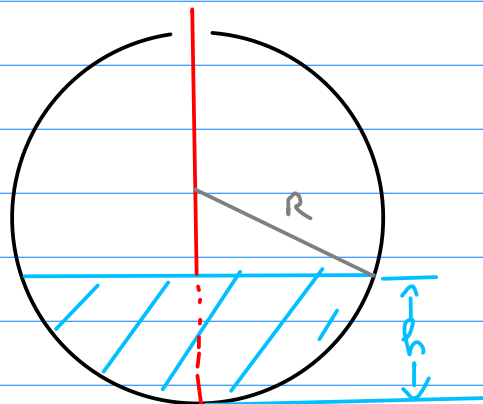
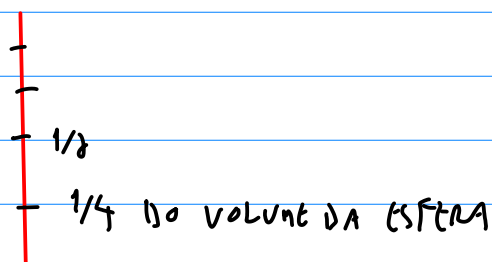


PROBLEMA: TANQUE ESFÉRICO DE RAIO R 

VARETA

CONSTRUIR UMA ESCALA NA VARETA: PARA ALGUNS VALORES ESPECÍFICOS DAS FRAÇÕES DO VOLUME OCUPADAS PELO LÍQUIDO, QUERO FAZER UMA MARCA NA VARETA



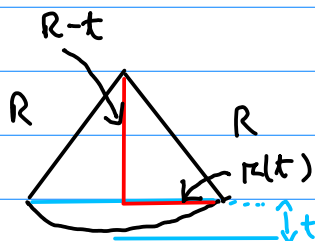
QUAL É A ALTURA h CORRESPONDENTE A UMA FRAÇÃO α DO VOLUME TOTAL OCUPADA PELO LÍQUIDO?

$V(h)$: VOLUME OCUPADO PELO LÍQUIDO A UMA ALTURA h

V_T : VOLUME TOTAL DA ESFERA $(= \frac{4}{3} \pi R^3)$

DETERMINAR h TAL QUE $\frac{V(h)}{V_T} = \alpha$ (ONDE $0 < \alpha < 1$)

VOLUME DA CALOTA ESFÉRICA DE ALTURA h (EM UMA ESFERA DE RAIO R)



ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL A UMA ALTURA t :

$$A(t) = \pi \cdot r(t)^2$$

$$V(h) = \int_0^h A(t) \cdot dt ;$$

$$R^2 = r(t)^2 + (R-t)^2$$

$$r(t)^2 = R^2 - (R-t)^2 = R^2 - (R^2 - 2Rt + t^2) = 2Rt - t^2$$

$$V(h) = \int_0^h \pi r(t)^2 dt = \pi \int_0^h (2Rt - t^2) dt = \pi \left(R h^2 - \frac{h^3}{3} \right)$$

$$\frac{V(h)}{V_T} = \frac{\pi(Rh^2 - \frac{h^3}{3})}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{4} \left[3\left(\frac{h}{R}\right)^2 - \left(\frac{h}{R}\right)^3 \right]$$

VAMOS DEIXAR O PROBLEMA FORMULADO EM TERMOS DA RAZÃO ENTRE A ALTURA E O DIÂMETRO $d = 2R$ DA ESFERA:

$$\frac{V(h)}{V_T} = \frac{1}{4} \left[3\left(\frac{2h}{d}\right)^2 - \left(\frac{2h}{d}\right)^3 \right] = 3\left(\frac{h}{d}\right)^2 - d\left(\frac{h}{d}\right)^3$$

$$x = \frac{h}{d} ; \quad \frac{V(h)}{V_T} = 3x^2 - dx^3$$

DADO $0 < \alpha < 1$, OBTER x TALQUE $3x^2 - dx^3 = \alpha$

OBS A EQUAÇÃO ACIMA TEM 3 SOLUÇÕES:

UMA NEGATIVA, UMA ENTRE ZERO E UM,
E UMA MAIOR DO QUE UM

A SOLUÇÃO QUE NOS INTERESSA ESTÁ EM $(0, 1)$. NESTE INTERVALO, TEMOS UMA ÚNICA SOLUÇÃO. VAMOS REESCREVER A EQUAÇÃO ACIMA NA FORMA

$$x^3 - 1.5x^2 + 0.5\alpha = 0$$

$$f(x) = 0, \text{ onde } f(x) = x^3 - 1.5x^2 + 0.5\alpha$$

VAMOS DETERMINAR x USANDO O MÉTODO DE NEWTON,
QUANDO $\alpha = 0.25$

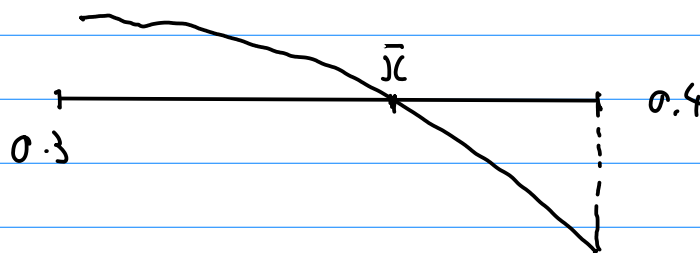
$$f(x) = x^3 - 1.5x^2 + 0.125 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$

$$f''(x) = 6x - 3 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$f(0.3) > 0 ; f(0.4) < 0$$

NO INTERVALO $[0.3, 0.4]$, $f' < 0$ E $f'' < 0$



$x_0 = 0.4 \Rightarrow$ SÉC. MONÓTONA DECRESCENTE USANDO NEWTON

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 1.5x^2 + 0.125}{3x^2 - 3x}$$

$$x_0 = 0.4$$

$$x_1 = \phi(x_0) = 0.329166666666667$$

$$x_2 = \phi(x_1) = 0.326357985865416$$

$$x_3 = \phi(x_2) = 0.326351822363075$$

$$x_4 = \phi(x_3) = 0.32635182233070$$

$$x_5 = x_4 \text{ (DENTRO DA PRECISÃO USADA)}$$

$$\text{OBS: } f(x_5) \simeq 1.39 \times 10^{-17}$$

$$f / \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\frac{h}{\alpha} \simeq 0.326352$$