Integrais superiores e inferiores

$f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ ltda

$$S = \left\{ \int_a^b s(x)\,dx \in \mathbb{R} : s(x) \leq f(x) \quad x \in [a,b] \right\}$$

↑ escada

$$T = \left\{ \int_a^b t(x)\,dx \in \mathbb{R} : t(x) \geq f(x) \quad x \in [a,b] \right\}$$

↑ escada

f ltda implica que

S e T são não-vazios

Def: sup S é chamado integral inferior de f e é denotada por $\underline{I}(f)$

inf T a integral superior denotada por $\overline{I}(f)$.

$$s(x) \leq f(x) \leq t(x)$$

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq \underbrace{\sup S}_{\underline{I}(f)} \leq \underbrace{\inf T}_{\overline{I}(f)} \leq \int_a^b t(x)\,dx \qquad (*)(*)$$

Teo. Toda função ltda $f:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ possui integrais inferior e superior satisfazendo $(*)(*)$

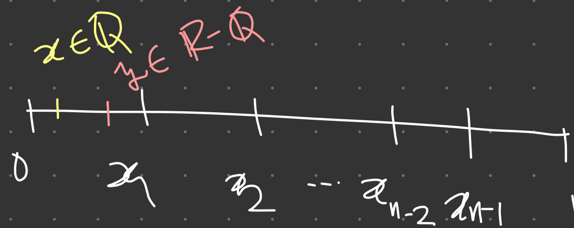
Além disso, f é integrável se só se

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemplos. 1) f é uma função escada, f é integrável

2) A função de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$

não é integrável pois se s e t são funções escadas satisfazendo $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$



$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$

temos que $s(x) \leq 0$ e $t(x) \geq 1$.

$\Rightarrow \underline{I}(f) \leq 0$ e $\overline{I}(f) \geq 1$ $\therefore$ f não é integrável.

Funções monótonas

Teo Seja $f: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ monótona. Então f é integrável

Def. $f: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ dizemos que f é uma função crescente se $x > y$ então $f(x) \geq f(y)$ (se $f(x) > f(y)$ dizemos que f é estritamente cresente

Exemplos:

1) $f(x) = x$, se $x > y \Longrightarrow f(x) > f(y)$

é estritamente crescente

2) $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ constante

$x > y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$

Def. $f:[a,b]\mapsto \mathbb{R}$ é decrescente se $x>y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$.

Se $f(x)<f(y)$, dizemos que f é estritamente decrescente

As funções acima são também chamadas de <u>monótonas</u>

Exemplos

3) $f(x)=x^p$ para $p\in\mathbb{N}$ é estritamente crescente se $x\geq 0$

Se $p=1 \rightsquigarrow f(x)=x$ que é estritamente crescente.

<u>H. Indução:</u> Suponha afirmação válida para $p=k$.

Vamos verificar que vale para $p=k+1$. Para isso seja $x>y\geq 0$.

$$f(x)=x^{k+1}=x^k\cdot x \overset{\text{H. de indução}}{>} y^k x > y^k y = y^{k+1} = f(y) \quad \blacksquare$$

Por indução se prova a afirmação do exemplo.

4) $f(x)=\sqrt{x}$, $x \geq 0$ também é estritamente crescente. De fato,

se $x > y \geq 0$ então $\sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$ pois

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x + \sqrt{x}\sqrt{y} - \sqrt{x}\sqrt{y} - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$= \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0$$ pois $x > y$

$\therefore \quad \sqrt{x} > \sqrt{y} \rightsquigarrow f(x) > f(y)$ $\blacksquare$

Def Dizemos $f: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ é monótona por parte se existe uma partição de $[a,b]$ tal que em cada subintervalo desta partição temos f monótona

(x_{i-1}, x_i) subintervalos

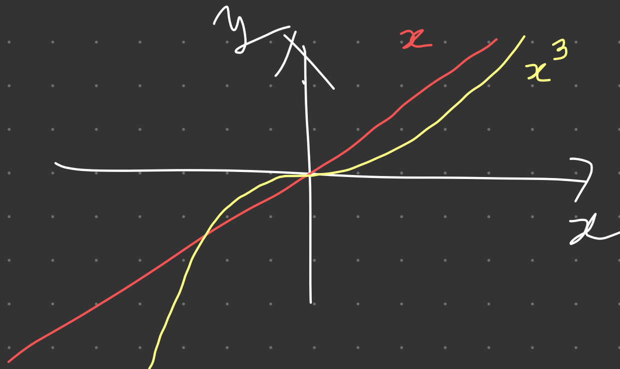
$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \text{ com } x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

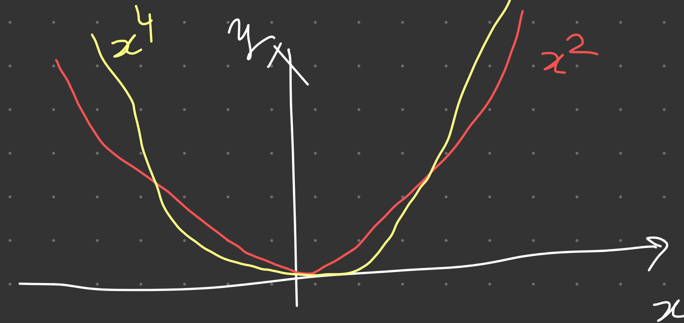
Exemplos 5) As funções escadas são monótonas por partes já que são funções constantes por partes.

Exercícios: 1) $f(x) = x^p$, $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ ímpar então f é crescente

Se p é par, então $f(x)$ em $(-\infty, 0]$ é decrescente.

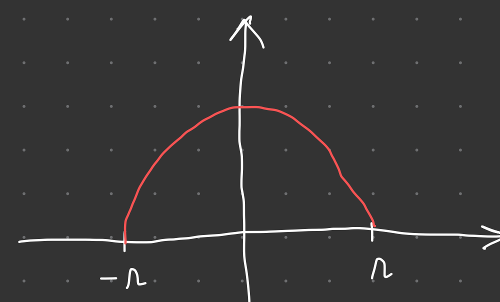
Logo f é monótona por partes se p é par.





2) $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $|x| \leq r$ é crescente se $-r \leq x \leq 0$

e decrescente se $r \geq x \geq 0$



Teo Seja $f:[a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ monótona. Então f é integrável

dem. $-\infty < a < b < +\infty$. Suponha f crescente

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \therefore f \text{ ltda}$$

e $\underline{I}(f)$ e $\overline{I}(f)$ existem. Temos que mostrar que $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.

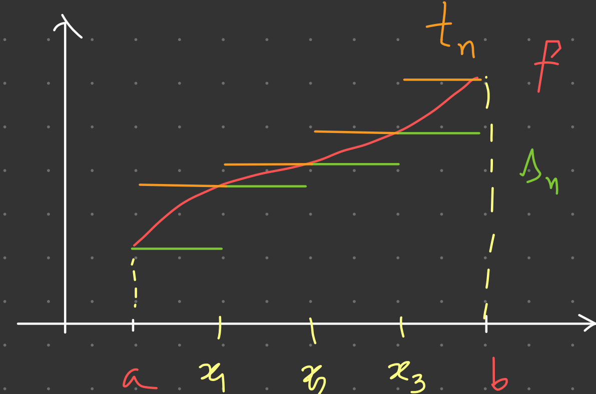
Seja P a seguinte partição de $[a,b]$

$$P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \text{ com}$$

$$x_i = x_{i-1} + \frac{(b-a)}{n}$$

Consideramos as funções escadas s_n e $t_n : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ dadas por

$$s_n(x) = f(x_{i-1})$$
$$t_n(x) = f(x_i) \qquad x \in (x_{i-1}, x_i)$$



$$s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$$

$$0 \leq \int_a^b \left(t_n(x) - s_n(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) \frac{(b-a)}{n} = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right)$$

$$= \frac{(b-a)}{n} \left[f(\cancel{x_1}) - f(x_0) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_3)} - \cancel{f(x_2)} + \cancel{\cdots} + f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})} \right]$$

$$= \frac{(b-a)}{n} \left(f(x_n) - f(x_0) \right) = \frac{(b-a)}{n} \left(f(b) - f(a) \right) = \frac{C}{n} .$$

$$-\int_a^b s_n(x)\,dx \geq -\underline{I}(f) \geq -\int_a^b t_n(x)\,dx$$

$$s_n(x) \leq f(x) \leq t_n(x)$$

$$\int_a^b s_n(x)\,dx \leq \overline{I}(f) \leq \int_a^b t_n(x)\,dx$$

s_n e t_n escadas

$$0 \leq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \int_a^b t_n(x)\,dx - \int_a^b s_n(x)\,dx = \frac{C}{n}$$

Como n é arbitrário (isso funciona $\forall n \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow \quad \overline{I}(f) = \underline{I}(f). \quad \blacksquare$$

Note que

$$C = (b-a)\left(f(b) - f(a)\right)$$

independe de n!