

ARITMÉTICA DE PONTO FLUTUANTE

MEDIDAS DE ERRO ENTRE UMA GRANDEZA $\bar{x}$
E UMA APROXIMAÇÃO $\tilde{x}$ PARA ELA:

ERRO ABSOLUTO: $E_{ABS} = \bar{x} - \tilde{x}$

ERRO RELATIVO: $E_{REL} = \frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\bar{x}} \quad (\text{se } \bar{x} \neq 0)$
 $= 1 - \frac{\tilde{x}}{\bar{x}}$

NOTAÇÃO CIENTÍFICA (NORMALIZADA):

QUALQUER NÚMERO REAL $x \neq 0$ PODE SER REPRESENTADO
NA FORMA

$$x = \overset{\text{SINAL}}{\pm} 0.\underbrace{d_1 d_2 \dots d_s d_{s+1} \dots}_{\text{MANTISSA}} \times 10^{\overset{\text{EXPONENTE}}{e}}$$

onde $0 \leq d_i \leq 9$, com $d_1 > 0$

MANTISSA: $d_1 \times 10^{-1} + d_2 \times 10^{-2} + \dots + d_s \times 10^{-s} + d_{s+1} \times 10^{-s-1} + \dots$

AMBIGUIDADE: $\left. \begin{array}{l} 0.43000 \dots \\ 0.42999 \dots \end{array} \right\} \text{MESMO NÚMERO!}$

PRECISÃO FINITA (s DÍGITOS)

$$x = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_s \times 10^e$$

$$0 \leq d_i \leq 9, 1 \leq i \leq s; d_1 > 0; m \leq e \leq M \quad (\text{é o zero?})$$

BASE β (β INTEIRO ≥ 2)

$$x = \pm \left(\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_s}{\beta^s} \right) \times \beta^e = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_s \times \beta^e$$

$$\text{com } 0 \leq d_i \leq \beta-1, d_1 \geq 1, m \leq e \leq M$$

F: CONJUNTO DOS NÚMEROS REPRESENTÁVEIS C/ PRECISÃO FINITA

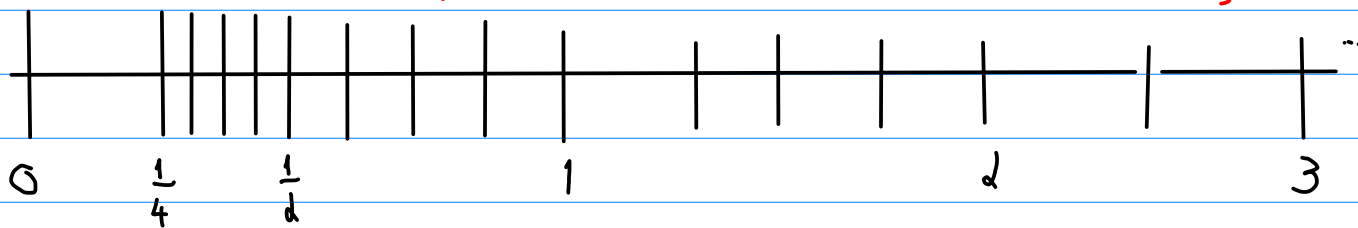
- F É FINITO ($\#F = 2(\beta-1)\beta^{s-1}(M-m+1) + 1$)

- OS PONTOS DE F NÃO SÃO IGUALMENTE ESPAÇADOS

$$\beta=2; s=3; m=-1; M=2$$

(FIGURA $\pm$)

X (MELHOR VER EM UM LIVRO)



DIFICULDADES: UNDERFLOW, OVERFLOW, ERROS DE ARREDONDAMENTO

CADA NÚMERO DE F "REPRESENTA" UM INTERVALO DE NÚMEROS REAIS

$x \in \mathbb{R}; x \neq 0; x$ DENTRO DOS LIMITES DE F

$fl(x)$: NÚMERO DE F MAIS PRÓXIMO DE x

ENTÃO: $\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| \leq \frac{1}{d} \beta^{1-s}$ → UNIDADE DE ARREDONDAMENTO U

$\left(\begin{array}{l} \beta = 2: 2^{-s} \\ \beta = 10: 5 \times 10^{-s} \end{array} \right)$

VAMOS SUPOR ARREDONDAMENTOS COMPATÍVEIS COM A FÓRMULA ACIMA

BASE $\beta = 10$ $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x$ DENTRO DOS LIMITES DE F
(IGNORE O SINAL)

PARA CALCULAR $fl(x)$:

SEME $5 \times 10^{-(s+1)}$ A MANTISSA É TRUNQUE

(IGUAL A TRUNQUE, SE O DÍGITO $s+1$ FOR ≤ 4 ,

SEME 1 AO DÍGITO s E TRUNQUE, SE

O DÍGITO $s+1$ FOR MAIOR OU IGUAL A 5)

EXEMPLO $\pi = 3.14159265358979... = 0.314159265358979... \times 10^1$

$s = 2: fl(\pi) = 3.1$

$s = 8: fl(\pi) = 3.1415927$

$s = 13: fl(\pi) = 3.141592653590$

• SOMA E PRODUTO CONTINUAM COMUTATIVOS (ENTRE 2 NÚMEROS)

• ASSOCIATIVIDADE E DISTRIBUTIVIDADE NÃO VALEM EM GERAL

EXEMPLOS (DE "MÉTODOS DE CÁLCULO NUMÉRICO")

TRABALHANDO COM BASE $\beta = 10$ E $s = 3$ ALGARISMOS

$$(i) (4.26 + 9.24) + 5.04 = 13.5 + 5.04 = \cancel{18.54} \\ 18.5$$

$$4.26 + (9.24 + 5.04) = 4.26 + \cancel{14.28} = \cancel{18.54} \\ 14.3 \quad 18.6$$

$$(ii) (4210 - 4.99) - 0.02 = \cancel{4205.01} - 0.02 = \cancel{4207.98} \\ 4210 \quad 4210$$

$$\text{OBS: } \left(\begin{array}{l} 4205.01 = 0.420501 \times 10^4 \rightarrow 0.421 \times 10^4 = 4210 \\ 4207.98 = 0.420798 \times 10^4 \rightarrow 0.421 \times 10^4 = 4210 \end{array} \right)$$

$$4210 - (4.99 + 0.02) = 4210 - 5.01 = \cancel{4204.99} \\ 4200$$

$$\text{OBS: } 4204.99 = 0.420499 \times 10^4 = 0.420 \times 10^4 = 4200$$

$$(iii) \left(\frac{0.123}{7.97} \right) * 84.9 = \cancel{0.01543} * 84.9 = \cancel{1.30746} \\ 0.0154 \quad 1.31$$

$$\frac{0.123 * 84.9}{7.97} = \cancel{10.4427} = \frac{10.4}{7.97} = \cancel{1.30489} \\ 1.30$$

$$(iv) 15.9 * (4.99 + 0.02) = 15.9 * 5.01 = \overset{\downarrow}{79.659} \\ 79.7$$

$$15.9 * 4.99 + 15.9 * 0.02 = \overset{\downarrow}{79.341} + 0.318 = \overset{\downarrow}{79.659} \\ 79.3 \qquad \qquad \qquad 79.6$$

ALGORITMOS INSTÁVEIS E ESTÁVEIS

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES $\Rightarrow E_n = 1 - n E_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$

$$\text{CONTA} \Rightarrow E_1 = \frac{1}{e}$$

USE A RECORRÊNCIA E CALCULE $E_2, \dots, E_{10}$. VEJA O QUE ACONTECE

- SE δ FOR O ERRO COMETIDO EM $E_1 = 1/e$, ENTÃO, SE $\hat{E}_n, n=2, \dots$ FOREM AS APROXIMAÇÕES PARA E_n CALCULADAS SEM CUIDO A PARTIR DE $\hat{E}_1$, TEMOS $\hat{E}_n = E_n \pm n! * \delta$

- POR OUTRO LADO, SE, PARA N GRANDE CONSEGUIRMOS CALCULAR $\hat{E}_N = E_N + \varepsilon$, ENTÃO, PARA O ALGORITMO EM ORDEM REVERSA

$$E_{n-1} = \frac{1 - E_n}{n}, \quad n = N, N-1, \dots, 2$$

$$\text{TEMOS} \quad \hat{E}_{N-k} = E_{N-k} \pm \frac{\varepsilon}{N(N-1) - (N-k+1)}$$

SABENDO-SE QUE $0 < E_N < \frac{1}{N+1}$, PODEMOS COMEÇAR

COM $\hat{E}_N = 0$ (ERRO $< \frac{1}{N+1}$) P/ N GRANDE

E OBTER BOAS APROXIMAÇÕES P/ VALORES DE π MENORES

CANCELAMENTO

APROXIMAÇÃO PARA π PELO MÉTODO DA EXAUSTÃO DE ARQUIMEDES

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad \text{NÃO VALE USAR } \pi$$

$$\pi_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right);$$

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2(x)}}{2} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}}{2}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$s_2 = 1$$

PARA $n = 2, \dots$?

$$s_2 = 0.5 * (1 - \sqrt{1 - s_2})$$

$$\pi_n = 2^n * \sqrt{s_2}$$

FIM

$$0.5 (1 - \sqrt{1 - s_2}) = 0.5 * \frac{s_2}{1 + \sqrt{1 - s_2}} \quad \text{SEM CANCELAMENTO!}$$

$$s_2 = 1$$

PARA $n = 2, 3, \dots, ?$

$$s_2 = 0.5 * s_2 / (1 + \sqrt{1 - s_2})$$

$$\gamma_n = \alpha^n \sqrt{s_2}$$

FIN

— / —

PROBLEMAS DE CANCELAMENTO PODEM OCORRER COM A FÓRMULA DE BASKARA

— / —

$$\left| \frac{b-a}{2} \right| \leq \underline{\text{MAX}\{\text{ATOL}, \text{RTOL} * |G|\}}$$

RASCUNHO

$$x = \begin{array}{ccccccc} 0. & d_1 & \dots & d_s & d_{s+1} & \dots & \\ 0. & 0 & \dots & 0 & 5 & & \end{array} + \text{TRUNCO}$$

- / -

$$x, y \in \mathbb{R}$$

DIZEMOS QUE x E y COINCIDEM EM m ALGARISMOS SE AS MANTISSAS DELES ARREDONDADAS P/ m DÍGITOS FOREM IGUAIS

SE x E y COINCIDIREM EM m ALGARISMOS, ENTÃO

$$\left| \frac{x-y}{x} \right| \leq 5 \times 10^{-m} \quad (\text{BASE } 10)$$

POR OUTRO LADO, SE $x, y \in \mathbb{R}$ E

$$\left| \frac{x-y}{x} \right| \leq 5 \times 10^{-m},$$

ENTÃO x E y COINCIDEM EM $m-1$ OU m ALGARISMOS