

Um Critério de Convergência Global para o Método de Newton

Nelson Kuhl

IME/USP

2 de setembro de 2021

A interpretação geométrica do Método de Newton como método das tangentes sugere o seguinte resultado, baseado na convexidade/concavidade da função:

Teorema 1

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável até ordem 2 e suponha que:

- (i) $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- (ii) f' não se anula em $[a, b]$;
- (iii) f'' não troca de sinal em $[a, b]$.

Então, é possível escolher um dos extremos do intervalo de modo que, para qualquer x_0 escolhido entre ele e a única raiz $\bar{x}$ de f em $[a, b]$, a sequência gerada pelo método de Newton converge monotonamente para $\bar{x}$.

Demonstração: Devido à continuidade, há quatro casos possíveis:

$$f'(x) > 0 \text{ e } f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (1)$$

$$f'(x) < 0 \text{ e } f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (2)$$

$$f'(x) < 0 \text{ e } f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (3)$$

$$f'(x) > 0 \text{ e } f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (4)$$

Demonstração: Devido à continuidade, há quatro casos possíveis:

$$f'(x) > 0 \text{ e } f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (1)$$

$$f'(x) < 0 \text{ e } f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (2)$$

$$f'(x) < 0 \text{ e } f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (3)$$

$$f'(x) > 0 \text{ e } f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (4)$$

O caso (2) pode ser reduzido ao caso (1) trocando-se f por $-f$. E os casos (3) e (4) podem ser reduzidos aos casos (1) e (2), respectivamente, trocando-se x por $a + b - x$.

Demonstração: Devido à continuidade, há quatro casos possíveis:

$$f'(x) > 0 \text{ e } f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (1)$$

$$f'(x) < 0 \text{ e } f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (2)$$

$$f'(x) < 0 \text{ e } f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (3)$$

$$f'(x) > 0 \text{ e } f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in [a, b] \quad (4)$$

O caso (2) pode ser reduzido ao caso (1) trocando-se f por $-f$. E os casos (3) e (4) podem ser reduzidos aos casos (1) e (2), respectivamente, trocando-se x por $a + b - x$. Portanto, demonstraremos apenas o caso (1).

Escolha $x_0 \in (\bar{x}, b]$. Como f é positiva nesse subintervalo e $f' > 0$ sempre, temos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

Escolha $x_0 \in (\bar{x}, b]$. Como f é positiva nesse subintervalo e $f' > 0$ sempre, temos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

Por outro lado,

$$x_1 - \bar{x} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \bar{x} = \frac{f'(x_0)(x_0 - \bar{x}) - f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Escolha $x_0 \in (\bar{x}, b]$. Como f é positiva nesse subintervalo e $f' > 0$ sempre, temos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

Por outro lado,

$$x_1 - \bar{x} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \bar{x} = \frac{f'(x_0)(x_0 - \bar{x}) - f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Usando expansão em Taylor obtemos

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_0 + \bar{x} - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(\bar{x} - x_0) + \frac{1}{2}f''(t)(\bar{x} - x_0)^2,$$

onde $t \in (\bar{x}, x_0)$.

Escolha $x_0 \in (\bar{x}, b]$. Como f é positiva nesse subintervalo e $f' > 0$ sempre, temos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

Por outro lado,

$$x_1 - \bar{x} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \bar{x} = \frac{f'(x_0)(x_0 - \bar{x}) - f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Usando expansão em Taylor obtemos

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_0 + \bar{x} - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(\bar{x} - x_0) + \frac{1}{2}f''(t)(\bar{x} - x_0)^2,$$

onde $t \in (\bar{x}, x_0)$. Portanto

$$x_1 - \bar{x} = \frac{1}{2} \frac{f''(t)}{f'(x_0)} (\bar{x} - x_0)^2 \geq 0,$$

pois $f' > 0$ e $f'' \geq 0$.

Logo, se $x_0 \in (\bar{x}, b]$, então $x_0 > x_1 \geq \bar{x}$. Por indução segue que a sequência $\{x_k\}_{k \geq 0}$ gerada pelo método de Newton é monótona decrescente e limitada inferiormente por $\bar{x}$, e portanto é convergente para um limite $\alpha \in [\bar{x}, x_0)$.

Logo, se $x_0 \in (\bar{x}, b]$, então $x_0 > x_1 \geq \bar{x}$. Por indução segue que a sequência $\{x_k\}_{k \geq 0}$ gerada pelo método de Newton é monótona decrescente e limitada inferiormente por $\bar{x}$, e portanto é convergente para um limite $\alpha \in [\bar{x}, x_0)$. Como a função $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ que calcula as iterações do Método de Newton é contínua, temos:

$$\phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \alpha,$$

mostrando que α é um ponto fixo de ϕ em $[a, b]$.

Logo, se $x_0 \in (\bar{x}, b]$, então $x_0 > x_1 \geq \bar{x}$. Por indução segue que a sequência $\{x_k\}_{k \geq 0}$ gerada pelo método de Newton é monótona decrescente e limitada inferiormente por $\bar{x}$, e portanto é convergente para um limite $\alpha \in [\bar{x}, x_0)$. Como a função $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ que calcula as iterações do Método de Newton é contínua, temos:

$$\phi(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \alpha,$$

mostrando que α é um ponto fixo de ϕ em $[a, b]$. Porém,

$$\phi(\alpha) = \alpha \iff \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha \iff f(\alpha) = 0 \iff \alpha = \bar{x}$$

pois $\bar{x}$ é a única raiz de f em $[a, b]$.



Observações

- Nos casos (1) e (2), escolhemos $x_0 \in (\bar{x}, b]$, e a sequência é monótona decrescente;

Observações

- Nos casos (1) e (2), escolhemos $x_0 \in (\bar{x}, b]$, e a sequência é monótona decrescente;
- nos casos (3) e (4), escolhemos $x_0 \in [a, \bar{x})$ e a sequência é monótona crescente;

Observações

- Nos casos (1) e (2), escolhemos $x_0 \in (\bar{x}, b]$, e a sequência é monótona decrescente;
- nos casos (3) e (4), escolhemos $x_0 \in [a, \bar{x})$ e a sequência é monótona crescente;
- em qualquer caso, se escolhermos x_0 no subintervalo trocado, x_1 estará do outro lado de $\bar{x}$. Caso x_1 pertença a $[a, b]$, a partir dele a sequência convergirá para $\bar{x}$, com a monotonicidade pertinente;

Observações

- Nos casos (1) e (2), escolhemos $x_0 \in (\bar{x}, b]$, e a sequência é monótona decrescente;
- nos casos (3) e (4), escolhemos $x_0 \in [a, \bar{x})$ e a sequência é monótona crescente;
- em qualquer caso, se escolhermos x_0 no subintervalo trocado, x_1 estará do outro lado de $\bar{x}$. Caso x_1 pertença a $[a, b]$, a partir dele a sequência convergirá para $\bar{x}$, com a monotonicidade pertinente;
- para entender estas observações, **esboce gráficos** para os quatro casos.