LISTA 1 DE MAP2220 - BMAC 2021

Questão 1 Considere uma tabela de $n+1$ pontos, $(x_j, y_j),\ 0 \leq j < n$, com $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$. Determine o polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a k, com $k < n$, que melhor aproxima essa tabela, pelo MMQ, em relação ao produto escalar $\langle f|g\rangle = \sum_{\ell=0}^{n} f(x_\ell)g(x_\ell)$.

(i) Prove que, se $p(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ é este polinômio, então $a = [a_0\ a_1\ \ldots\ a_k]^t$ é a solução do sistema linear $Ba = c$, em que $B = [b_{ij}],\ 0 \leq i \leq k,\ 0 \leq j \leq k$, é a matriz $(k+1)\times(k+1)$ com $b_{ij} = \sum_{\ell=0}^{n} x_\ell^{i+j}$ e $c = [c_j], 0 \leq j \leq k$ é o vetor coluna de $k+1$ linhas com $c_j = \sum_{\ell=0}^{n} x_\ell^j y_\ell$.

(ii) Mostre que se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^k & x_1^n & \ldots & x_n^k \end{bmatrix} \text{ e } y = [y_0\ y_1\ \ldots\ y_k]^t.$$

então a é a solução do sistema $A^t a = y$.

Sugestão: Mostre que $AA^t = B$ e depois...

Questão 2 Suponha que a tabela $(x_j, y_j),\ 1 \leq j \leq 10$ tem $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$ e também satisfaz $y_i \neq y_j$, se $i \neq j$.

Admita que deve existir uma relação linear entre as variáveis x e y, ou seja, deveriam existir α e β reais tais que $y = \alpha + \beta x$.

Decidir se as frases abaixo são falsas ou verdadeiras.

(i) Como $y_i \neq y_j$, se $i \neq j$, então ao aproximar a tabela dada por um polinômio de grau menor ou igual a 1 pelo MMQ (e encontrar aproximações para α e β) vai-se encontrar um polinômio $y = a+bx$ que não é constante.

(ii) Como $y_i \neq y_j$, se $i \neq j$, é possível inverter a tabela dada e determinar a função do tipo $x = cy + d$ que melhor aproxima a *tabela invertida* pelo MMQ. Nesse caso as funções determinadas nos itens (i) e (ii) são funçoes inversas entre si.

Questão 3 Considere a tabela

x_j	-0.2	-0.15	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1	0.15	0.2
y_j	-1	$0,9$	0.65	0.0	z	2	-0.9	-0.1	0.025

em que z é um número real.

(i) Seja p_k o polinômio de grau menor ou igual a k que melhor aproxima a tabela dada. Prove que o valor de z afeta linearmente quem é p_k.

(ii) Determine p_k para $k = 1,\ 2,\ 3$. Chame de e_k o erro quadrático e determine o valor de z que minimiza esse erro em cada caso.

(iii) Cosidere $z = -1.575$ e considere a "tabela invertida", isto é, a tabela (y_j, x_j). Determine o polinônio $q_1(y) = b_0 + b_1 x$ de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima pelo MMQ essa "tabela invertida" e calcule o erro quadrático. Compare esses resultados com os obtidos no item anterior para $k = 1$.

Questão 4 No espaço vetorial V das funções contínuas $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ considere o produto interno $\langle f|g\rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Suponha que $p_0(x),\ p_1(x), \ldots, p_n(x)$ são polinômios tais que $p_j(x)$ tem grau j, para todo $0 \leq j \leq n$ e $\langle p_i|p_j\rangle = 0$, se $i \neq j$.

(i) Mostre que em relação ao produto interno $\langle u|v\rangle_W = \int\limits_{-\pi}^{\pi} u(t)v(t)\,dt$ no espaço W das funções contínuas $h : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, os polinômios

$$q_j(t) = p_j(\tfrac{t}{2\pi} + \tfrac{1}{2}),\ -\pi \leq t \leq \pi,\ (0 \leq j \leq n),$$

tem grau j e são ortogonais, ou seja, $\langle q_i|q_j\rangle_W = 0$, se $i \neq j$

(ii) Aproxime $f(x) = \frac{1}{x},\ 1 \leq x \leq 2$ por um polinômio de grau menor ou igual a 2 em $[1,2]$ pelo MMQ, em relação ao produto escalar usual.