Definição de Integral

Algumas definições.

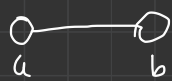
- Intervalos e conj. ordinários

$[a,b]$ $\qquad a \leq x \leq b$

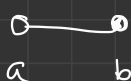
$\uparrow \mathbb{R}$

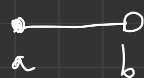
$a \leq b$

intervalo fechado



$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$

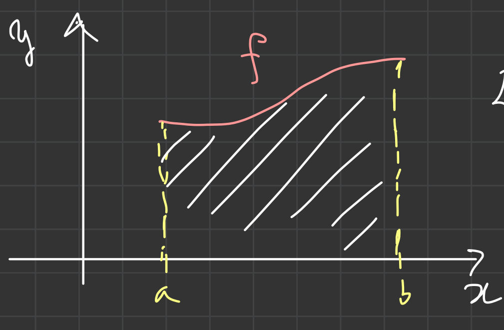




$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

- Conj. ordinário é a região do plano delimitada pelo gráfico de uma função não negativa $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ e o eixo-x.



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ x \in [a,b] \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$

Partição e funções escadas

$\mathbb{N}$ inteiros positivos

Dizemos que $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é uma partição para $[a,b]$ em n-subintervalos se:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

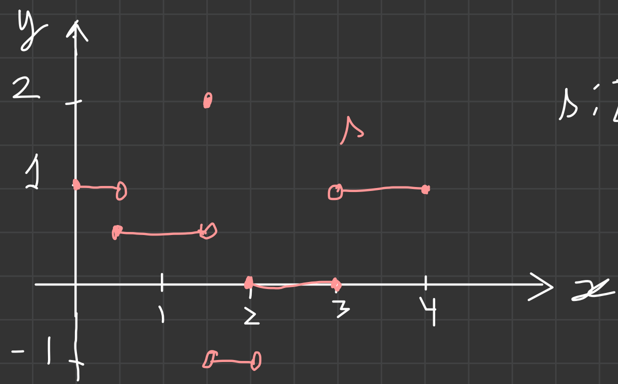
$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n] \subset [a,b]$$

subintervalos

Dizemos $s : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ é uma função escada se $\exists$ uma partição P de $[a,b]$ tal que s é constante em cada subintervalo, i.e.,

$P = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$ tal que

$$s(x) = c_i \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i).$$



$s : [0,4] \longmapsto \mathbb{R}$

Se $P = \{0, 1/2, 3/2, 2, 3, 4\}$ temos

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, 1/2) \\ 1/2 & \text{se } x \in (1/2, 3/2) \\ -1 & \text{se } x \in (3/2, 2) \\ 0 & \text{se } x \in (2, 3) \\ 1 & \text{se } x \in (3, 4) \end{cases}$$

$\therefore s$ é escada

Se P é uma partição de um intervalo podemos obter uma nova partição P' incluindo um ponto a P. P' é refinamento de P $(P' \supsetneq P)$.

Algumas propriedades.

1) A soma de funções escadas é uma função escada.

$s_1, s_2 : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ escadas

então $s_1(x) + s_2(x)$ é escada

$\exists$ P_1 e P_2 partições de $[a,b]$ tal que

$s_k(x) = c_i^k \quad x \in (x_{i-1}^k, x_i^k) \qquad k = 1,2.$

Note que $P = P_1 \cup P_2$ é um refinamento de P_1 e P_2

s_1 e s_2 são constantes nos subintervalos de P

$\rightarrow$ $s(x) = s_1(x) + s_2(x)$ é constante em tais subintervalos $\rightarrow$ s é escada $\boxtimes$

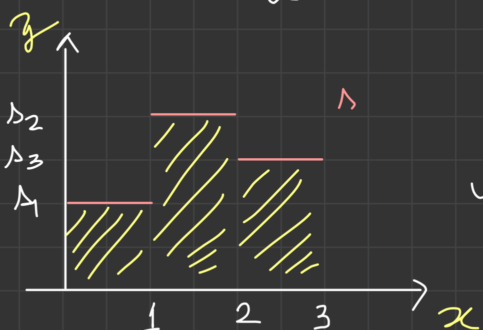
2) Exercício Verifique que o produto de funções escada é escada.

Definição de integral (para funções escada)

Seja $s : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ função escada.

A integral de s de a a b é definida por:

$$\int_a^b s(x)\,dx := \sum_{i=1}^{n} s_i (x_i - x_{i-1}) \in \mathbb{R}$$



$$\int_0^3 s(x)dx = s_1(x_1 - x_0) + s_2(x_2 - x_1) + s_3(x_3 - x_2)$$

$P = \{0, 1, 2, 3\}$

Obs: (i) Se s é não negativa a integral de s é igual a área delimitada por seu gráfico e o eixo x.

(ii) Note que a definição de integral independe da partição P

Propriedades $s, t : [a,b] \to \mathbb{R}$ escadas, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1) $$\int_a^b \{s(x) + t(x)\}\, dx = \int_a^b s(x)\, dx + \int_a^b t(x)\, dx$$

dem. Seja $P = P_s \cup P_t$ P_i partição de $i = s, t$.

$P = \{x_0, \dots, x_n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b \{s(x) + t(x)\}\, dx = \sum_{i=1}^{n} (s_i + t_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \int_a^b s(x)\, dx + \int_a^b t(x)\, dx \quad \blacksquare$$

2) $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

dem
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha f_i (x_i - x_{i-1})$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - x_{i-1}) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

$\blacksquare$

3) $$\int_a^b \{ \alpha f(x) + \beta t(x) \}\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b t(x)\,dx$$

4) Se $f(x) < t(x)$ $\forall\, x \in [a,b]$ então
$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b t(x)\,dx.$$ (Exercício)

5) $a < c < b$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
(Exercício)

6) (Invariancia sobre translação)
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx \quad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

dem. $t(x) = s(x-c) \qquad x \in [a+c, b+c]$

$$x - c \in [a,b] \quad \text{ie} \quad a \leq x - c \leq b$$

$$\therefore a + c \leq x \leq b + c$$

$\therefore$ t está bem definida e é escada pois s é escada.

$\exists P = \{x_0, \dots, x_n\}$ tq t é const em cada (x_{i-1}, x_i)

$$\int_{a+c}^{b+c} t(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\,dx = \sum_{i=1}^{n} s_i(x_i + c - x_{i-1} - c)$$

$$x - c \in (x_{i-1}, x_i) \iff x \in (x_{i-1}+c, x_i + c)$$

$$x_{i-1} < x - c < x_i \iff x_{i-1} + c < x < x_i + c$$

$$\therefore \int_{a+c}^{b+c} t(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b s(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

7) (Expansão ou contração do intervalo de integração)

$$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right)dx = k\int_a^b s(x)\,dx \qquad \underline{k > 0}$$

dem. $t(x) = s\left(\frac{x}{k}\right)$ bem definida e é escada

$$a \leq \frac{x}{k} \leq b \iff ak \leq x \leq bk$$

Mas se $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ é partição tal que s é constante nos subintervalos, então

$$s(x) = \text{const.} \quad x \in (x_{i-1}, x_i) \quad \text{então}$$

$$t(x) = s\left(\frac{x}{k}\right) \text{ é constante em } x \in (kx_{i-1}, kx_i)$$

já que $\frac{x}{k} \in (x_{i-1}, x_i)$ para algum i

$$\iff x_{i-1} < \frac{x}{k} < x_i \qquad k > 0$$

$$\iff kx_{i-1} < x < kx_i .$$

$$\int_{ak}^{bk} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = \sum_{i=1}^{n} s_i k(x_i - x_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{n} s_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= k \int_a^b s(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

OBS: (i) $a < b$ $\qquad \displaystyle\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$.

(ii) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(iii) Mostre que 3) vale $\forall c \in \mathbb{R}$

(iv) Na propriedade 7) podemos tomar $\underline{k < 0}$.

(Exercício)