Computação Gráfica

Transformações Geométricas

Prof. Alaor Cervati Neto

ICMC São Carlos USP

2021/2

- Renderizamos objetos 2D de forma estática.
- Agora forneceremos movimento a nossos objetos.
- Transformações geométricas são operações aplicadas na descrição geométrica dos objetos (vértices).

Transformações geométricas primárias:

- Translação.
- Escala.
- Rotação.

Transformações geométricas secundárias:

- Reflexão.
- Cisalhamento.

Transformações Geométricas 2D

Coordenadas Homogêneas:

- Sistema de coordenadas em geometria projetiva.
- Um ponto no espaço 2D é uma projeção de um ponto 3D no plano.

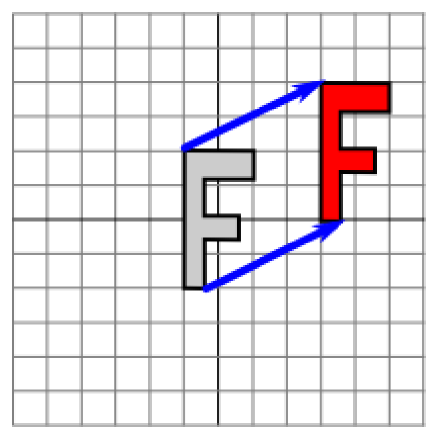
Um ponto 2D em coordenadas homogêneas:

- Possui três valores: (x_h, y_h, h).
- Onde h é um parâmetro homogêneo ($h \neq 0$).

Por conveniência, usaremos $h = 1$:

- Mantemos as coordenadas Euclidianas.
- Obtemos maior poder de representação.

Adicionar *offsets* às coordenadas de um objeto:



Translação

Considerando uma coordenada (x, y):

- Adicionando um *offset* (t_x, t_y).
- Nova coordenada (x', y'):

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

Notação matricial: $P' = P + T$:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Translação em Coordenadas Homogêneas

- Permite translação com multiplicação de matrizes.
- Sejam as coordenadas (x, y, h) e um *offset* (t_x, t_y).
- A nova coordenada é (x'_h, y'_h, h):

$$\text{Nova coordenada}\left\{\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ h \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de translação}} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix}\right\}\text{Coordenada original}$$

Translação em Coordenadas Homogêneas

Quando $h = 1$, voltamos ao sistema de coordenadas cartesiano:

$$\begin{cases} x'_h = (1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h) \implies x'_h = x_h + t_x \\ y'_h = \left(0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h\right) \implies y'_h = y_h + t_y \\ h = (0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h) \implies h = 1 \end{cases}$$

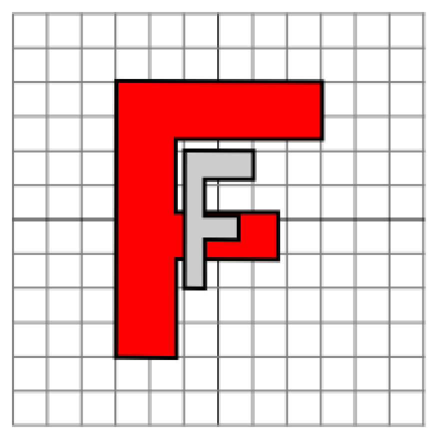
Portanto, quando $h = 1$, as coordenadas cartesianas são um caso particular de coordenadas homogêneas:

$$P' = T\left(t_x, t_y\right) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala

Altera o tamanho de um objeto por um dado fator:



Escala

Considerando uma coordenada (x, y):

- Fator de escala $\left(s_x, s_y\right)$.
- Nova coordenada (x', y'):

$$\begin{cases} x' = x \cdot s_x \\ y' = y \cdot s_y \end{cases}$$

Notação matricial:

$$P' = S \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escala em Coordenadas Homogêneas

$$P' = S\left(s_x, s_y\right) \cdot P$$

$$\text{Nova coordenada}\left\{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de escala}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\text{Coordenada original}$$

s_x e s_y devem ser maiores que zero.

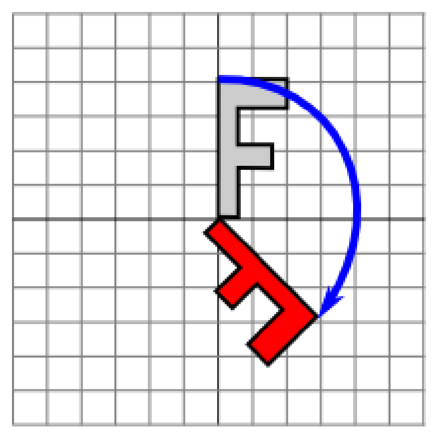
Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta.

Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ o objeto diminui.

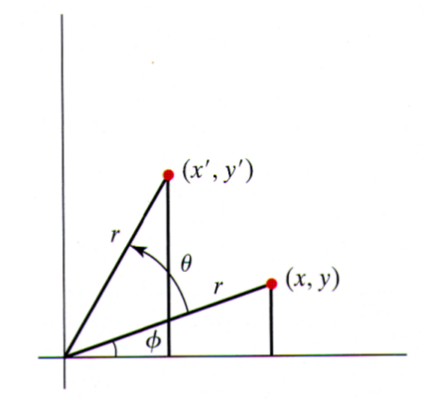
Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme.

Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial.

Move o objeto ao redor de um eixo em um ângulo:



Rotacionamos (x, y) a partir da origem do sistema de coordenadas:



Considerando uma coordenada (x, y):

- O raio r é constante, ϕ é o ângulo original de $P = (x, y)$ e θ é o ângulo de rotação.
- Nova coordenada (x', y'):

$$\begin{cases} \cos(\phi + \theta) = \frac{x'}{r} \implies x' = r \cos(\phi + \theta) \\ \operatorname{sen}(\phi + \theta) = \frac{y'}{r} \implies y' = r \operatorname{sen}(\phi + \theta) \end{cases}$$

Soma de ângulos:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$

Portanto:

$$\begin{cases} x' = r\cos\phi \cdot \cos\theta - r\,\text{sen}\,\phi \cdot \text{sen}\,\theta \\ y' = r\cos\phi \cdot \text{sen}\,\theta + r\,\text{sen}\,\phi \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Descrevendo *P* por coordenadas polares:

$$x = r\cos\phi, y = r\,\text{sen}\,\phi$$

Por substituição:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ y' = x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$P' = R \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação em Coordenadas Homogêneas

$$P' = R(\theta) \cdot P$$

$$\text{Nova coordenada}\left\{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotação}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\text{Coordenada original}$$

Matriz de Transformação

A grande vantagem de coordenadas homogêneas é que uma sequência de transformações pode ser representada em uma única matriz:

$$\begin{aligned} P' &= M_2 \cdot M_1 \cdot P \\ &= (M_2 \cdot M_1) \cdot P \\ &= M \cdot P \end{aligned}$$

A transformação é dada por M em vez de M_1 e M_2.

1. Translação do objeto para a origem considerando o ponto de referência (x_f, y_f).
2. Transformação de escala.
3. Translação do objeto para a posição original.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{1} \overbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{2} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{3}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f\left(1 - s_x\right) \\ 0 & s_y & y_f\left(1 - s_y\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de transformação final}}$$

Rotação com ponto de referência

1. Translação do objeto para a origem considerando o ponto de referência (x_f, y_f).
2. Transformação de rotação.
3. Translação do objeto para a posição original.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{1} \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{2} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{3}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & x_r - x_r\cos\theta + y_r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & y_r - y_r\cos\theta - x_r\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de transformação final}}$$

- Dada uma matriz de transformação qualquer M.
- Dadas as coordenadas P.
- Novas coordenadas são $P' = M \cdot P$.
- Simples multiplicação de matrizes.
- Podemos gerar transformações compostas a partir de translação, escala e rotação.

Multiplicação de matrizes pode não ser comutativa, isto é, $M_2 \cdot M_1 \neq M_1 \cdot M_2$:

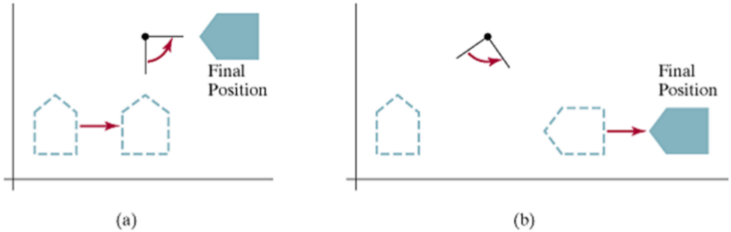
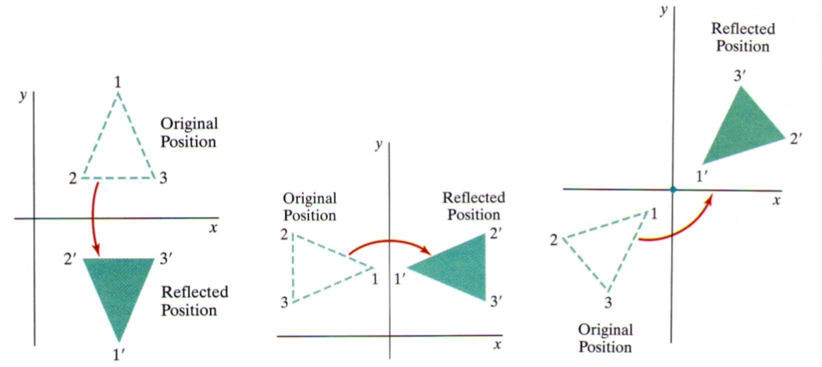


Figura: (a) primeiro o objeto é transladado depois rotacionado em 45^0 (b) primeiro o objeto é rotacionado em 45^0, depois transladado.

Reflexão

$$y = 0 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x = 0 : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x = 0 \text{ e } y = 0 : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cisalhamento (*shearing*) na direção de x:

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

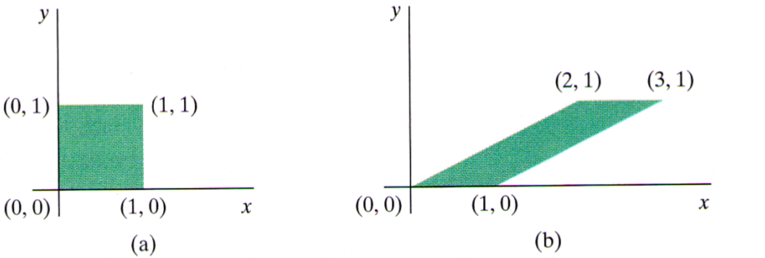


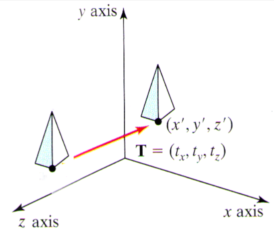
Figura: Convertendo um quadrado em um paralelogramo usando $sh_x = 2$.

Transformações Geométricas 3D

- São extensões de métodos 2D.
- Porém incluindo a coordenada z.
- São representadas por matrizes 4×4.

$$P' = T \cdot P$$

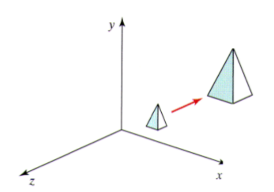
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Escala

$$P' = S \cdot P$$

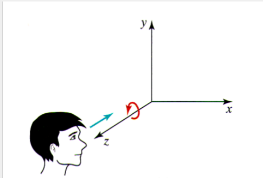
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotação

$$P' = R_z(\theta) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

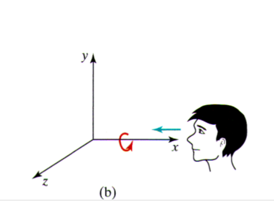


(a)

Rotação

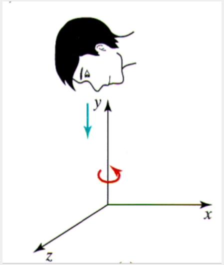
$$P' = R_x(\theta) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$P' = R_y(\theta) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

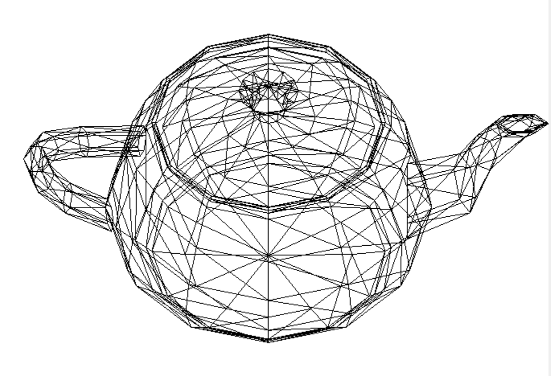


- Por padrão, OpenGL trabalha com coordenadas homogêneas em 3D (x, y, z, h).
- Para atividades com objetos 2D:
  - $h = 1$.
  - $z = 0$.

- Transformação Geométrica 3D. Fernando Paulovich. Slides SCC 250 – Computação Gráfica, 2010.
- Hughes, J. F., Van Dam, A., Foley, J. D., McGuire, M., Feiner, S. K., & Sklar, D. F. (2014). Computer graphics: principles and practice. Terceira Edição. Pearson Education.
- Computação Gráfica: Aulas 03 e 04. Slides de Ricardo M. Marcacini. Disciplina SCC0250/0650, ICMC/USP, 2021.

Exercício para cômputo de presença

O objeto *TeaPot* (também chamado Bule de Newell) é um modelo criado em 1975 por Martin Newell como parte de sua pesquisa em computação gráfica na Universidade de Utah.



Crie um programa (em C/C++, Java ou Python) que modele este objeto (o conjunto de vértices que o descreve está disponível em `https://github.com/kretash/UtahTeapot`) usando a primitiva `GL_TRIANGLES`. Aplique transformações para alterar o objeto de modo a posicioná-lo da forma que considerar melhor e gere a matriz de transformação correspondente.