Integração por Frações Parciais

Nesta seção abordaremos a resolução da integral de qualquer racional (um quociente de polinômios), expressando-a como uma soma de frações mais simples, denominadas frações parciais. Para ilustrar o método considere os exemplos:

a) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(0)$

$\Delta = 16 > 0$

Neste caso não podemos usar a fórmula arctg $\Delta < 0$

Após fatorar, a expressão será expressa na soma das frações parciais

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

$$= \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \quad (1)$$

Vou trabalhar com o mmc prod. dos fatores comuns e não comuns com maior expoente.

$$= \frac{1}{\cancel{x^2-4}} = \frac{A(x-2) + B(x+2)}{\cancel{(x+2)(x-2)}}$$

$$1 = Ax - 2A + Bx + 2B$$

$$1 = (A+B)x + 2(-A+B)$$ → termo independente

$$\begin{cases} A+B = 0 \quad \times(2) \\ -2A+2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{2A} + 2B = 0 \\ -\cancel{2A} + 2B = 1 \end{cases}$$

$$4B = 1$$

$$\boxed{B = \frac{1}{4}} \; ; \quad \boxed{A = -\frac{1}{4}}$$

Retornando na exp. (1), tem-se:

Antes → $\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} dx + \int \frac{\frac{1}{4} dx}{x-2}$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|x-2| + C$$

b) $\int \frac{dx}{x^5+4x^3}$ {1) Preciso fatorar este termo; 2) Este termo está aberto numa soma de frações.

$$\frac{1}{x^5+4x^3} = \frac{1}{x^3(x^2+4)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

$\to$ grau 2

"Este mínimo não veio do nada". Se o mín. é o maior expoente terá x^2, x e não poderemos desconsiderar a informação.

$$\frac{1}{\cancel{x^5+4x^3}} = \frac{A(x^2+4)+Bx(x^2+4)+Cx^2(x^2+4)+Dx+E(x^3)}{\cancel{x^3(x^2+4)}}$$

$$1 = \cancel{Ax^2} + 4A + Bx^3 + 4Bx + Cx^4 + \cancel{4Cx^2} + Dx^4 + Ex^3$$

$$1 = (C+D)x^4 + (B+E)x^3 + (A+4C)x^2 + 4Bx + 4A$$

$C+D=0 \to D=\frac{1}{16}$

$B+E=0 \to E=0$

$A+4C=0 \to \frac{1}{4}+4C=0 \Rightarrow 4C=-\frac{1}{4} \Rightarrow C=-\frac{1}{16}$

$4B=0 \to B=0$

$4A=1 \to A=\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{x^5+4x^3} = \int \frac{\frac{1}{4}}{x^3}dx + \int \frac{\frac{-1}{16}}{x}dx + \int \frac{\frac{1}{16}x}{x^2+4}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^3} - \frac{1}{16}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{16}\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\underbrace{x^2+4}_{u}}$$ $u=x^2+4$, $du=2x\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int x^{-3}dx - \frac{1}{16}\ln x + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{1}{16}\ln x + \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + C$$

$$= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{16}\ln x + \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + C$$

c) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+2x-1}$ $\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

Eq. do 3º grau, que certeza vc tem? Ela terá uma raiz real.

x^3-2x^2+2x-1 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\underbrace{-2x^2+2x}_{-2x(x-1)} + \underbrace{x^3-1}_{(x-1)(x^2+x+1)} = \boxed{(x-1)(x^2-x+1)}$$

Outra maneira de resolução

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+2x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2 & x^2-x+1 \\ \hline \quad -x^2+2x & \\ \quad +x^2-x & \\ \hline \qquad x-1 & \\ \qquad -x+1 & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

$(x-1)(x^2-x+1)$

d) $\int \frac{dx}{x^4+1}$ $\quad x^4+1=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$x^4+1 = x^2+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2$

subtração dos quadrados $\rightarrow (a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$

$(x^2+1)^2-(\sqrt{2}\,x)^2 = (x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1-\sqrt{2}x)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}$$

$$\cancel{\frac{1}{x^4+1}} = \frac{Ax+B(x^2+1+\sqrt{2}x)+Cx+D(x^2+1-\sqrt{2}x)}{\cancel{(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)}}$$

$1 = \underline{Ax^3}+Ax+A\sqrt{2}x^2+Bx^2+B+B\sqrt{2}x+\underline{Cx^3}+Cx-C\sqrt{2}x^2+Dx^2+D-D\sqrt{2}x$

$A+C=0$

$A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D=0$

$A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2}=0$

$B+D=1$

e) $\int \frac{dx}{x^6+1}$ $\quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ soma dos cubos

$\Rightarrow x^6+1 = (x^2)^3+(1)^3 = (x^2+1)\boxed{(x^4-x^2+1)}$

$x^4-x^2+1 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = (x^2+1)^2$

$x^4-x^2+1 = x^4+2x^2+1-3x^2$

$(a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$

$(x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2 = (x^2+1-\sqrt{3}x)(x^2+1+\sqrt{3}x)$

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+1-\sqrt{3}x)(x^2+1+\sqrt{3}x)} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1-\sqrt{3}x}+\frac{Dx+E}{x^2+1+\sqrt{3}x}$$

f) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

$$(x^4-1)^2 = \left[(x^2+1)(x^2-1)\right]^2 = (x^2+1)^2(x+1)^2(x-1)^2$$

$$\frac{1}{(x^4-1)^2} = \frac{1}{(x^2+1)^2(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}$$

g) $\int \frac{(3x^2+2)}{x^4+x^2+1}\,dx$

$$x^4+x^2+1 = (a+b)^2 = x^2 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$$

$$x^4+x^2+1 = x^2 + 2x^2 + 1 - x^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(x^2+1)^2 - (x)^2 = (x^2+1+x)(x^2+1-x)$$

$$\frac{3x^2+2}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1+x} + \frac{Cx+D}{x^2+1-x}$$

$$\frac{3x^2+2}{\cancel{x^4+x^2+1}} = \frac{Ax+B(x^2+1-x)+Cx+D(x^2+1+x)}{\cancel{(x^2+1+x)(x^2+1-x)}}$$

$$3x^2+2 = \cancel{Ax^3} + Ax - Ax^2 + Bx^2 + B - Bx + \cancel{Cx^3} + Cx + Cx^2 + Dx^2 + D + Dx$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+C+D=3 \\ A-B+C+D=0 \\ B+D=2 \end{cases}$$

h) $\int \frac{dx}{x^5-10x^4+25x^3}$

$$x^5-10x^4+25x^3 = x^3(x^2-10x+25) = x^3(x-5)^2$$

$$\frac{1}{x^5-10x^4+25x^3} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x-5} + \frac{E}{(x-5)^2}$$

i) $\int \frac{dx}{x^3-5x^2+6x}$

$\Delta = b^2-4ac$
$\Delta = 25-4(1)(6)$
$\Delta = 1$

$x = \frac{+5\pm 1}{2}$ ⟨ $+2$, $+3$

$$x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6)$$
$$= x(x-2)(x-3)$$

$$\frac{1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

j) $\int \frac{dx}{x^3-8}$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$(x)^3-(2)^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$

$$\frac{1}{x^3-8} = \frac{1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\cancel{x^3-8}} = \frac{A(x^2+2x+4) + Bx+C(x-2)}{\cancel{(x-2)(x^2+2x+4)}}$$

$$1 = Ax^2+2Ax+4A+Bx^2-2Bx+Cx-2C$$

$$\begin{cases} A+B=0 \longrightarrow B=-A \\ 2A-2B+C=0 \longrightarrow 2A+2A+C=0 \Rightarrow \underline{4A+C}=0 \\ \underline{4A-2C}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4A+C=0 \\ 4A-2C=1 \quad \times(-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{4A}+C=0 \\ -\cancel{4A}+2C=-1 \end{cases}$$

$$3C=-1 \Rightarrow \boxed{C=-\frac{1}{3}}$$

$4A+C=0$
$4A-\frac{1}{3}=0$
$4A=\frac{1}{3}$
$\boxed{A=\frac{1}{12}}$

$\boxed{B=-\frac{1}{12}}$

$$\int \frac{1}{x^3-8}dx = \int \frac{\frac{1}{12}dx}{x-2} + \int \frac{-\frac{1}{12}x-\frac{1}{3}\,dx}{x^2+2x+4}$$

sinal em evidência $\longrightarrow \frac{-x-4}{12}$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{12}\int \frac{2(x+4)\,dx}{\underbrace{x^2+2x+4}_{u}}$$

$u = x^2+2x+4$
$du = 2x+2$

$$= \frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{24}\int\frac{(2x+8)\,dx}{x^2+2x+4} \longrightarrow 2x+2+6$$

$$= \frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{24}\int\frac{2x+2\,dx}{x^2+2x+4} - \underbrace{\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{24}_{4}}\int\frac{dx}{x^2+2x+4}}_{I_1}$$

(1) $\Delta = b^2-4ac$
$\Delta = 4-4(1)(4)$
$\Delta = -12 < 0$

$$I_1 = \int\frac{dx}{x^2+2x+4} \qquad \underbrace{(x)^2 + 2.1\,x + 1 + 3}_{(x+1)^2+3}$$

$$= \int\frac{dx}{(x+1)^2+3} = \sqrt{3}\,\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{\Big(\underbrace{\frac{x+1}{\sqrt{3}}}_{u}\Big)^2+1} \qquad u = \frac{x+1}{\sqrt{3}} \qquad du = \frac{1}{\sqrt{3}}dx$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Retornando em (1), tem-se

$$= \frac{1}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{24}\ln|x^2+2x+4| - \frac{\sqrt{3}}{12}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

l) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

$\Delta = b^2-4ac$
$\Delta = (1)^2-4(1)(1)$
$\Delta = -3 < 0$

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\frac{1}{\cancel{(x^2+x+1)^2}} = \frac{Ax+B.(x^2+x+1)+Cx+D}{\cancel{(x^2+x+1)^2}}$$

$$1 = Ax^3 + \cancel{Ax^2} + Ax + \cancel{Bx^2} + \cancel{Bx} + B + \cancel{C}x + D$$

$$\begin{cases} A=0 \longrightarrow A=0 \\ A+B=0 \longrightarrow B=0 \\ A+B+C=0 \longrightarrow C=0 \\ B+D=1 \longrightarrow D=1. \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$x^2+x+1=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = 1-4(1)(1)$

$\Delta = -3 < 0$

$$x^2+x+1 = (x)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}tg\theta\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}tg^2\theta + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(tg^2\theta+1) = \frac{3}{4}sec^2\theta$$

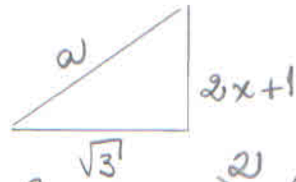
$$(x^2+x+1)^2 = \left(\frac{3}{4}sec^2\theta\right)^2 = \boxed{\frac{9}{16}sec^4\theta}$$

$$x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}tg\theta \longrightarrow tg\theta = \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}tg\theta - \frac{1}{2}$$

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}sec^2\theta\, d\theta$$

$$tg\theta = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$



$a^2 = (2x+1)^2 + (\sqrt{3})^2$

$a^2 = 4x^2+4x+1+3$

$a^2 = 4x^2+x+4$

$a^2 = 4(x^2+x+1)$

$a = 2\sqrt{x^2+x+1}$

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{sec^2\theta}\,d\theta}{\frac{9}{16}sec^{\cancel{4}\,2}\theta} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{16}\,8}{9}\int cos^2\theta\, d\theta$$

$\to \frac{1}{sec^2\theta}$

$cos^2\theta = \frac{1+cos\,2\theta}{2}$

$$= \frac{\cancel{8}\,4\sqrt{3}}{9}\,\frac{1}{\cancel{2}}\int(1+cos\,2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\int d\theta + \frac{\cancel{4}\,2\sqrt{3}}{9}\,\frac{1}{\cancel{2}}\int cos\,2\theta\, 2d\theta$$

$u = 2\theta$

$du = 2d\theta$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\theta + \frac{2\sqrt{3}}{9}sen\,2\theta$$

$sen\,2\theta = 2\,sen\theta . cos\theta$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\theta + \frac{2\sqrt{3}}{9}.\,2\,sen\theta\,cos\theta$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt{3}}\,3}{\cancel{9}\,3}.\,\cancel{2}.\,\frac{2x+1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+x+1}}\;\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + C$$

m) $\int \ln(\underbrace{x^2+5x+6}_{u})\,dx$

$u = \ln(x^2+5x+6)$ $\quad \int dv = \int dx$ $\quad \int u\,dv = u.v - \int v\,du$

$du = \frac{1}{x^2+5x+6}\cdot(2x+5)\,dx$ $\quad \rightarrow v = x$

$$\int \ln(x^2+5x+6)\,dx = x\ln(x^2+5x+6) - \int \frac{x(2x+5)\,dx}{x^2+5x+6} \qquad \int \frac{(2x^2+5x)\,dx}{x^2+5x+6}$$

Divisão de polinômios

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+5x & x^2+5x+6 \\ \hline -2x^2-10x-12 & 2 \\ -5x-12 & \end{array} \Rightarrow 2 - \frac{(5x+12)}{x^2+5x+6}$$

$$= x\ln(x^2+5x+6) - \int\left[2 - \frac{5x+12}{x^2+5x+6}\right]dx$$

$$= x\ln(x^2+5x+6) - 2\int dx + \underbrace{\int \frac{5x+12}{x^2+5x+6}\,dx}_{I_1} \quad (1)$$

$I_1 = \int \frac{5x+12}{x^2+5x+6}\,dx$

$x^2+5x+6=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = 25-4(1)(6)$

$\Delta = 1 > 0$

$x = \frac{-5\pm1}{2}$ $\quad x_1=-2$, $\quad x_2=-3$

$$\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{5x+12}{\cancel{x^2+5x+6}} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{\cancel{(x+2)(x+3)}}$$

$5x+12 = Ax+3A+Bx+2B$

$$\begin{cases} A+B=5 & \times(-3) \\ 3A+2B=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{3A}-3B=-15 \\ \cancel{3A}+2B=12 \end{cases}$$

$-B=-3$

$\boxed{B=3}$

$A+B=5$

$\boxed{A=2}$

$$\int \frac{5x+12}{x^2+5x+6}\,dx = 2\int\frac{dx}{x+2} + 3\int\frac{dx}{x+3}$$

R.F. ⇒ Resposta Final

$$2\ln|x+2| + 3\ln|x+3|$$

$$R.F. = x\ln(x^2+5x+6) - 2x + 2\ln|x+2| + 3\ln|x+3| + C$$

Propriedades da Integral

Para chegarmos no Teorema Fundamental do Cálculo precisamos de algumas propriedades da integral:

1) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ → se é positivo representa a área do retângulo e se for negativa representa menos a área do retângulo pq a fç estará abaixo do eixo x.

2) Essa propriedade é associada a operações de funções. Então se tivermos a soma de 2 funções

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3) Se integrarmos uma função multiplicada por uma constante como a derivação, essa constante pode ser colocada do lado de fora

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

As props. 2 e 3 correspondem a linearidade. A integral 3 é denominada de integral de Riemann ou integral definida, pois é possível estabelecer o limite de integração.

4) Se considerarmos a subtração de duas funções

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

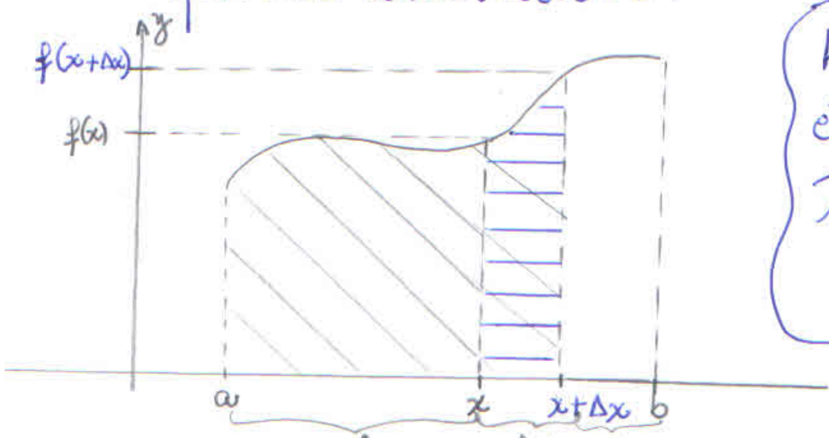
Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f contínua no intervalo $[a,b]$ e F uma primitiva de f neste intervalo, então $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$. Essa expressão é usada não somente para o cálculo de área, mas também para o trabalho, a energia, o potencial e outros.

O TFC estabelece uma conexão entre 2 ramos do cálculo (10)
o cálculo diferencial e o cálculo integral, apresentando a relação inversa entre a derivada e a integral.

A continuidade no T.F.C. é importante, pois garante o pto máx. e mín. no intervalo de x e podemos aplicar o Teorema do Confronto p/ fazer o limite que resultará na derivada de g.

Considere o esquema ilustrativo:



A hipótese do TFC é basicamente a continuidade da fç.

A(x) área entre a e x

A(x+Δx) " " " e x+Δx

A(b) " " a e b

Pelo Teorema do Confronto tem-se:

$$f(x).\Delta x \leq A(x+\Delta x) - A(x) \leq f(x+\Delta x).\Delta x$$

Dividindo toda a expressão por Δx.

$$\frac{f(x).\Delta x}{\Delta x} \leq \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \leq \frac{f(x+\Delta x).\Delta x}{\Delta x}$$

Aplicando o limite em toda a expressão, tem-se:

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} f(x)}_{f(x)} \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \leq \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)}_{f(x)}$$

f(x) é cte, pq o Δx que está variando!

Logo $\overbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}}^{A'(x)} = f(x)$ Esse limite é uma derivada!

Então $A'(x) = f(x)$

$$A(x) = \int A'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Para $x = a$

$$A(x) = F(x) + C$$

$$A(a) = F(a) + C \; ; \; A(a) = 0$$

$$F(a) + C = 0$$

$$C = -F(a)$$

Para $x = b$

$$A(b) = F(b) + C$$

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

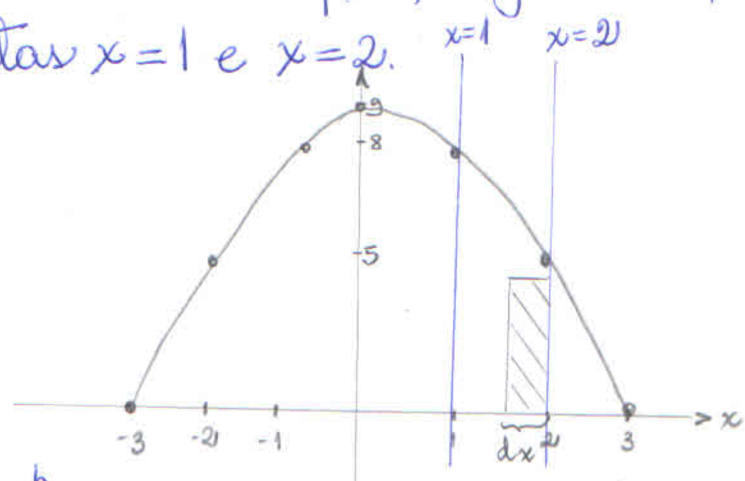
→ A integral pode ser calculada a partir de $f(x)$ e essa integral é a $f_ç$ do pto final − pto inicial

Então $A(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Esse resultado vai nos permitir resolver a integral $\int_a^b f(x)dx$, pq a ideia é que vamos procurar a $f_ç$ $A(b)$, cuja derivada é a $f_ç$ dada. Então se a $f_ç$ é x, a $f_ç$ cuja derivada é $\frac{x^2}{2}$ e $A(b)$ é uma antiderivada de f. Considere os exemplos

1) Calcular a área abaixo da função $y = -x^2 + 9$, acima do eixo Ox e entre as retas $x = 1$ e $x = 2$.

x	y
-3	0
-2	5
-1	8
0	9
1	8
2	5
3	0



$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

$$A = \int_1^2 (-x^2 + 9)\,dx = -\int_1^2 x^2\,dx + 9\int_1^2 dx$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + 9x\Big|_1^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) + (18-9)$$

$$= -\frac{7}{3} + 9$$

$$A = \frac{20}{3} \text{ u.a}$$

2) Encontrar a área limitada pelas curvas dadas

$y^2 = 2x$ e $x^2 = 2y$.

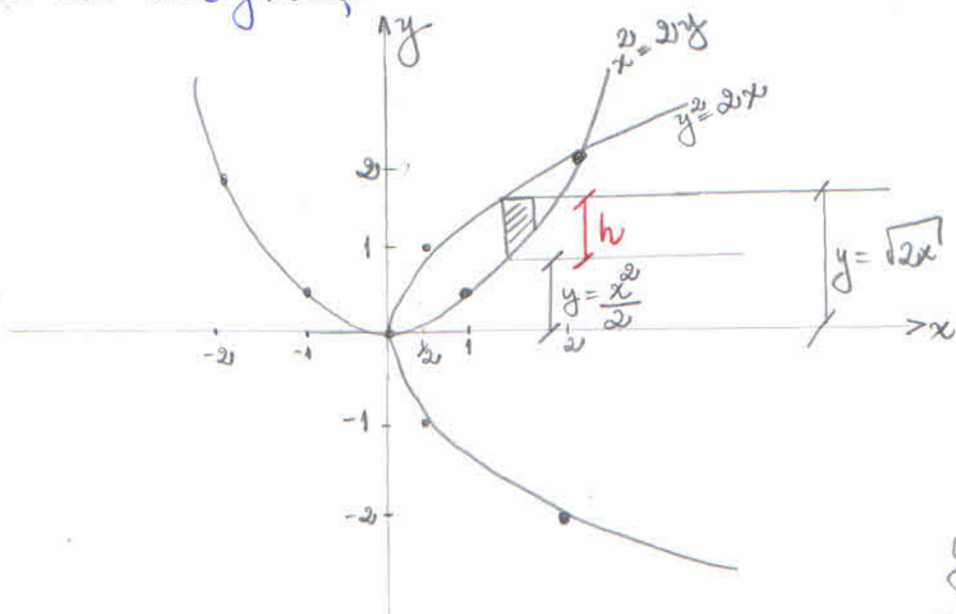
$$y^2 = 2x \qquad\qquad x^2 = 2y$$

$$x = \frac{y^2}{2} \qquad\qquad y = \frac{x^2}{2}$$

x	y
2	-2
1/2	-1
0	0
1/2	1
2	2

x	y
-2	2
-1	1/2
0	0
1	1/2
2	2

É preciso determinar a intersecção entre as curvas, encontramos os limites de integração.



$$y^2 = 2x$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = 2x$$

$$\frac{x^4}{4} = 2x$$

$$x^4 = 8x$$

$$x^4 - 8x = 0$$

$$x(x^3 - 8) = 0$$

$x = 0 \quad y = 0 \quad (0,0)$

$x = 2 \quad y = 2 \quad (2,2)$ Pontos de intersecção

$y^2 = 2x$

$y = \sqrt{2x}$ não coloco $\pm$ pq só interessa a região positiva.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

$$A \int_0^2 \left(\sqrt{2}\,x^{1/2} - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$A = \sqrt{2}\int_0^2 x^{1/2}dx - \frac{1}{2}\int x^2 dx$$

$$A = \sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6}\Big|_0^2$$

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{3}(2)^{3/2} - \frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{6}_{\,3}} = \frac{4}{3}\,u.a.$$

3) Encontrar a área limitada pelas curvas dadas ($y^2 = 2x$ e $x^2 = 2y$), $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{y}$ e $y = -x + 2$.

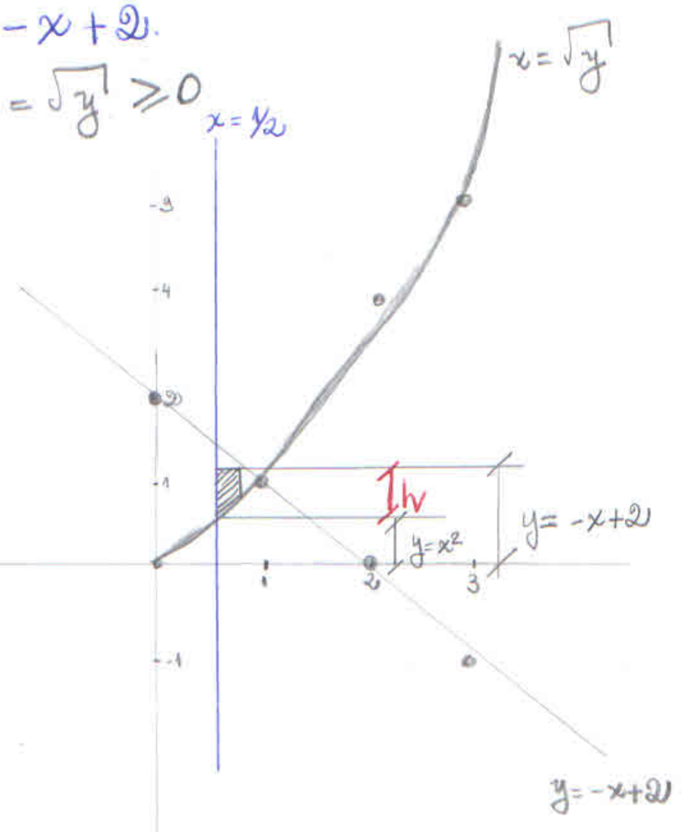
Qual a certeza que tenho neste caso $x = \sqrt{y} \geq 0$

$x = \sqrt{y}$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

$y = -x + 2$

x	y
0	2
1	1
2	0
3	-1



Interpecção entre as curvas p/ determinar o limite de integração

$x = \sqrt{y}$ $\quad y = -x + 2$

$x = \sqrt{-x+2}$ $\quad (\ )^2$

$x^2 = -x + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1 - 4(1)(-2)$

$\Delta = 9$ $\quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \text{ (não é válido neste caso)} \end{cases}$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

$$A \int_0^2 \left(\sqrt{2}\,x^{1/2} - \frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$A = \sqrt{2}\int_0^2 x^{1/2}dx - \frac{1}{2}\int x^2 dx$$

$$A = \sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6}\Big|_0^2$$

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{3}(2)^{3/2} - \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{4}{3}\ u.a.$$

3) Encontrar a área limitada pelas curvas dadas ($y^2 = 2x$ e $x^2 = 2y$), $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{y}$ e $y = -x + 2$.

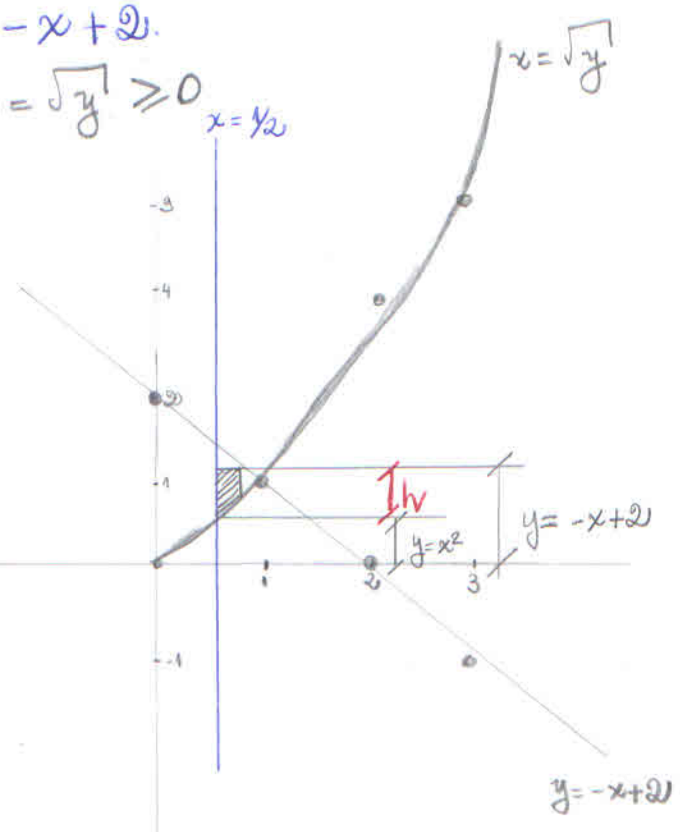
Qual a certeza que tenho neste caso $x = \sqrt{y} \geq 0$

$x = \sqrt{y}$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

$y = -x + 2$

x	y
0	2
1	1
2	0
3	-1



Interpecção entre as curvas p/ determinar o limite de integração

$x = \sqrt{y}$ $\quad y = -x + 2$

$x = \sqrt{-x+2} \quad (\ )^2$

$x^2 = -x + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1 - 4(1)(-2)$

$\Delta = 9 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \text{ (não é válido neste caso)} \end{cases}$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$A = \int_{1/2}^{1} \left(-x+2-x^2\right) dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \Bigg|_{1/2}^{1}$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + 2 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{-\frac{1}{4}}{2} + 1 - \frac{\frac{1}{8}}{3}\right)$$

$$\cancel{\frac{-1}{2}} + 2 - \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{3}{8} = \frac{24-8+9}{24}$$

$$A = \frac{25}{24} \text{ u.a}$$