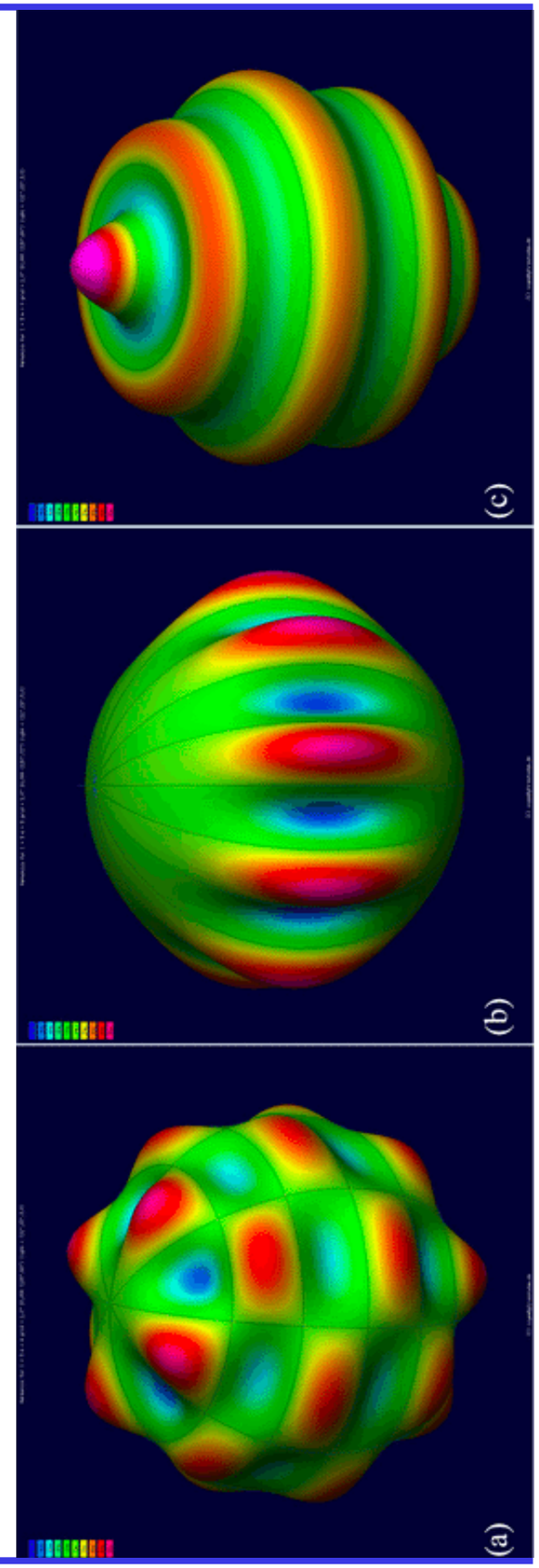
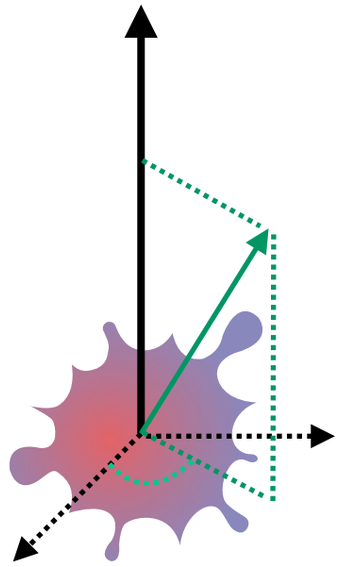
Eletromagnetismo 1

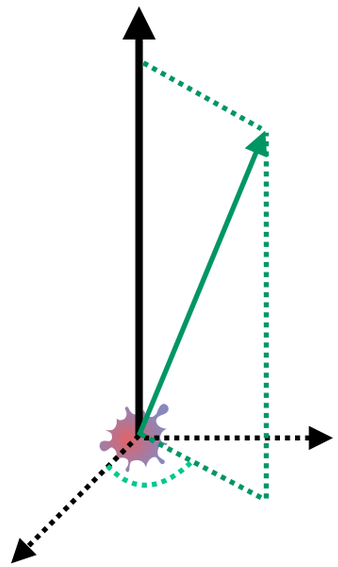
- Coordenadas cilíndricas e esféricas
- Os polinômios de Legendre
- A expansão multipolar



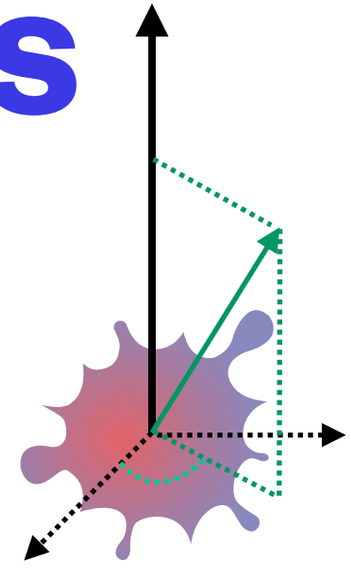
Coordenadas esféricas

- Diversos problemas envolvem **distribuições localizadas** de cargas, que nós geralmente (por conveniência) colocamos na **origem** do nosso sistema de coordenadas.
- À medida que nos afastamos dessas fontes, as *características* delas começam a ficar cada vez menos evidentes, e elas ficam cada vez mais parecidas com uma carga pontual.
- Mas o que isso significa? Que características são essas, como podemos descrevê-las matematicamente, e quão rápido elas desaparecem à medida que nos afastamos?
- Nós veremos aqui que a **expansão multipolar** nos fornece um modo natural e intuitivo para ***descrever essas características das fontes***, como essas características são mapeadas em ***formas para os campos***, e como esses campos ***decaem com a distância***.





Coordenadas esféricas



- Vamos começar lembrando os operadores diferencias em coordenadas esféricas. Por exemplo, o ***divergente*** é dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta}\left[\frac{\partial \sin\theta F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right]$$

- O ***Laplaciano***, quando aplicado numa função escalar, é dado por:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

- Também é útil lembrar dos versores, elementos de distância, área e volume nessas coordenadas:

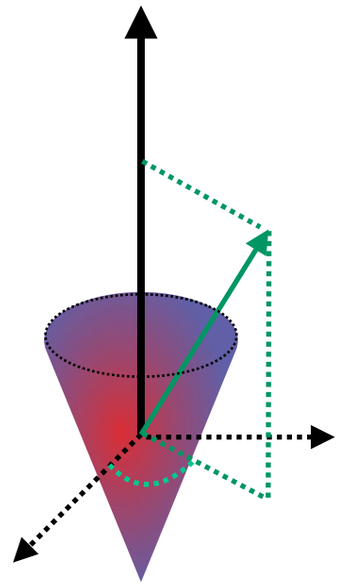
$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos\theta = \dfrac{z}{r} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \dfrac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{r} \\ \hat{\rho} = \dfrac{x\hat{x} + y\hat{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{\vec{\rho}}{\rho} \\ \hat{\theta} = \dfrac{z\,\hat{\rho} - \rho\,\hat{z}}{r} \\ \hat{\varphi} = \dfrac{-y\,\hat{x} + x\,\hat{y}}{\rho} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\varphi\,\hat{\varphi} \\ d\vec{S} = r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi\,\hat{r} + r\sin\theta\, d\varphi dr\,\hat{\theta} + r\, dr d\theta\,\hat{\varphi} \\ dV = r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi \end{cases}$$

Coordenadas esféricas + simetria azimutal



- São muito frequentes situações nas quais o nosso problema não depende do ângulo azimutal φ, e nesses casos de ***simetria azimutal*** (ou ***simetria axial***), o operador Laplaciano simplifica:

$$\nabla^2 f(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$$

- Vamos tomar uma função que obedece a Equação de Laplace $\nabla^2 f = 0$. Vamos tentar uma solução através do método da ***separação de variáveis***:

$$f(r,\theta) = R(r)\,P(\theta) \quad ,$$

o que leva a equação em:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R}{dr}\right) + \frac{1}{P}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\,P}{d\theta}\right) = 0 \quad , \quad \text{portanto}$$

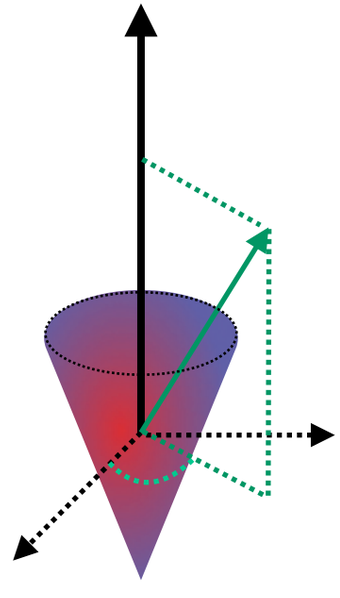
$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R}{dr}\right) = -\frac{1}{P}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\,P}{d\theta}\right) = \text{const}\,.$$

- Se a constante de separação for zero, as soluções não-triviais são $R \to 1/r$ e $P \to \log(\tan\theta/2)$. Porém, essas soluções matemáticas têm divergências que as tornam irrelevantes para problemas físicos.

- Antes de proceder às soluções, vamos re-escrever as equações acima novamente, usando a mudança de variável:

$$\mu = \cos\theta \quad , \quad \mu : [-1,1] \quad , \quad \text{que leva a} \quad \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R}{dr}\right) + \frac{1}{P}\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{d\,P}{d\mu}\right) = 0$$

Coordenadas esféricas + simetria azimutal



- Vamos agora especificar a constante de separação — e, claro, eu vou fazer isso aqui já sabendo da natureza das soluções. A periodicidade na direção θ implica que a constante de separação deve ser a seguinte:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = \ell(\ell+1) = -\frac{1}{P}\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu}\right)$$

- As soluções da equação radial são muito simples — elas são ***leis de potência***.

$$R_\ell = A_\ell\, r^\ell + B_\ell\, r^{-1-\ell}$$

- As soluções para a função angular $P(\mu) = P(\cos\theta)$ são também bem conhecidas de nós: trata-se dos ***polinômios de Legendre***

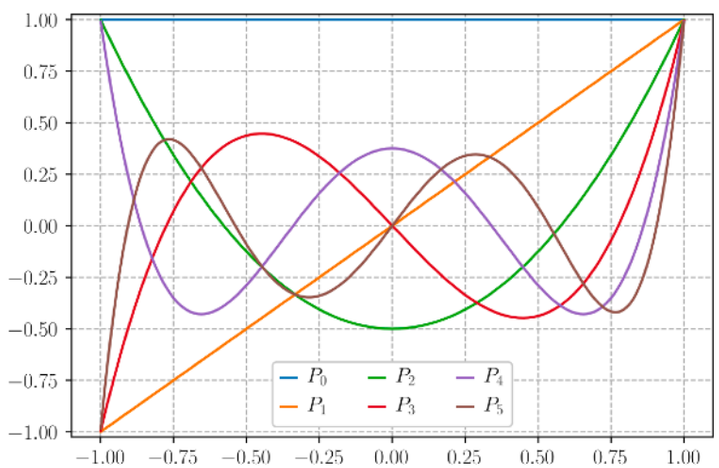
$$P_\ell = \frac{1}{2^\ell\,\ell!}\frac{d^\ell}{d\mu^\ell}\left[(\mu^2-1)^\ell\right] \quad , \quad \text{onde} \quad \ell = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots$$

- O polinômio de Legendre de ordem ℓ é de fato um polinômio de μ, com termos até μ^ℓ . Alguns exemplos:

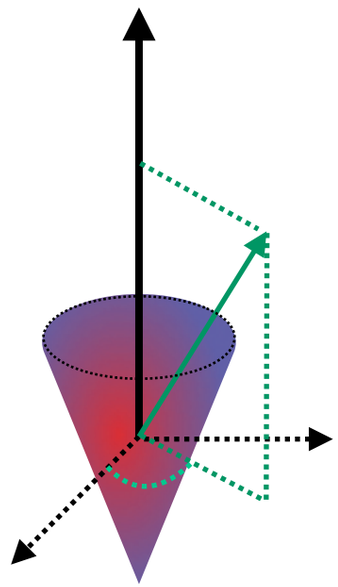
$$P_0 = 1$$
$$P_1 = \mu$$
$$P_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2-1)$$
$$P_3 = \frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu)$$

$$P_\ell(\mu=1) = 1$$
$$P_\ell(\mu=-1) = (-1)^\ell$$

$$\left.\frac{dP_\ell}{d\mu}\right|_{\mu=1} = \frac{1}{2}\ell(\ell+1)$$



Coordenadas esféricas + simetria azimutal



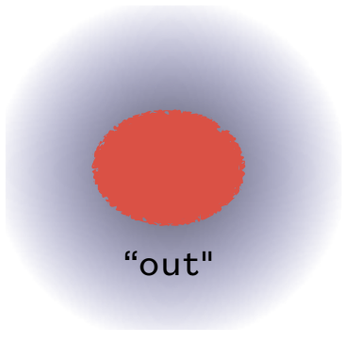
- Os polinômios de Legendre formam uma ***base completa*** para funções no intervalo $\mu \in [-1,1]$, e constituem um ***conjunto completo*** de funções de θ quando há simetria azimutal/axial.
- Esses polinômios são ***ortonormais***, ou seja:

$$\int_{-1}^{1} d\mu\, P_\ell(\mu)\, P_{\ell'}(\mu) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

- Em suma, qualquer solução da equação de Laplace com simetria axial pode ser escrita como:

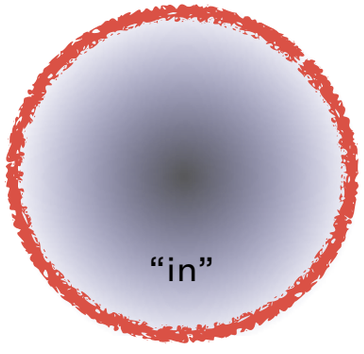
$$f(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell\, r^\ell + B_\ell\, r^{-1-\ell}\right) P_\ell(\cos\theta)$$

- Nós vamos discutir três tipos gerais de problemas:



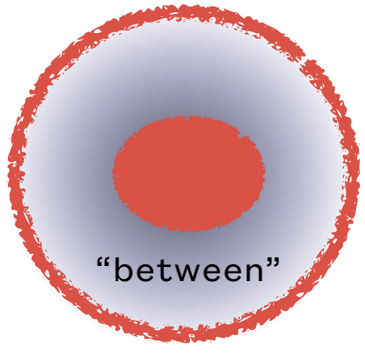
$\lim_{r\to\infty} r^\ell \to \infty$

$\Rightarrow$ Só $r^{-\ell-1}$



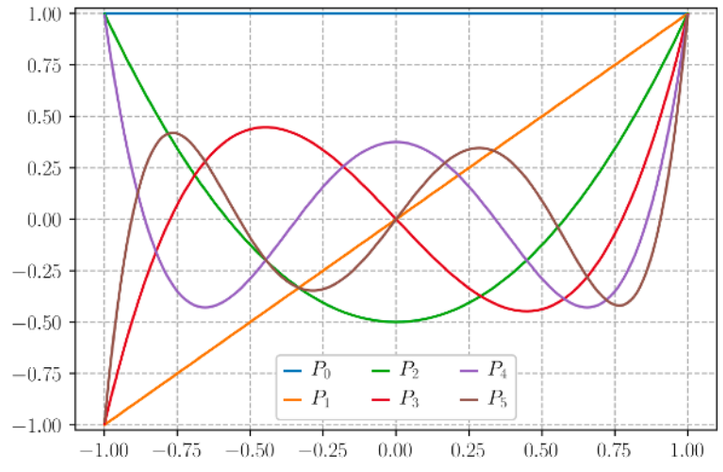
$\lim_{r\to 0} r^{-\ell-1} \to \infty$

$\Rightarrow$ Só r^ℓ



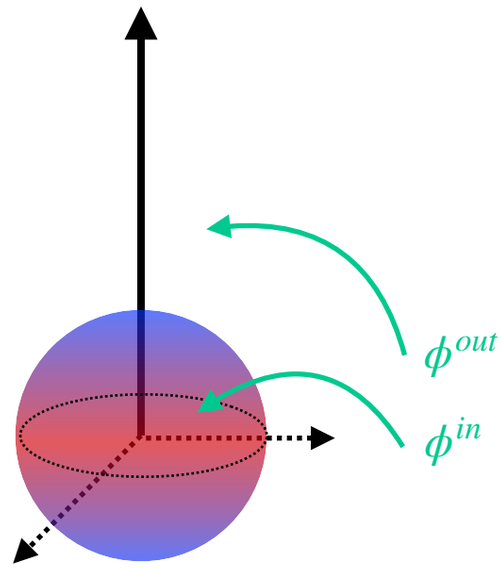
$\Rightarrow$ Tanto r^ℓ

quanto $r^{-\ell-1}$



$\Rightarrow$ Vamos ao Mathematica para visualizar isso melhor

Coordenadas esféricas + simetria azimutal



- Vamos começar com um exemplo simples: uma esfera de raio R_0 com potencial $\phi(r = R_0) = \phi_S \cos^2\theta$. Encontre o potencial em todo o espaço — ***dentro*** e ***fora*** da esfera.
- Vamos começar calculando o ***potencial médio*** na esfera (esse também é chamado de **monopolo** do potencial):

$$\bar{\phi} = \frac{1}{4\pi}\int d^2\Omega\,\phi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\,\phi(\theta,\varphi)$$

$$= \frac{1}{4\pi}2\pi\int_{-1}^{1} d\mu\,\phi(\mu) = \frac{\phi_S}{2}\int_{-1}^{1} d\mu\,\mu^2 = \frac{\phi_S}{2}\frac{\mu^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\phi_S}{3}$$

- De fato, podemos escrever o potencial em termos da expansão acima, nos polinômios de Legendre. Antes de mais nada, note que:

$$\phi(r = R,\mu) = \frac{\phi_S}{3}\times 1 + \frac{2\phi_S}{3}\times\frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) = \frac{\phi_S}{3}P_0(\mu) + \frac{2\phi_S}{3}P_2(\mu)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(r = R,\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\phi_\ell\,P_\ell(\mu) \quad , \quad \text{onde}$$

$\phi_0 = \phi_S/3$, $\phi_2 = 2\phi_S/3$ e todos os outros coeficientes $\phi_\ell \to 0$

- Portanto, a condição de contorno desse exemplo envolve apenas os ***multipolos*** $\ell = 0$ (**monopolo**) e $\ell = 2$ (**quadrupolo**).

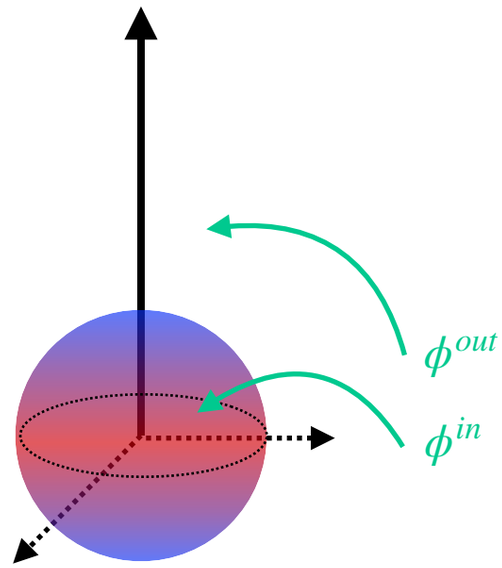
Coordenadas esféricas + simetria azimutal

- Agora podemos partir do fato que a nossa condição de contorno nos diz que:

$$\phi(r=R,\mu) \;=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} \phi_\ell\, P_\ell(\mu) \qquad , \qquad \text{com } \phi_0 = \phi_S/3 \;\; , \;\; \phi_2 = 2\phi_S/3 \;\; \text{e} \;\; \phi_\ell \to 0\,(\ell \neq 0,2)$$

- Mas a nossa solução ***geral***, por separação de variáveis, era:

$$f(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell\, r^\ell + B_\ell\, r^{-1-\ell}\right) P_\ell(\cos\theta)$$



- Nesse momento devemos separar o problema em duas partes: dentro e fora da esfera. Dentro da esfera só utilizamos os modos radiais r^ℓ, que são bem comportados em $r \to 0$; e fora, usamos os modos $r^{-1-\ell}$.

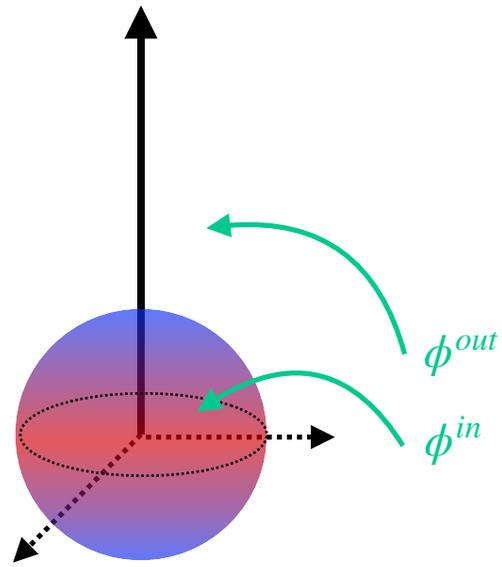
- Agora é simplesmente um problema de ajustar as constantes acima, levando em conta as C.C. Primeiro, fora da esfera, temos:

$$\phi^{out}(r,\mu) \;=\; \left(\frac{r}{R_0}\right)^{-1} \frac{\phi_S}{3} P_0(\mu) + \left(\frac{r}{R_0}\right)^{-3} \frac{2\phi_S}{3} P_2(\mu)$$

- Para o campo dentro da esfera, usando ao invés as funções radiais r^ℓ, temos o resultado:

$$\phi^{in}(r,\mu) \;=\; \left(\frac{r}{R_0}\right)^{0} \frac{\phi_S}{3} P_0(\mu) + \left(\frac{r}{R_0}\right)^{2} \frac{2\phi_S}{3} P_2(\mu)$$

Coordenadas esféricas + simetria azimutal



- Eu vou deixar como um **exercício** para que vocês mostrarem que o campo elétrico ***fora*** da esfera é dado por:

$$\vec{E}^{out} = \left[\frac{\phi_S}{3}\frac{R_0}{r^2} + 2\phi_S\frac{R_0^3}{r^4}P_2(\cos\theta)\right]\hat{r} + 2\phi_S\frac{R_0^3}{r^4}\sin\theta\cos\theta\,\hat{\theta}$$

- Enquanto **dentro** dela temos:

$$\vec{E}^{in} = \left[\frac{4\phi_S}{3}\frac{r}{R_0^2}P_2(\cos\theta)\right]\hat{r} + 2\phi_S\frac{r}{R_0^2}\sin\theta\cos\theta\,\hat{\theta}$$

- Em particular, note que a ***diferença*** entre o ***campo*** fora e o campo dentro é dada por:

$$\Delta\vec{E}_{||} = 0$$

$$|\Delta\vec{E}_{\perp}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\phi_0}{3R_0} + \frac{10\,\phi_0}{3\,R_0}P_2(\cos\theta)$$

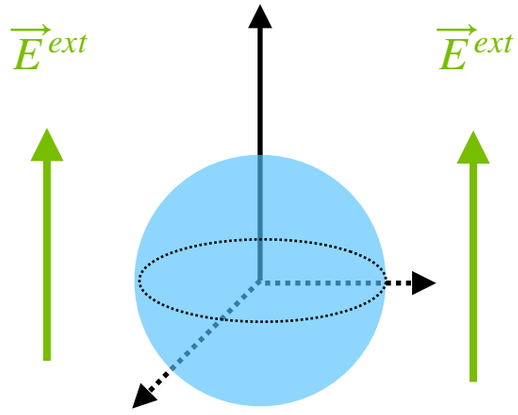
- Mas integrando essa densidade superficial de cargas na superfície da esfera nos dá uma ***carga total não nula,***

$$Q_0 = 4\pi R_0^2\,\sigma = 4\pi\epsilon_0\frac{\phi_S R_0}{3}$$

- O que isso significa é que muito longe dessa esfera o campo enxergamos uma carga Q, e o campo elétrico é dado aproximadamente por:

$$\vec{E}^{out} \to \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$!!!

Coordenadas esféricas + simetria azimutal



- Um outro problema interessante com simetria azimutal é o de uma ***esfera* condutora** sem carga que é colocada na presença de um ***campo externo uniforme***. (Você pode imaginar um capacitor muito grande, e a esfera fica em algum lugar entre as placas do capacitor.)

- Nos devemos, é óbvio, escolher um eixo z ao longo da direção do campo, ou seja:

$$\vec{E}^{ext} = E_0 \hat{z} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi^{ext} = -E_0 z + \text{const}.$$

  Claramente, a esfera condutora vai acabar mudando o campo na região próxima da esfera (devido às cargas do condutor que vão se mover para fazer o campo se anular dentro do condutor). Porém, longe da esfera devemos voltar a ter somente o campo externo.

- Como a esfera é um condutor, não pode haver diferença de potencial entre nenhum ponto dentro dessa esfera, portanto:

$$\phi(r = R_0) = \text{const} \rightarrow 0$$

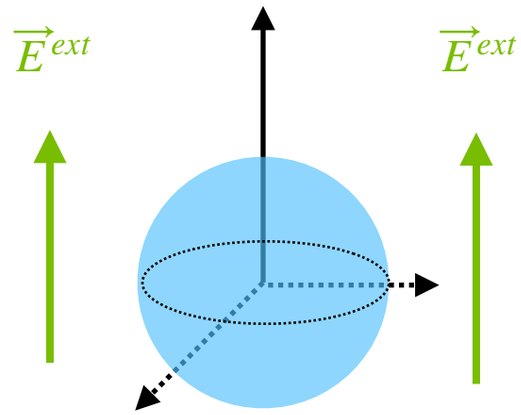
- Devido à simetria azimutal/axial, podemos tentar a solução geral encontrada anteriormente:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell \, r^\ell + B_\ell \, r^{-1-\ell} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

- Porém, agora não temos um problema "clássico" de uma solução "fora" do sistema: afinal, a condição de contorno muito longe da esfera não é tal que $\vec{E} \rightarrow 0$, na verdade temos $\vec{E} \rightarrow \vec{E}^{ext}$!

- Isso significa que precisamos ver com mais cuidado se de fato devemos desprezar todas as funções r^ℓ da solução externa…

Coordenadas esféricas + simetria azimutal



- Ou seja, nesse problema precisamos levar em conta as condições de contorno para fixar os coeficientes das funções de base. Em termos do potencial, a condição muito longe da esfera é:

$$\phi(r \to \infty) \to \phi^{ext} = -E_0\, z + \text{const}\,.$$

- Agora, a expressão completa para a solução via separação de variáveis é:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell\, r^\ell + B_\ell\, r^{-1-\ell}\right) P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \left(A_0\, r^0 + B_0\, r^{-1-0}\right) \times 1 + \left(A_1\, r^1 + B_1\, r^{-1-1}\right) \times \cos\theta + \ldots$$

- Mas olhe o que ocorre com o termo $\ell = 1$ term (chamado de **dipolo**). Uma parte da solução tem exatamente a forma:

$$r^1\, P_1(\cos\theta) = r\cos\theta = z$$

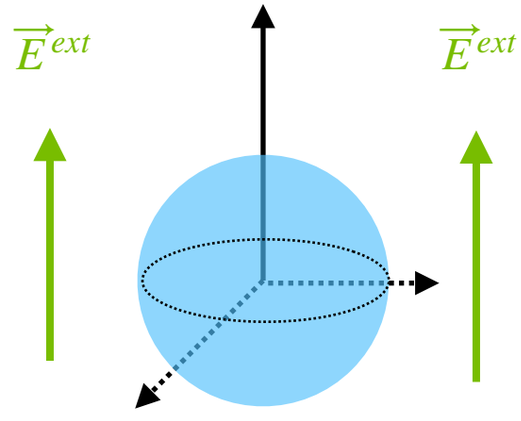
Ou seja, se tomamos $A_1 = -E_0$, isso satisfaz a condição de contorno no infinito espacial!

- Além disso, o termo B_0 corresponde a um potencial que vai como r^{-1}, o que só ocorreria se a esfera tivesse uma carga líquida não-nula. Mas como a esfera é neutra, então $B_0 = 0$.

- Portanto, nós já pudemos especificar que $A_1 \to -E_0$, e $B_0 \to 0$ — e além disso, o termo A_0 é irrelevante porque um potencial constante não afeta o campo.

- É fácil ver que todos os termos com $\ell \geq 2$ se anulam nesse problema.

Coordenadas esféricas + simetria azimutal



- Nos resta, ao final, a tarefa de ajustar a condição de contorno:

$$\phi(r = R_0, \theta) = \left(A_1 R_0^1 + B_1 R_0^{-2}\right) P_1(\cos\theta) = \left(-E_0 R_0^1 + B_1 R_0^{-2}\right) \times \cos\theta = 0$$

o que nos leva a:

$$B_1 = E_0 R_0^3$$

- Portanto, o potencial tem apenas o termo de dipolo ($\ell = 1$):

$$\phi(r, \theta) = \left(-E_0\, r + E_0 \frac{R_0^3}{r^2}\right) \cos\theta$$

- Um cálculo muito simples leva à expressão para o campo elétrico:

$$\overrightarrow{E} = E_0 \left(1 + 2\frac{R_0^3}{r^3}\right) \cos\theta\ \hat{r} - E_0 \left(1 - \frac{R_0^3}{r^3}\right) \sin\theta\ \hat{\theta}$$

- É evidente que, se $r = R_0$, o campo é puramente $\perp$ à esfera. Exercício: calcule a densidade de carga superficial que é induzida na esfera, e cheque que (1) essa densidade de carga tem apenas um dipolo (só os coeficientes com $\ell = 1$ são não nulos), e (2) que se tivermos essa densidade de carga sozinha, sem o campo externo, então o campo dentro da esfera seria constante.

Expansão Multipolar

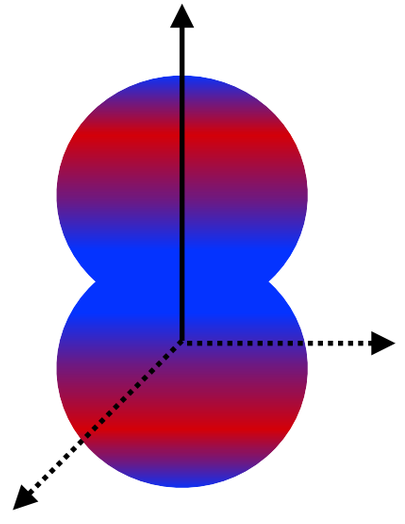
- Aprendemos algumas lições importantes da expansão em polinômios de Legendre e suas funções radiais associadas. Para as soluções mais comuns, do tipo "out" , (e sem considerar condições de contorno esquisitas), temos a seguinte estrutura para a dependência angular e radial:

$$\text{Monopolo } (\ell = 0) \quad : \quad \phi \sim \frac{1}{r} \quad , \quad E \sim \frac{1}{r^2}$$

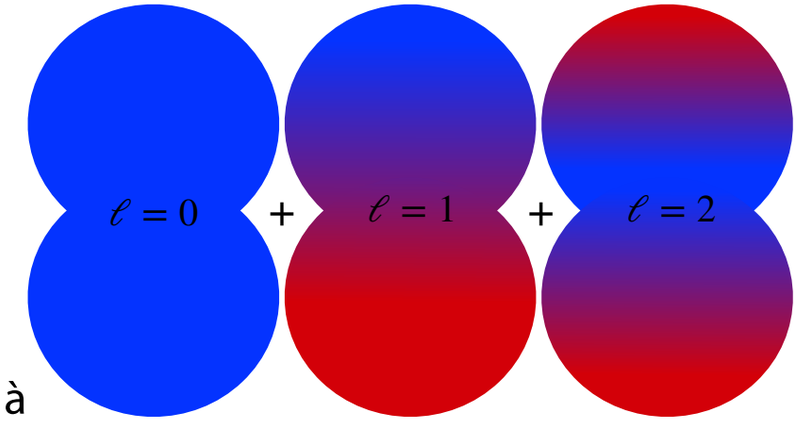
$$\text{Dipolo } (\ell = 1) \quad : \quad \phi \sim \frac{1}{r^2} \quad , \quad E \sim \frac{1}{r^3}$$

$$\text{Quadrupolo } (\ell = 2) \quad : \quad \phi \sim \frac{1}{r^3} \quad , \quad E \sim \frac{1}{r^4}$$

etc.



=



+ …

- A principal "característica" que permanece em grandes distâncias é o ***monopolo***; mas à medida que nos aproximamos da fonte, o ***dipolo*** começa a aparecer; depois, o quadrupolo; e assim por diante.

- Portanto, os detalhes mais "finos", inomogeneidades, anisotropias, pequenas concentrações de carga aqui e ali, se revelam para nós em termos desses **multipolos!**

Próxima aula:

- Exemplos e exercícios: coordenadas esféricas
- Exemplos e exercícios: expansão multipolar
- Expansão multipolar sem simetria axial: os esféricos harmônicos

- Leitura:

  Griffiths, Cap. 3.3-3.4

  Jackson, Caps. 3 e 4