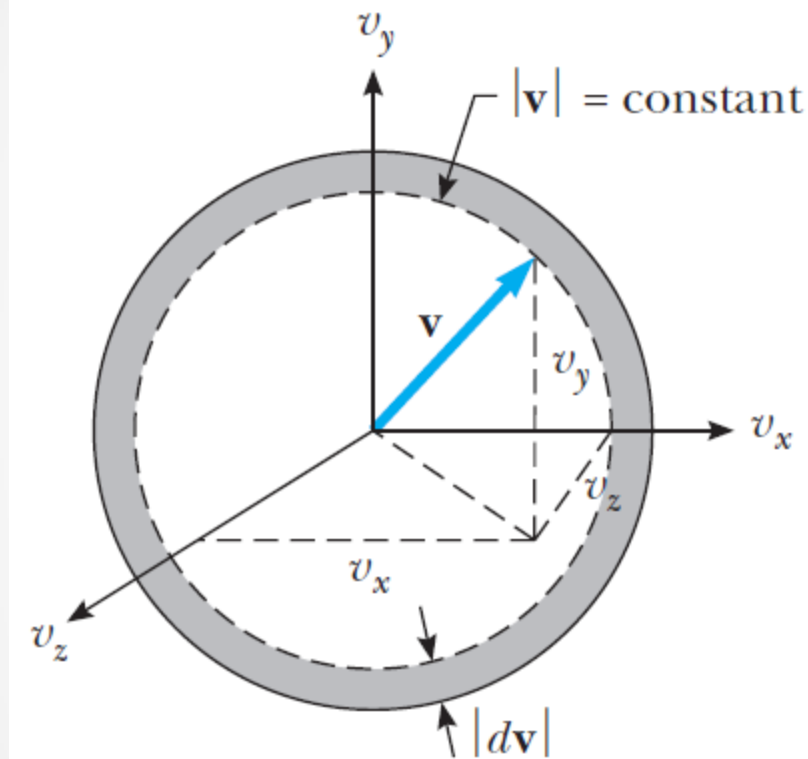


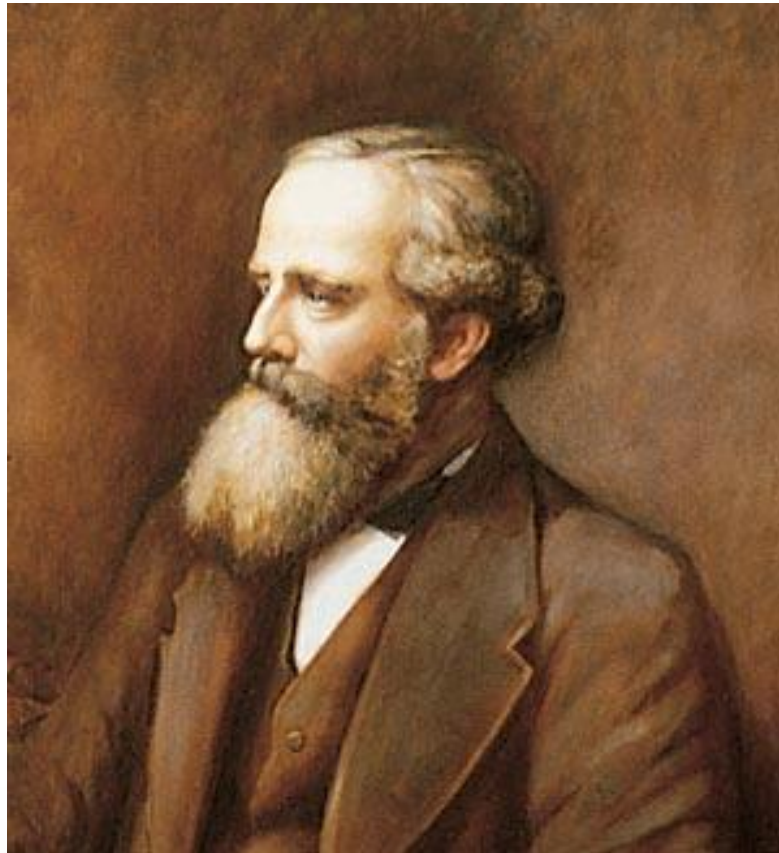
Figure 10.5 Velocity space. The number of states with speeds between v and $v + dv$ is proportional to the volume of a spherical shell with radius v and thickness dv .

A distribuição (maxwelliana) de módulos de velocidades **demonstração em aula**

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m(v^2)}{2kT}}$$

Veja que pelo teorema de Boltzmann a distribuição de módulo de velocidades é a mesma para todos os sistemas. Independem das outras variáveis da energia dos constituintes.

James Clerk Maxwell (1831 –1879) *físico e matemático escocês.*



Integrais úteis

É divertido e instrutivo mostrar I_0 e I_1 , e a partir dessas duas integrais determinar todas as demais, já que:

$$I_{n+2} = -\frac{dI_n}{d\lambda} \quad , \text{ sendo: } I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x^2} dx$$

n	I_n	n	I_n
0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$	3	$\frac{1}{2\lambda^2}$
1	$\frac{1}{2\lambda}$	4	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^5}}$
2	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}$		

Resultados relevantes a partir da distribuição normalizada do módulo das velocidades *(Refaça os cálculos)*

- O módulo de velocidade mais provável

$$v_{+p} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

- O módulo de velocidade menos provável:

$$v_{-p} = 0$$

- A média do módulo da velocidade:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v \times f(v) dv = \int_0^{\infty} v \times 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}} = \sqrt{2,546 \frac{kT}{m}}$$

- A média do quadrado do módulo da velocidade:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 \times f(v) dv = \int_0^{\infty} v^2 \times 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{3kT}{m}$$

A distribuição da energia cinética - FAÇA

$$f(\varepsilon_c) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \sqrt{\varepsilon_c} e^{-\frac{\varepsilon_c}{kT}}$$

- Obs. 1. A distribuição de energia cinética independe da massa dos constituintes. Depende só da temperatura;*
- 2. A distribuição de energia cinética é a mesma para todos os estados da matéria na mesma temperatura T!*

Resultados relevantes da distribuição de energia cinética (Refaça os cálculos)

- O valor mais provável da energia cinética:

$$\varepsilon_{c+p} = kT/2$$

- O valor menos provável da energia cinética:

$$\varepsilon_{c-p} = 0$$

- A média da energia cinética:

$$\langle \varepsilon_c \rangle = 3kT/2$$

VALORES NUMÉRAICOS DE CONSTANTES RELEVANTES – ordens de grandeza são essenciais!

- constante k de Boltzmann:
- $k=R/N_o=1,381 \times 10^{-23} \text{J/K}=8,617 \times 10^{-5} \text{eV/K}$
- Constante R dos gases perfeitos:
- $R=8,315 \text{J/mol.K}= 1,987 \text{cal/mol.K}$
- Constante de Avogadro N_o :
- $N_o=6,023 \times 10^{23} \text{ part/mol}$

Gráficos qualitativamente corretos

- 1. Eixos definidos: grandezas e unidades.**
- 2. Escalas proporcionalmente corretas.**
- 3. Áreas sob as curvas proporcionalmente corretas, no caso das distribuições.**

Aplicação – MEXA-SE!

Na atmosfera terrestre há moléculas de H_2 , O_2 entre outras. Despreze a interação com a gravidade terrestre.

a) Faça os gráficos, **qualitativamente corretos**, da distribuição da distribuição do módulo das velocidades e determine numericamente o módulo de velocidade mais provável, o módulo de velocidade menos provável e a média do módulo da velocidade de cada um dos gases na temperatura T .

b) **continua....na próxima aula, como aplicação numérica.**

Prepare-se para a discussão da aplicação completa, com enunciado na próxima transparência!

Aplicação – MEXA-SE!

Na atmosfera terrestre há moléculas de H_2 , O_2 entre outras. Despreze a interação com a gravidade terrestre.

a) Faça os gráficos, **qualitativamente corretos**, da distribuição do módulo das velocidades e determine numericamente o módulo de velocidade mais provável, o módulo de velocidade menos provável e a média do módulo da velocidade de cada um dos gases **a 300K**.

b) Esboce no mesmo gráfico a distribuição de módulos de caso do O_2 para a temperatura de **600K**.

c) Faça os gráficos da distribuição da distribuição normalizada de energia cinética, e determine em eV a energia cinética mais provável, a energia cinética menos provável e a energia cinética média de cada um dos gases da atmosfera acima citados, **a 300K**. Comente tendo em vista o resultado ao item anterior.

d) Esboce o gráfico das energias cinéticas de ambos os gases: H_2 , O_2

e) Qual destes resultados poderia ser arrogado para o fato de haver menos moléculas de H_2 , **do que de O_2 na atmosfera terrestre?**

f) E se for **levada em conta a interação** das moléculas com a gravidade terrestre, **os seus resultados mudariam?** Justifique.