EESC · USP
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

FUNDAMENTOS DE MECÂNICA DO CONTÍNUO APLICADA A SÓLIDOS

INTRODUÇÃO

Forças aplicadas a um corpo provocam movimentos e alterações de forma do corpo sólido

Caso a posição relativa entre dois pontos do corpo seja alterada diz-se que ocorreu uma deformação

Caso a distância entre todos os pares de pontos permaneça constante diz-se que ocorreu um movimento de corpo rígido

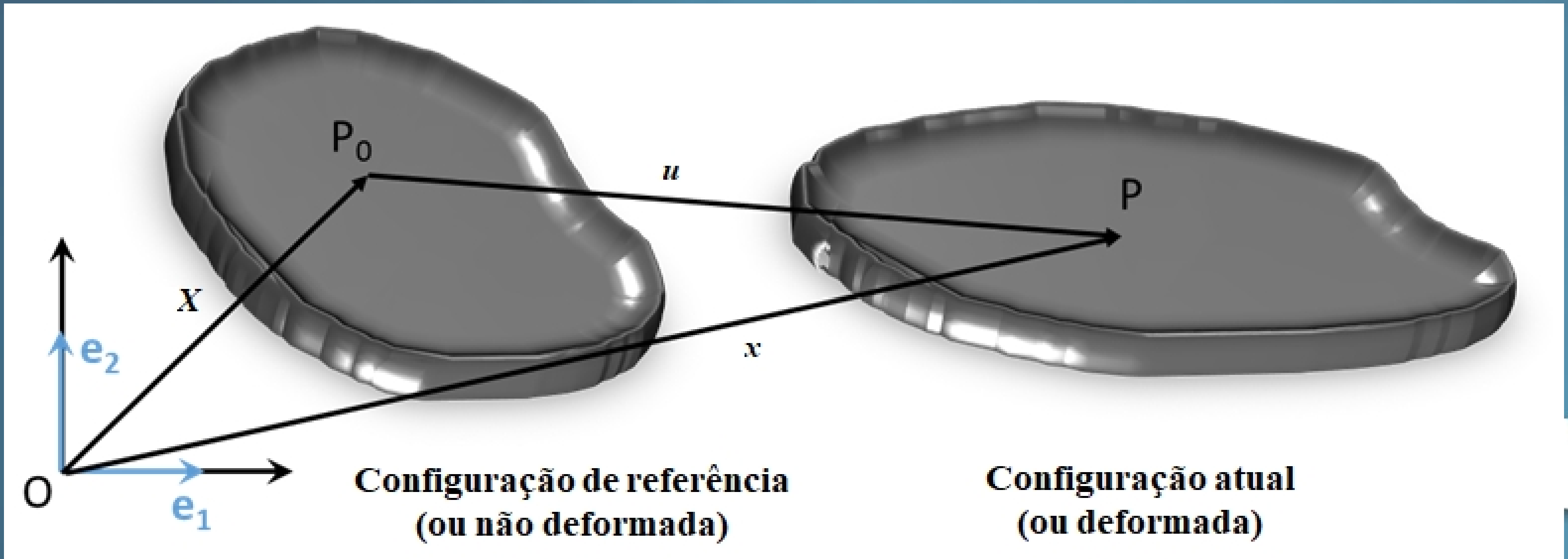
O deslocamento consiste em translação e rotação

A análise de deformações estuda as deformações de um corpo contínuo independente do comportamento de seu material

Deformações elásticas e plásticas são tratadas igualmente

INTRODUÇÃO

- Cinemática é o estudo do movimento desconsiderando as forças;
- Adote um sistema cartesiano com origem O e base e_i;
- O tempo é medido a partir de t=0;



INTRODUÇÃO

Abordagem Lagrangeana $X = X(x, t)$

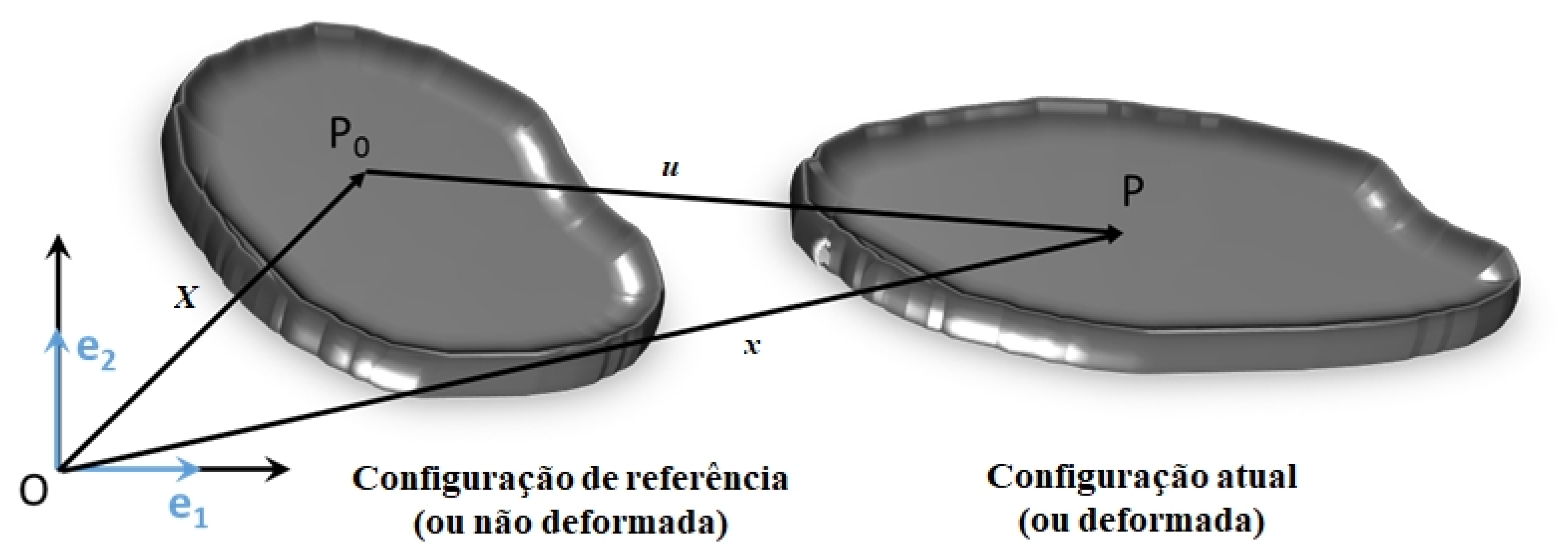
(vetor posição na configuração de referência)

$$X_R = X(x_i, t), \ \ (i, R = 1, 2, 3)$$

Abordagem Euleriana $x = x(X, t)$

(vetor posição na configuração atual)

$$x_i = x(X_R, t), \ \ (i, R = 1, 2, 3)$$



X_R é denominda coordenadas do material

x_i é denominada coordenadas espaciais

INTRODUÇÃO

Descrição de deformações em corpos contínuos:

- ✓ **Abordagem Lagrangiana: a posição de uma partícula antes da deformação é a variável independente**
- ✓ **Abordagem Euleriana: a posição de uma partícula no instante de atual (após a deformação) é a variável independente**
- ✓ **Descrição da relação entre deformação e deslocamento pode ser feita de acordo com as duas abordagens**
- ✓ **Para pequenas deformações o resultado das duas abordagens coincidem**

INTRODUÇÃO

Deslocamento e Velocidade

O vetor deslocamento típico de uma partícula é: $\mathrm{u} = \mathrm{x} - \mathrm{X}$

Na abordagem Lagrangeana, o vetor deslocamento ***u*** é função do vetor posição ***X*** e do tempo decorrido ***t***:

$$\mathrm{u}(\mathrm{X},t) = \mathrm{x}(\mathrm{X},t) - \mathrm{X}$$

Na abordagem Euleriana, o vetor deslocamento ***u*** é função do vetor posição ***x*** e do tempo decorrido ***t***:

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},t) = \mathrm{x} - \mathrm{X}(\mathrm{x},t)$$

Como a posição *X* é constante, na abordagem Lagrangeana, o vetor velocidade fica descrito como:

$$\mathrm{v}(\mathrm{X},t) = \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{X},t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{x}(\mathrm{X},t)}{\partial t}$$

$$v_i(X_R,t) = \frac{\partial x_i(X_R,t)}{\partial t}$$

Na abordagem Euleriana, é necessário expressar *v* em termos de *x*.

INTRODUÇÃO

Seja ϕ um determinado campo escalar (por ex. Temperatura) que varia no espaço e tempo. Pode-se considerar essa propriedade como sendo função de *t* e *X* (abordagem Lagrangeana), ou *t* e *x* (abordagem Euleriana)

$$\phi = G(X_R, t) = g(x_i, t)$$

Na abordagem Lagrangeana, *X* é constante, então:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \dot{\phi} = \frac{\partial \phi\left(X_R, t\right)}{\partial t}$$

Entretanto, na abordagem Euleriana:

$$\phi = g\left(x_i\left(X_R, t\right), t\right) = g\left(x_1\left(X_R, t\right), x_2\left(X_R, t\right), x_3\left(X_R, t\right), t\right)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial g\left(x_i, t\right)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1\left(X_R, t\right)}{\partial t} + \frac{\partial g\left(x_i, t\right)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2\left(X_R, t\right)}{\partial t} + \frac{\partial g\left(x_i, t\right)}{\partial x_3}\frac{\partial x_3\left(X_R, t\right)}{\partial t} + \frac{\partial g\left(x_i, t\right)}{\partial t}$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial g\left(x_i, t\right)}{\partial x_j}\frac{\partial x_j\left(X_R, t\right)}{\partial t} + \frac{\partial g\left(x_i, t\right)}{\partial t} = v_j \frac{\partial g\left(x_i, t\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial g\left(x_i, t\right)}{\partial t} = \mathrm{v} \times \nabla g\left(x_i, t\right) + \frac{\partial g\left(x_i, t\right)}{\partial t}$$

MOVIMENTO E DEFORMAÇÕES

Movimento de corpo rígido – não há alteração da forma do corpo.

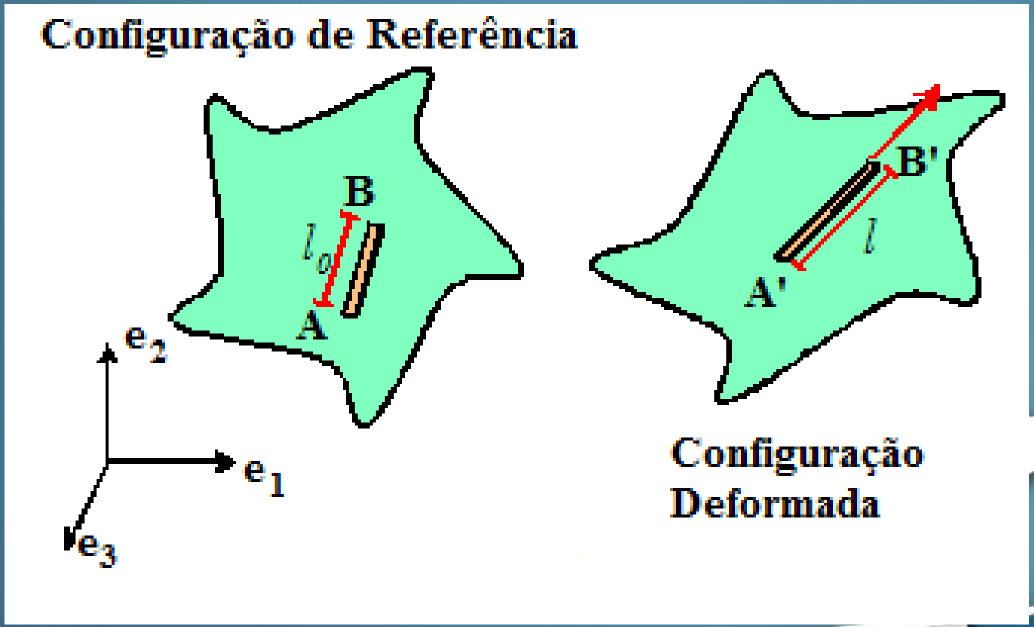
- **Translação**

$$x_i = X_i + c_i(t)$$

Onde o vetor c_i é independente da posição, e somente depende do tempo t.

AB // A'B'

$l = l_o$

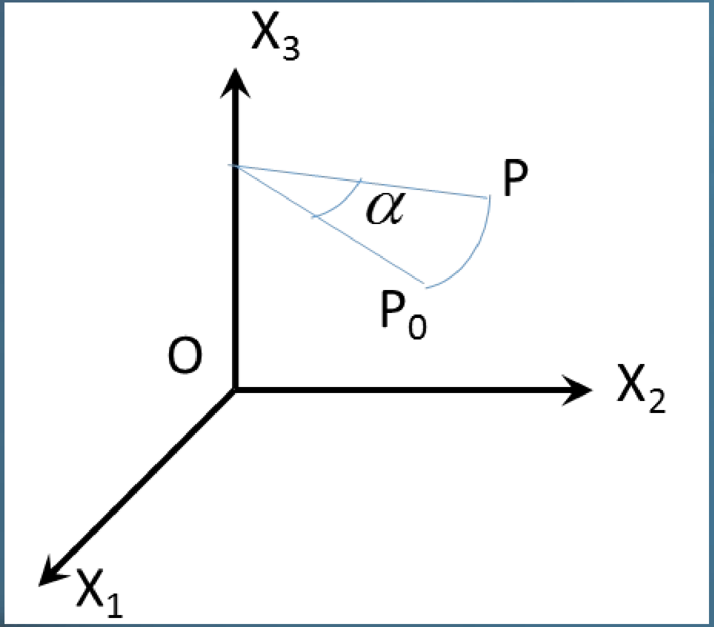


MOVIMENTO E DEFORMAÇÕES

Movimento de corpo rígido – não há alteração da forma do corpo.

- **Rotação em torno de x_3**

$$
\begin{aligned}
x_1 &= X_1\cos(\alpha) - X_2 sen(\alpha)\\
x_2 &= X_1 sen(\alpha) + X_2\cos(\alpha)\\
x_3 &= X_3
\end{aligned}
$$



Conhecendo a posição final *X*

$$\mathrm{x} = \mathbf{M}\mathrm{X}$$

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0\\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

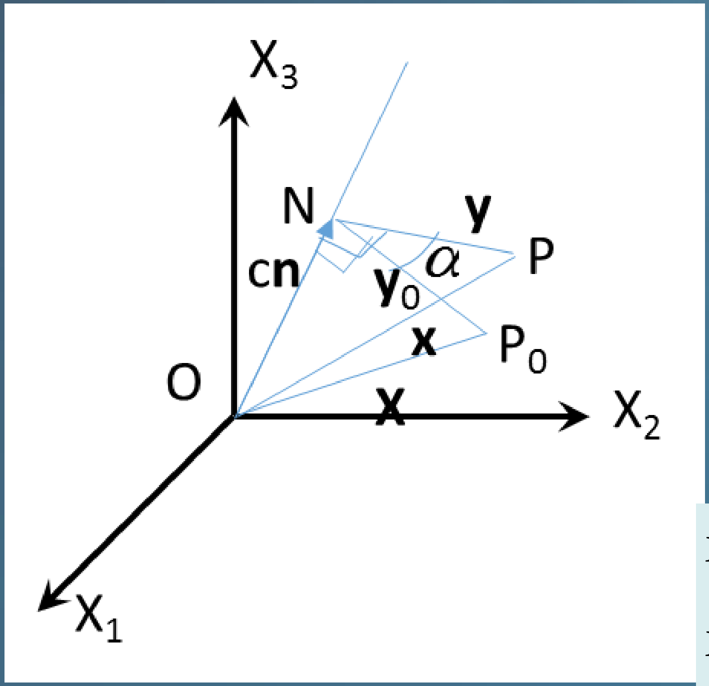
M_{ij} é ortogonal

Conhecendo a posição inicial *x*

$$\mathrm{X} = \mathbf{M}^T\mathrm{x}$$

MOVIMENTO E DEFORMAÇÕES

Caso geral de rotação em torno de um eixo arbitrário definido pelo versor *n*



$$c = \mathrm{n}\cdot\mathrm{X} = \mathrm{n}\cdot\mathrm{x}$$

$$\mathrm{X} = c\mathrm{n} + \mathrm{y}_0$$

$$\mathrm{x} = c\mathrm{n} + \mathrm{y}$$

Como *y* e *y_0* possuem a mesma magnitude:

$$\mathrm{y} = \mathrm{y}_0 \cos(\alpha) + \mathrm{n}\times\mathrm{y}_0 sen(\alpha)$$

Utilizando as relações acima, obtém-se:

$$\mathrm{x} = c\mathrm{n} + (\mathrm{X} - c\mathrm{n})\cos(\alpha) + \mathrm{n}\times(\mathrm{X} - c\mathrm{n})\,\mathrm{sen}(\alpha)$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{X}\cos(\alpha) + (\mathrm{n}\times\mathrm{X})\,\mathrm{sen}(\alpha) + c(1 - \cos(\alpha))\,\mathrm{n}$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{X}\cos(\alpha) + (\mathrm{n}\times\mathrm{X})\, sen(\alpha) + (\mathrm{n}\cdot\mathrm{X})(1 - \cos(\alpha))\,\mathrm{n}$$

$$x_i = X_i \cos(\alpha) + \in_{ijR} n_j X_R sen(\alpha) + (1 - \cos(\alpha))\, X_R n_R n_i$$

MOVIMENTO E DEFORMAÇÕES

Em notação indicial a equação de rotação fica:

$$x_i = M_{iR} X_R$$

$$M_{iR} = \delta_{iR}\cos(\alpha) + \in_{ijR} n_j sen(\alpha) + (1 - \cos(\alpha))\, n_i n_R$$

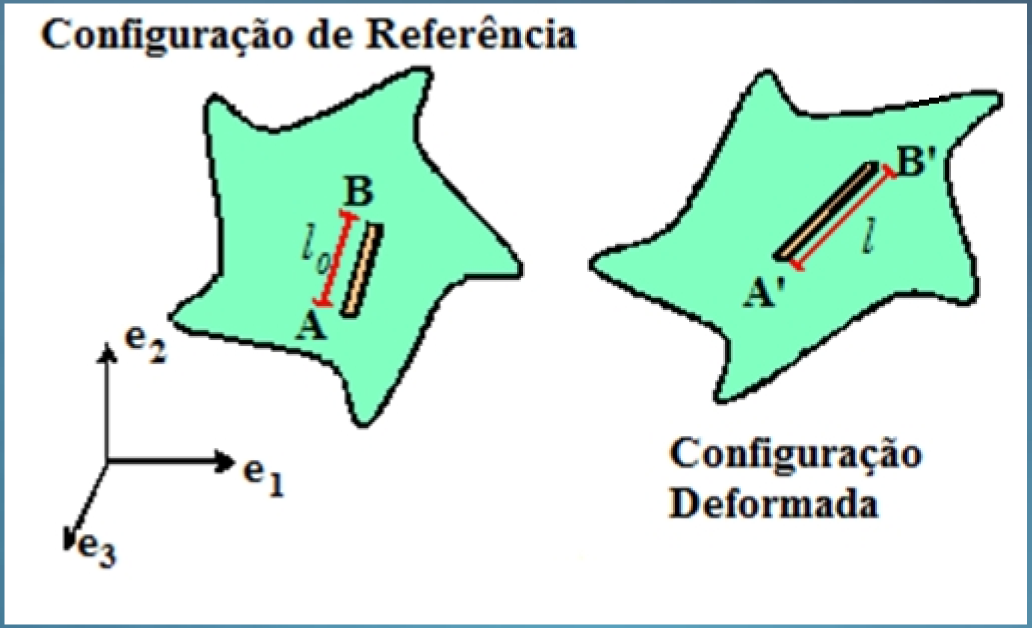
No caso de rotação e translação:

$$\mathrm{x} = \mathbf{M}(t) \times \mathrm{X} + \boldsymbol{c}(t)$$

$$\mathrm{X} = \mathbf{M}^T(t) \times \mathrm{X} + \boldsymbol{c}_1(t), \quad \boldsymbol{c}_1(t) = -\mathbf{M}^T(t)\boldsymbol{c}(t)$$

MOVIMENTO E DEFORMAÇÕES

Se $l \neq l_o$ há deformação



Para l_0 infinitesimal $\Rightarrow$ deformação homogênea em AB
deslocamento $l - l_0$ proporcional a l_0

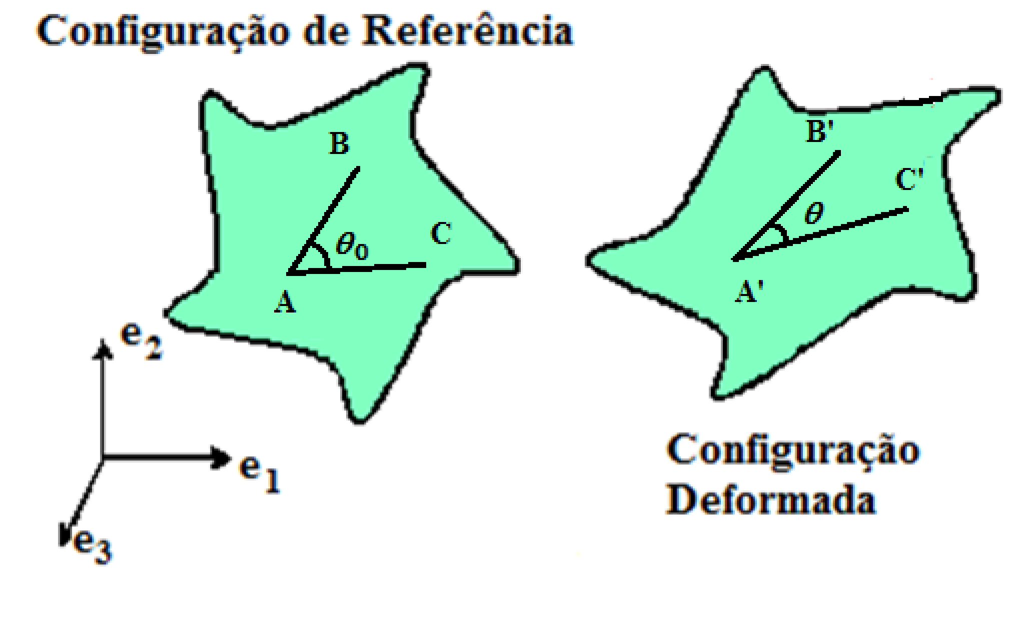
$$deformação \quad linear = \frac{l - l_0}{l_0}$$

MOVIMENTO E DEFORMAÇÕES

Para 3 pontos do corpo A, B e C formando um ângulo θ_0

Após uma deformação os pontos A', B' e C' formam um ângulo θ

A diferença $\theta - \theta_0$ é dita deformação angular ou distorção



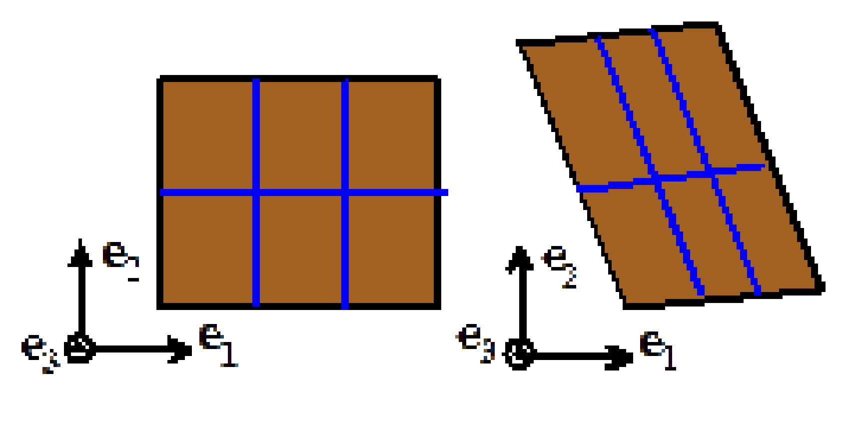
ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Define-se estado de deformação em um ponto como o conjunto de todas as alterações de comprimento das linhas (fibras de material) que passam pelo ponto e de todas as alterações do ângulo formado entre duas dessas linhas

Considerando que há continuidade no material (formação de vazios), as alterações em uma direção qualquer pode ser calculada em função da alteração na direção dos eixos cartesianos segundo qualquer orientação

Para caracterizar alterações de forma em torno de um ponto são necessários 6 componentes independentes

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO



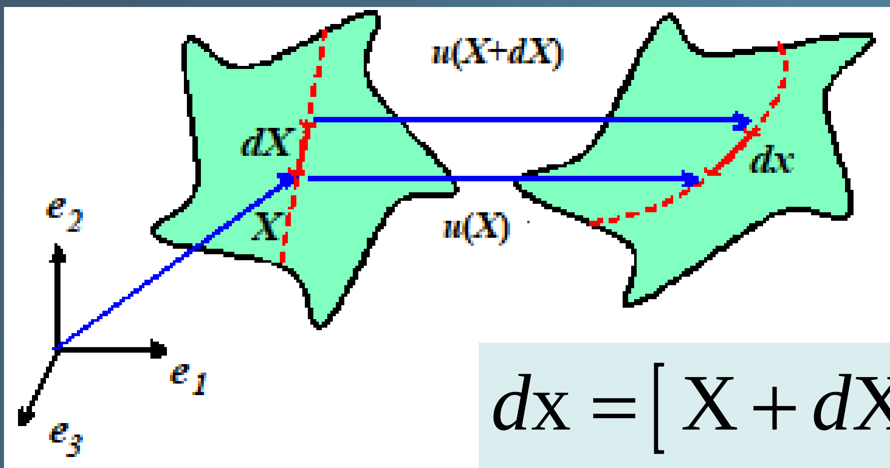
Numa deformação homogénea toda as linhas retas no sólido permanecem retas após deformação, Então, na vizinhança infinitesimal de qualquer ponto, pode-se considerar a hipótese de deformação homogénea

$$x_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + c_1$$
$$x_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 + c_2$$
$$x_3 = A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 + c_3$$

$$\mathrm{x} = \mathbf{A}.\mathrm{X} + c$$

$$x_i = A_{ij}X_j + c_i$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO



O conceito de gradiente de deslocamento e gradiente de deformação permite quantificar a alteração de forma de um linha de comprimento infinitesimal

$$d\mathrm{x} = \left[\mathrm{X} + d\mathrm{X} + \mathrm{u}(\mathrm{X} + d\mathrm{X})\right] - \left[\mathrm{X} + \mathrm{u}(\mathrm{X})\right]$$

ou

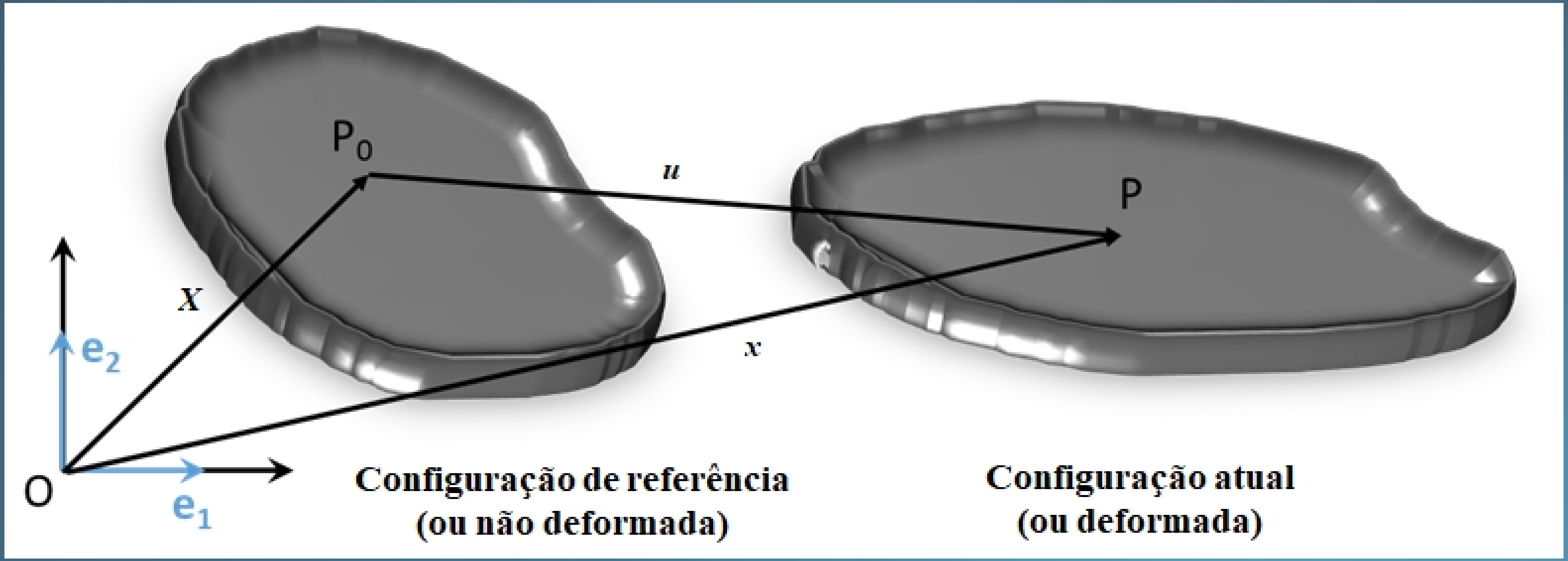
$$dx_i = \left[X_i + dX_i + u_i(X_j + dX_j)\right] - \left[X_i + u_i(X_i)\right]$$

Considerando uma expansão de Taylor de 1ª ordem:

$$u_i(X_j + dX_j) \approx u_i(X_j) + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j$$

$$dx_i = dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) dX_j$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO



Tensor gradiente de deslocamento

$$u \otimes \nabla$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Se não há movimento $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = 0$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor gradiente de deformação

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathrm{u} \otimes \nabla$$

$$\mathbf{F} = \mathrm{x} \otimes \nabla = \left(\mathrm{X} + \mathrm{u}\left(\mathrm{X} \right) \right) \otimes \nabla$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j}\left(X_i + u_i \right) = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Se não há movimento $\mathbf{F} = \mathbf{I}$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor gradiente de deformação

$$d\mathrm{x} = \mathbf{F}.d\mathrm{X}$$

$$dx_i = F_{ij} dX_j$$

$$dx_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) dX_j$$

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}$$

Inverso do tensor gradiente de deformação

$$F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

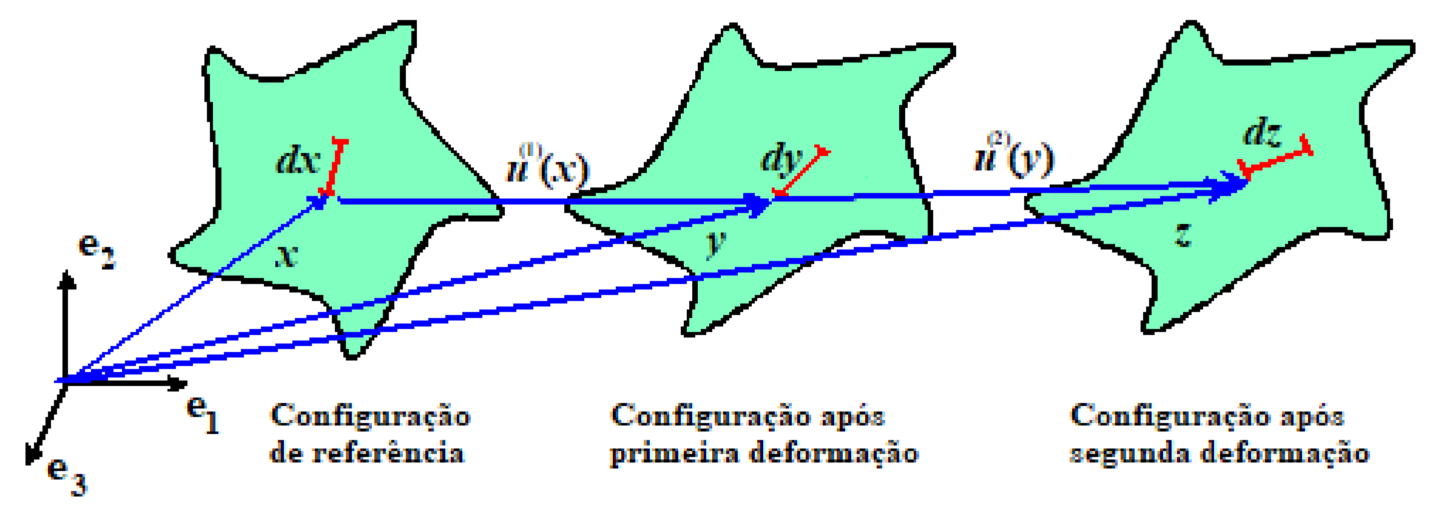
$$d\mathrm{X} = \mathbf{F}^{-1}.d\mathrm{x}$$

$$dX_i = F_{ij}^{-1} dx_j$$

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Suponha-se duas deformações sucessivas



$$dy = \mathbf{F}^{(1)}.dx$$

$$dz = \mathbf{F}^{(2)}.dy$$

ou

$$dy_i = F_{ij}^{(1)} dx_j$$

$$dz_i = F_{ij}^{(2)} dy_j$$

$$\mathbf{F}^{(1)} = y \otimes \nabla_x \quad \textbf{ou} \quad F_{ij}^{(1)} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = z \otimes \nabla_y \quad \textbf{ou} \quad F_{ij}^{(2)} = \frac{\partial z_i}{\partial y_j}$$

Aplicando a regra de cadeia $z_i(y_j(x_k))$

$$dz_i = \underbrace{\boxed{\frac{\partial z_i}{\partial y_j}}}_{F^{(2)}} \underbrace{\boxed{\frac{\partial y_j}{\partial x_k}}}_{F^{(1)}} dx_k$$

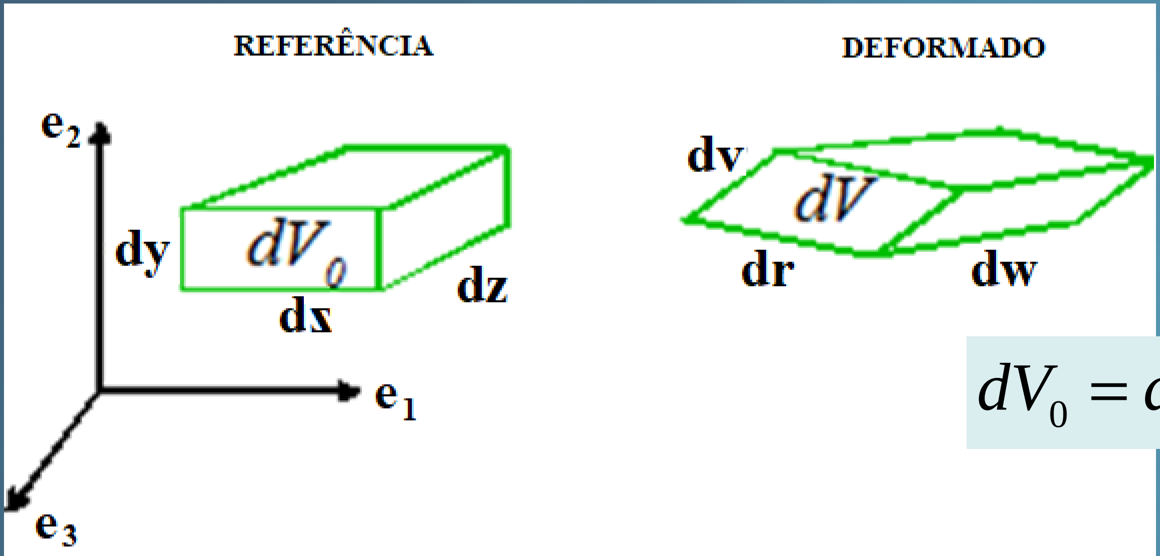
$$dz = \underbrace{\mathbf{F}}_{\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(2)}\mathbf{F}^{(1)}}.dx$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Jacobiano

$$J = \det(\mathbf{F}) = \det\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right)$$

Mede a alteração de volume após uma deformação



O volume original

$$dV_0 = dz \cdot (dx \times dy) = \in_{ijk}\, dz_i dx_j dy_k$$

O volume final

$$dV = \in_{ijk}\, dw_i dr_j dv_k$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Jacobiano (continuação)

Como

$$dr_i = F_{il} dx_l$$
$$dv_j = F_{jm} dy_m$$
$$dw_k = F_{kn} dz_n$$

então

$$\begin{aligned} dV &= \in_{ijk} F_{il} dx_l F_{jm} dy_m F_{kn} dz_n \\ &= \underbrace{\in_{ijk} F_{il} F_{jm} F_{kn}}_{\in_{lmn} \det(F)} dx_l dy_m dz_n \end{aligned}$$

Então

$$dV = \in_{lmn} \det(\mathbf{F}) dx_l dy_m dz_n = \det(\mathbf{F}) dV_0$$

Obtém-se

$$\frac{dV}{dV_0} = \det(\mathbf{F}) = J$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Jacobiano (continuação)

- **Para a deformação ser fisicamente admissível** $J > 0$

- **Para um material ser incompressível** $J = 1$

- **Para um sólido deformado a densidade do material num determinado ponto é dado por**

$$\rho = \frac{\rho_0}{J}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor de Deformação de Lagrange

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \times \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

ou

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij})$$

Ou ainda em termos dos componentes do gradiente de deslocamento:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)$$

ou

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{r,i}u_{r,j}\right)$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor de Deformação de Lagrange (continuação)

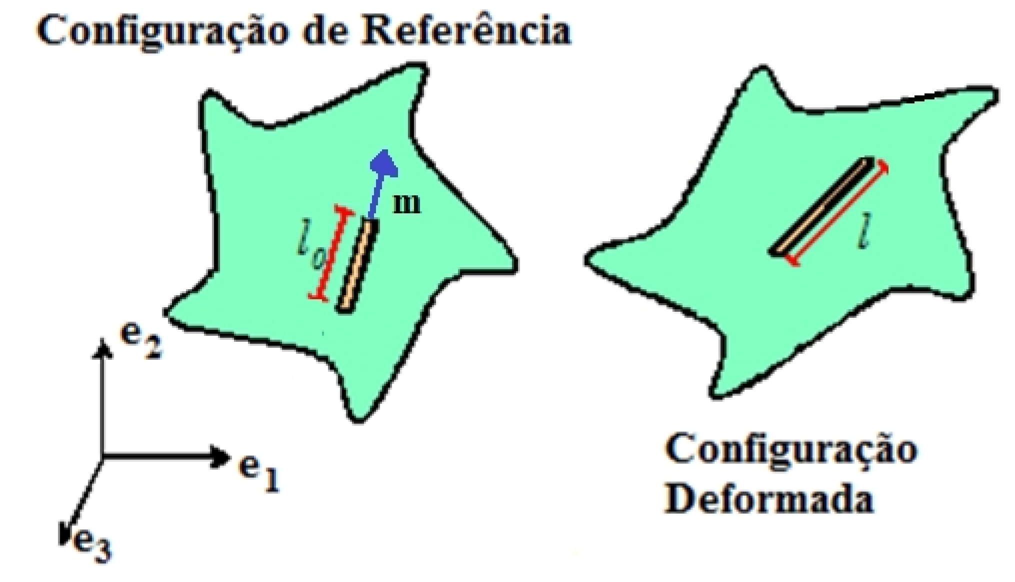
Quantifica a variação de comprimento de uma fibra e dos ângulos entre um par de fibras relativa à configuração original (ou de referência)

m **vetor unitário m_i**

$$l = l_0 + \delta l$$

$$\varepsilon_L(m_i) = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \frac{\delta l}{l_0} + \frac{(\delta l)^2}{2l_0^2}$$

$\varepsilon_L(m_i) = E_{ij} m_i m_j$ **ou** $\varepsilon_L(m) = m \times E \times m$



Se $\delta\, l$ pequeno $$\varepsilon = \frac{\delta l}{l_0}$$ **e sendo** $$dx_i = l_0 m_i$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor de Deformação de Lagrange (continuação)

Vem

$$dx_k = \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) dX_j = \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) l_0 m_j$$

$$l^2 = dx_k dx_k = \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) l_0 m_j \left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right) l_0 m_i$$

$$= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) l_0^2 m_j m_i$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \times \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

Resultando

$$\varepsilon_L(m_i) = \frac{l^2 - l_0^2}{2 l_0^2} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)} m_i m_j$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor de Deformação de Euler

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \times \mathbf{F}^{-1})$$

ou

$$E^*_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - F^{-1}_{ki} F^{-1}_{kj})$$

Ou ainda em termos dos componentes do gradiente de deslocamento:

$$E^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

ou

$$E^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i/j} + u_{j/i} - u_{r/i} u_{r/j}\right)$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor de Deformação de Euler

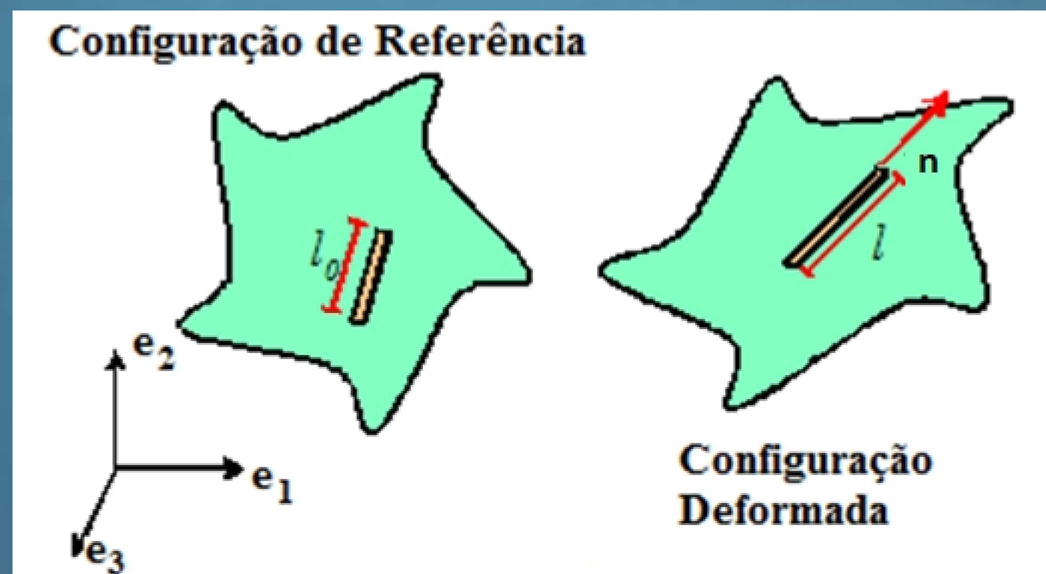
Quantifica a variação de comprimento de uma fibra e dos ângulos entre um par de fibras relativa à configuração deformada (ou atual)

$\vec{n}$ **vetor unitário n_i**

$$\varepsilon_E\left(n\right)=\frac{l^2-l_0^2}{2l^2}=n\cdot\mathbf{E}^*\cdot n$$

ou

$$\varepsilon_E\left(n_i\right)=E_{ij}^*n_in_j$$



ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor de Deformação de Euler (continuação)

Vem

$$dX_k = \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dX_j = \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) l n_j$$

$$l_0^2 = dX_k dX_k = \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) l n_j \left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) l n_i$$

$$= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) l^2 n_j n_i$$

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \times \mathbf{F}^{-1} \right)$$

Resultando

$$\varepsilon_L (n_i) = \frac{l^2 - l_0^2}{2 l^2} = \boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} n_i n_j$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Os tensores de Lagrange (E_{ij}) e de Euler (E^*_{ij}) são simétricos

A condição de deslocamento puro (sem deformação) é satisfeita se E_{ij} e E^*_{ij} forem nulos

Para derivadas dos deslocamentos pequenas $u_{i,j}$ e $u_{i/j}$ os seus produtos podem ser desprezados, então:

$$E_{ij} = E^*_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}(u_{j/i} + u_{j/i})$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{j,i} + u_{r,i}u_{r,j}) \approx \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{j,i}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

$$E_{ij} = E^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor de Deformação Infinitesimal

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\mathrm{u}\otimes\nabla + \left(\mathrm{u}\otimes\nabla\right)^T\right)$$ **ou** $$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}+\mathbf{F}^T\right)$$ **ou** $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)$$

$$\varepsilon_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor de Deformação Infinitesimal (continuação)

O tensor de deformação infinitesimal é a medida aproximada da deformação e só é válida para pequenas deformações.

Supondo que os componentes do gradiente de deslocamento são pequenos, tem-se: $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} << 1$ **Então:** $\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \approx 0$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\frac{\partial u_k}{\partial X_i}}_{\approx 0}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \approx \varepsilon_{ij}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor de Deformação Infinitesimal (continuação)

O tensor de deformação infinitesimal é a medida aproximada da deformação e só é válida para pequenas deformações.

Supondo que os componentes do gradiente de deslocamento são pequenos, tem-se: $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} << 1$ **Então:** $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i} \approx 0$

$$E^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}}_{\approx 0}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \approx \varepsilon_{ij}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor de Deformação Infinitesimal - Propriedades

$$\varepsilon_e(m) = \frac{l - l_0}{l_0} \approx \varepsilon_{ij} m_i m_j$$

$$tr(\varepsilon) = \varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$$

$$\varepsilon_{kk} \approx \frac{dV - dV_0}{dV_0} = J - 1$$

Significado físico no caso bi-dimensional

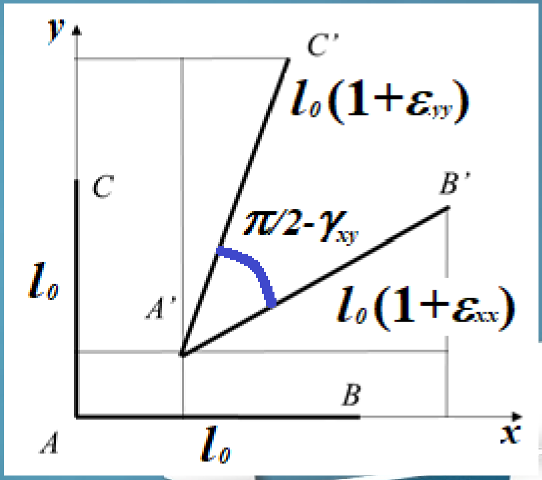
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx}$$
$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy}$$

Deformação linear

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\gamma_{yx}}{2}$$

Distorção angular

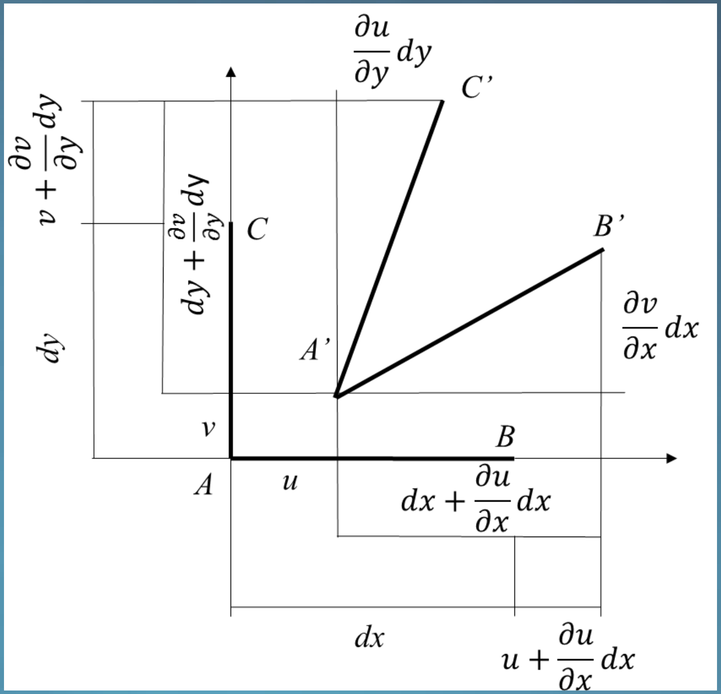
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$



ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Deformação linear mede a variação linear de comprimento

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} \qquad \varepsilon_y = \frac{\overline{A'C'} - \overline{AC}}{\overline{AC}}$$



$$\overline{A'B'} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{dx}\right)^2}\, dx$$

Considerando giro muito pequeno $\left(\frac{\partial v}{dx}\right)^2 \approx 0$

$$\overline{A'B'} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

$$\varepsilon_x = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Distorção angular mede a variação do ângulo entre as retas AB e AC. Considerando pequenos giros $\sin\theta = \tan\theta = \theta$, logo:

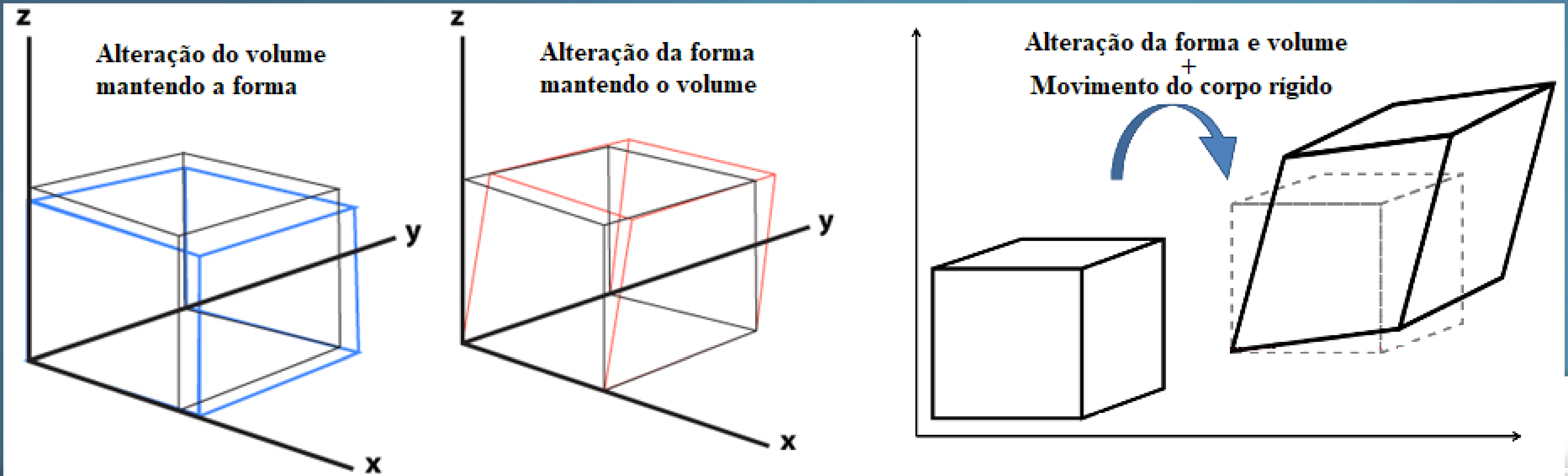
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{dy} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Decomposição do Tensor de Deformação Infinitesimal em Tensor Esférico (ou Volumétrico) e Tensor Anti-esférico (ou Desviador)

Tensor Volumétrico – provoca alteração de volume mas mantém a forma

Tensor Desviador – provoca alteração da forma mas mantém o volume



ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor Esférico (ou Volumétrico) de deformação infinitesimal

$$\varepsilon' = \frac{1}{3} I tr(\varepsilon)$$

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) \end{bmatrix}$$

Estudo puro de deformação $\Leftrightarrow$ $\varepsilon_{kk} = 0$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor Anti-esférico (ou Desviador) de deformação infinitesimal

$$\varepsilon'' = \varepsilon - \varepsilon' = \varepsilon - \frac{1}{3} I tr(\varepsilon)$$

$$\varepsilon''_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

$$\varepsilon''_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})}{3} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \frac{2(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})}{3} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \frac{2(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})}{3} \end{bmatrix}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Tensor rotacional de deformação infinitesimal w_{ij}

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial X_j}} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)} + \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)}$$

Matriz não simétrica = Matriz simétrica + Matriz anti-simétrica

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \varepsilon_{ij} + w_{ij}$$

$$\boxed{\frac{\partial x_i}{\partial X_j}} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} + \frac{\partial x_j}{\partial X_i}\right)} + \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \frac{\partial x_j}{\partial X_i}\right)}$$

Matriz não simétrica = Matriz simétrica + Matriz anti-simétrica

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \varepsilon_{ij} + w_{ij}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

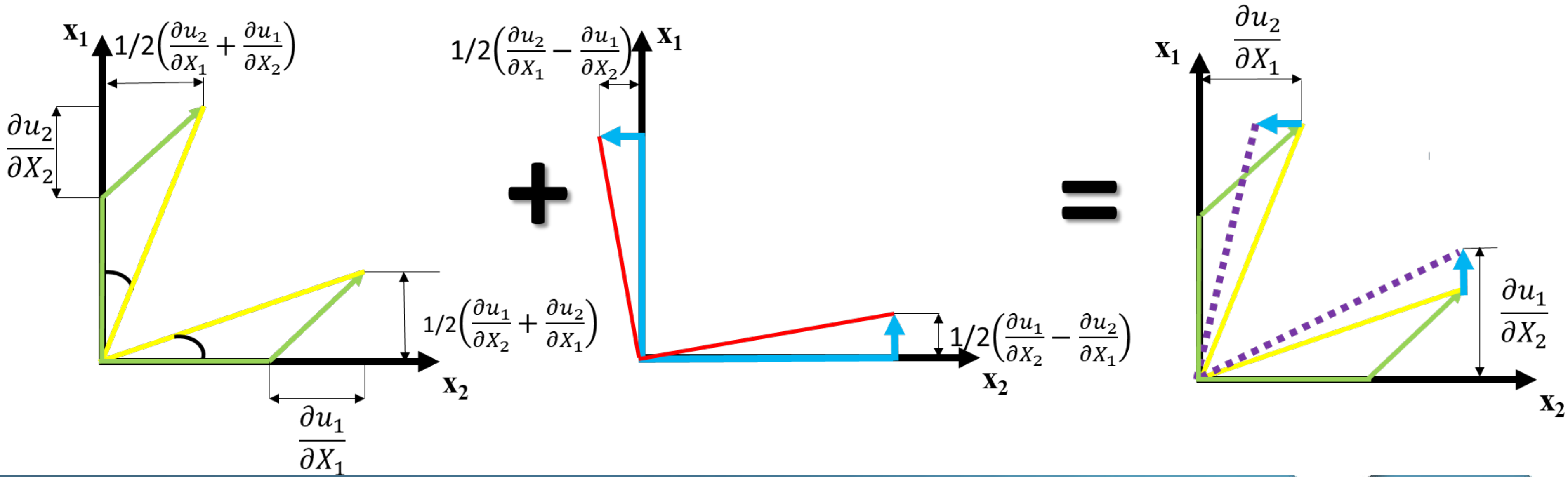
Tensor rotacional de deformação infinitesimal w_{ij}

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{u} \otimes \nabla - \left(\mathrm{u} \otimes \nabla \right)^T \right)$$ **ou** $$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F} - \mathbf{F}^T \right)$$ **ou** $$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

$$w_{ij} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} - \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \varepsilon_{ij} + w_{ij}$$



ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Valores e vetores próprios do tensor de deformação infinitesimal

Existem *3* vetores ortogonais $n_{(i)}$ que correspondem *3* escalares reais $e_{(i)}$ que satisfazem a equação: $\varepsilon_{kl} n_l^{(i)} = e_{(i)} n_l^{(i)}$

Este podem ser determinados resolvendo: $\left(\varepsilon_{kl} - e_{(i)} \delta_{kl} \right) n_l^{(i)} = 0$

As soluções não triviais para *x* quando:

$$\left| \left(\varepsilon_{kl} - e_{(i)} \delta_{kl} \right) \right| = 0$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Valores e vetores próprios do tensor de deformação infinitesimal

Existem *3* raízes $e_{(1)}$, $e_{(2)}$ e $e_{(3)}$ reais que satisfazem a equação de terceiro grau:

$$e^3 - I_1 e^2 + I_2 e^1 - I_3 = 0$$

Os invariantes do tensor de deformação:

$$I_1 = tr\left(\varepsilon\right) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det \varepsilon_{ij}$$

ou

$$I_1 = e_{(1)} + e_{(2)} + e_{(3)}$$

$$I_2 = e_{(1)}e_{(2)} + e_{(2)}e_{(3)} + e_{(3)}e_{(1)}$$

$$I_3 = e_{(1)}e_{(2)}e_{(3)}$$

***I_1*, *I_2* e *I_3* são os invariantes do tensor de deformações seus valores não dependem do sistema de coordenadas**

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Para um cubo unitário alinhado com os eixos principais as direções mantêm-se ortogonais após a deformação

Mudança de volume

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1$$

Para deformações infinitesimais

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = tr(\varepsilon) = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = I_1 \approx J - 1$$

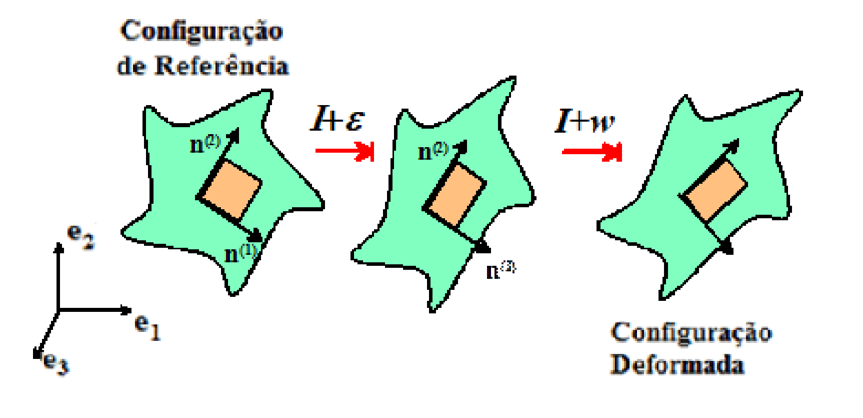
dilatação ou alteração de volume

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

O tensor de deformação infinitesimal orientado segundo os ***3*** vetores próprios (ortogonais) $\boldsymbol{n}_{(i)}$ ocorre apenas deformação linear, sendo a distorção angular nula:

$$\varepsilon_{ij} \equiv \begin{bmatrix} e_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & e_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & e_{(3)} \end{bmatrix}$$

Segundo estas direções, pode-se decompor o gradiente de deslocamento numa expansão volumétrica seguida de uma rotação



$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \varepsilon_{ij} + w_{ij}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Invariantes do tensor desviador de deformação

$$\left| \left(\varepsilon''_{kl} - e''_{(i)} \delta_{kl} \right) \right| = 0$$

$$e''^{3} - J_1 e''^{2} + J_2 e''^{1} - J_3 = 0$$

Este conjunto alternativo de invariantes é muito usado em modelos para materiais incompressíveis (ou quase)

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{3}\left(I_1^2 - 3I_2^2 \right)$$

$$J_3 = \frac{1}{27}\left(2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27 I_3 \right)$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

O tensor de deformação Cauchy-Green Esquerdo

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}.\mathbf{F}^T$$

$$\frac{l_0^2}{l^2} = \mathrm{n}.\mathbf{B}^{-1}.\mathrm{n}$$

***B* é simétrica**

B=B^T

O tensor de deformação Cauchy-Green Direito

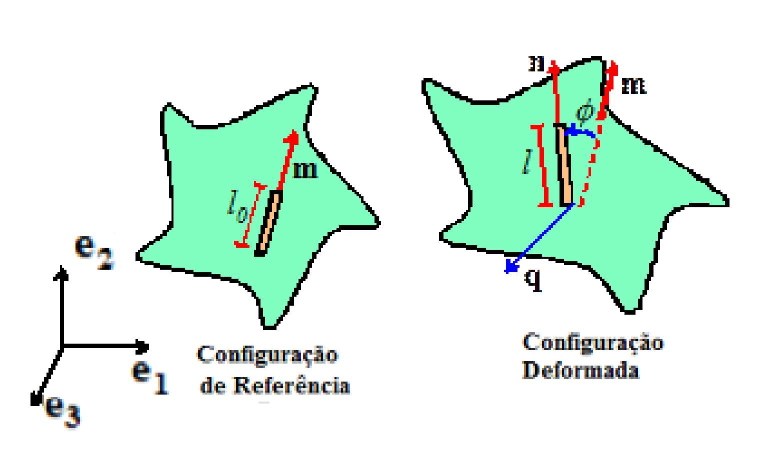
$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T.\mathbf{F}$$

$$\frac{l^2}{l_0^2} = \mathrm{m}.\mathbf{C}.\mathrm{m}$$

***C* é simétrica**

C=C^T

Permitem quantificar o comprimento infinitesimal de uma fibra na configuração deformada, representada pelo vetor *$dX=l_0.m$* <u>depois de esticar e rodar</u> para ser representada pelo vetor *$dx=l.n$*



ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

O tensor de estiramentos Esquerdo

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}^{1/2} = \left(\mathbf{F} \times \mathbf{F}^T\right)^{1/2}$$

***V* é simétrica**
V=V^T

O tensor de estiramentos Direito

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2} = \left(\mathbf{F}^T.\mathbf{F}\right)^{1/2}$$

***U* é simétrica**
U=U^T

O tensor de rotação

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}.\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1}.\mathbf{F}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}.\mathbf{U}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{R}.\mathbf{U}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1}.\mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{V}.\mathbf{R}$$

A decomposição polar de *F* significa que <u>uma deformação homogénea pode ser decomposta de um estiramento seguido de uma rotação rígida</u>, <u>ou vice-versa</u>

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

***R* é ortogonal**

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\cdot\mathbf{R} = \mathbf{I}$$

$$\det\left(\mathbf{R}\right) = 1$$

Demonstração

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^T\cdot\mathbf{R} &= \left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1}\right)^T\cdot\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1}\right)\\ &= \mathbf{U}^{-T}\cdot\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}^{-1}\\ &= \mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{U}^2\cdot\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det\left(\mathbf{R}\right) &= \det\left(\mathbf{F}\right)\det\left(\mathbf{U}^{-1}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Para determinar *U* e *V* é preciso determinar a raiz quadrada de uma matriz quadrada:

- **Calcular os valores próprios de C (ou de B) λ_n (n=1, 2, 3).**

Como C e B são matrizes reais e simétricas, os valores próprios são reais positivos

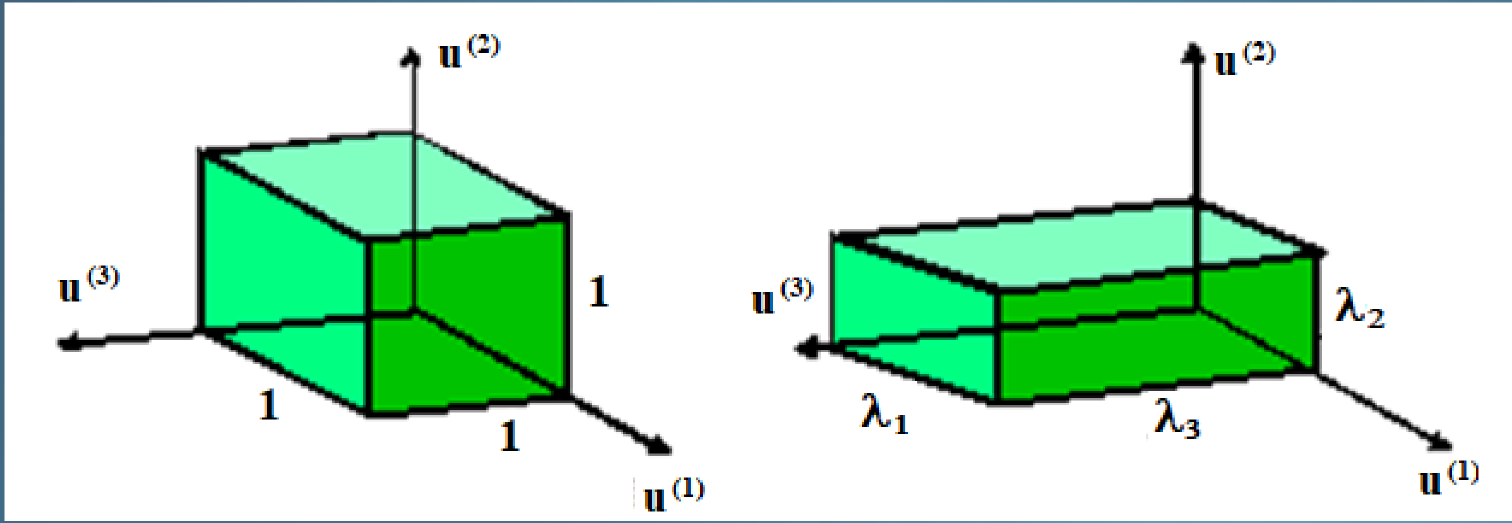
- **Calcular os vetores próprios normalizados $e^{(n)} . e^{(n)} = 1$**
- **Calcular** $\mathbf{C}^{1/2} = \sum_{n=1}^{3} \lambda_n e^{(n)} \otimes e^{(n)}$ **ou** $C_{ij}^{1/2} = \sum_{n=1}^{3} \lambda_n e_i^{(n)} e_j^{(n)}$

Para determinar *R* é preciso inverter a matriz diagonal *U* ou *V*:

- **Calcular** $\mathbf{C}^{1/2} = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{\lambda_n} e^{(n)} \otimes e^{(n)}$ **ou** $C_{ij}^{1/2} = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{\lambda_n} e_i^{(n)} e_j^{(n)}$

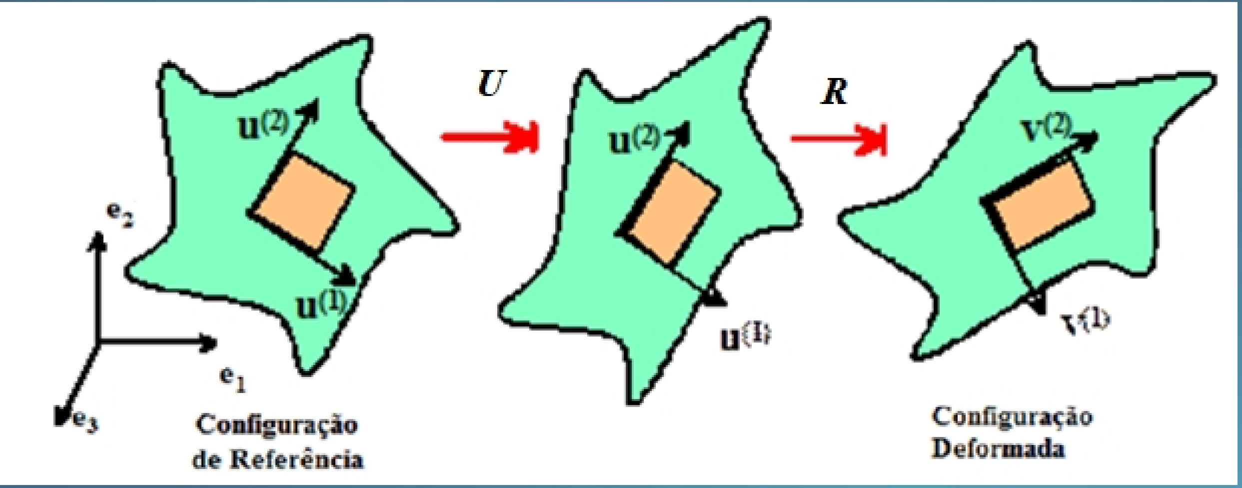
ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

O tensor de estiramentos *U* (ou *V*) pode ser expresso pelos vetores $u^{(i)}$ (i=1,2,3) mutuamente ortogonais :



$$\mathbf{U} = \lambda_1 \mathrm{u}^{(1)} \otimes \mathrm{u}^{(1)} + \lambda_2 \mathrm{u}^{(2)} \otimes \mathrm{u}^{(2)} + \lambda_3 \mathrm{u}^{(3)} \otimes \mathrm{u}^{(3)}$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO



$$\mathbf{F} = \mathbf{R}.\mathbf{U}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}.\mathbf{R}$$

A decomposição polar de *F* significa que <u>uma deformação homogénea pode ser decomposta de um estiramento seguido de uma rotação rígida</u>, <u>ou vice-versa</u>

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO

Os estiramentos principais λ_n podem ser determinados calculando os valores próprios de ***U*** ou ***V***, ou a raiz dos valores próprios de ***C*** ou ***B***

Descrição Lagrangeana

As direções principais associadas ao sólido não deformado são os vetores próprios de ***U*** , ***C*** ou ***E***

$$\mathbf{U} = \sum_{n=1}^{3} \lambda_n \mathrm{u}^{(n)} \otimes \mathrm{u}^{(n)}$$

$$\mathbf{C} = \sum_{n=1}^{3} \lambda_n^2 \mathrm{u}^{(n)} \otimes \mathrm{u}^{(n)}$$

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{3} \left(\lambda_n - 1 \right) \mathrm{u}^n \otimes \mathrm{u}^n$$

Descrição Euleriana

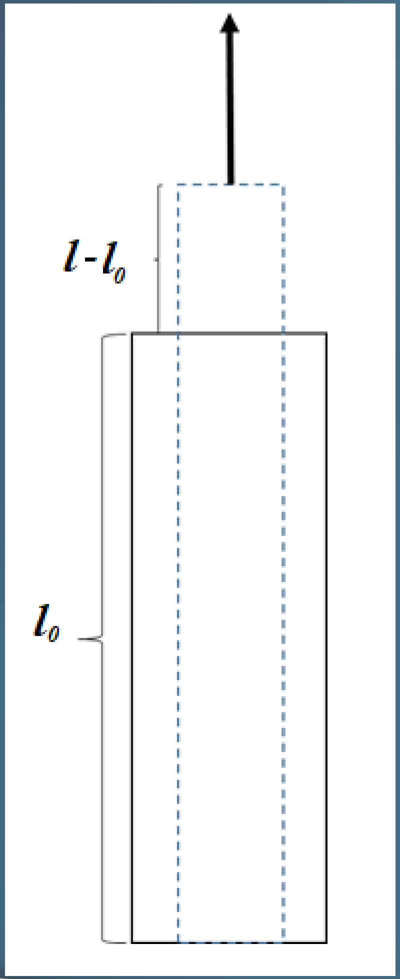
As direções principais associadas ao sólido deformado são os vetores próprios de ***V***, ***B*** ou ***E****

$$\mathbf{V} = \sum_{n=1}^{3} \lambda_n \mathrm{v}^{(n)} \otimes \mathrm{v}^{(n)}$$

$$\mathbf{B} = \sum_{n=1}^{3} \lambda_n^2 \mathrm{v}^{(n)} \otimes \mathrm{v}^{(n)}$$

$$\mathbf{E}^* = \sum_{n=1}^{3} \left(\lambda_n - 1 \right) \mathrm{v}^n \otimes \mathrm{v}^n$$

ESTADO DE DEFORMAÇÃO EM UM PONTO



No caso de uma deformação uniaxial a deformação principal

$$\varepsilon_1 = \frac{l - l_0}{l_0}$$

E o estiramento principal

$$\lambda_1 = \frac{l}{l_0}$$

Então: $\lambda_1 = \varepsilon_1 + 1$ **ou** $\varepsilon_1 = \lambda_1 - 1$

Por isso

$$\mathbf{U} = \sum_{n=1}^{3} \lambda_n \mathrm{u}^{(n)} \otimes \mathrm{u}^{(n)} \qquad \mathbf{E} = \sum_{n=1}^{3} \left(\lambda_n - 1 \right) \mathrm{u}^{n} \otimes \mathrm{u}^{n}$$

TAXA DE ALTERAÇÃO DE FORMA

Campo de Velocidades – Descreve o movimento de um ponto

$$v_i\left(X_k,t\right)=\frac{\partial y_i}{\partial t}=\left.\frac{\partial u_i\left(X_k,t\right)}{\partial t}\right|_{X_k=const}$$

Gradiente de Velocidade – Quantifica a velocidade relativa entre de dois pontos nas posições x_i e (x_i+dx_i)

$$\mathbf{L}=\mathrm{v}\otimes\nabla_X\equiv L_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial X_j}$$

$$dv_i=v_i(x+dx)-v_i(x)=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j$$

TAXA DE ALTERAÇÃO DE FORMA

O Gradiente de velocidade pode ser expresso em termos do gradiente de deformação e da sua derivada em ordem ao tempo

$$\mathrm{v} \otimes \nabla_x = \dot{\mathbf{F}} \times \mathbf{F}^{-1}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dot{F}_{ik} F_{kj}^{-1}$$

Demonstração

$$dv_i = \frac{d}{dt} dx_i = \frac{d}{dt}\left(F_{ij} dX_j \right) = \dot{F}_{ij} \, dX_j$$

Lembrando que:

$$dx_j = F_{ji} dX_i \Rightarrow dX_j = F_{jk}^{-1} dx_k$$

$$dv_i = \dot{F}_{ij} \, F_{jk}^{-1} dx_k$$

TAXA DE ALTERAÇÃO DE FORMA

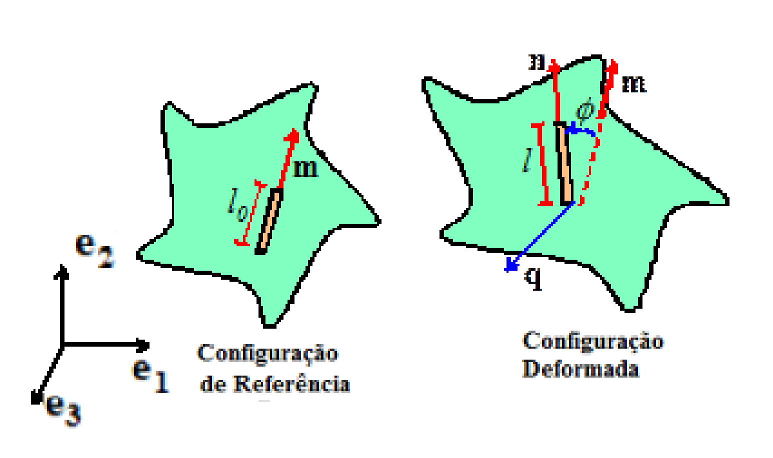
Taxa de Estiramento – Quantifica a taxa com que uma fibra de comprimento *l* é estirada orientada na posição deformada segundo n_i

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{L} + \mathbf{L}^T}{2} \quad \text{ou} \quad D_{ij} = \frac{L_{ij} + L_{ji}}{2}$$

Taxa de Giro - Quantifica a taxa com que uma fibra é rotacionada ou a média da velocidade angular

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}^T}{2} \quad \text{ou} \quad W_{ij} = \frac{L_{ij} - L_{ji}}{2}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad \text{ou} \quad L_{ij} = D_{ij} + W_{ij}$$



TAXA DE ALTERAÇÃO DE FORMA

Taxa de Estiramento – Quantifica a taxa com que uma fibra de comprimento *l* é estirada orientada na posição não deformada segundo n_i

$$\frac{1}{l}\frac{dl}{dt} = \mathrm{n}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathrm{n} = n_i D_{ij} n_j$$

Por definição:

$$\frac{d}{dt}d\mathrm{x} = \frac{dl}{dt}\mathrm{n} + l\frac{d\mathrm{n}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}\cdot d\mathrm{X}\right) = \dot{\mathbf{F}}\cdot d\mathrm{X} = \dot{\mathbf{F}}\cdot\left(\mathbf{F}^{-1}d\mathrm{x}\right)$$

$$= \dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1}d\mathrm{x} = \mathbf{L}\cdot d\mathrm{x} = \left(\mathbf{D}+\mathbf{W}\right)\cdot l\mathrm{n} = \frac{dl}{dt}\mathrm{n} + l\frac{d\mathrm{n}}{dt}$$

Multiplicando ambos os lados por *n*:

$$\mathrm{n}\cdot\left(\mathbf{D}+\mathbf{W}\right)\cdot l\mathrm{n} = \frac{dl}{dt}\mathrm{n}\cdot\mathrm{n} + \underbrace{l\mathrm{n}\cdot\frac{d\mathrm{n}}{dt}}_{=0}$$

Como *W* é anti-simétrico: $\mathrm{n}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathrm{n} = 0$

Então: $\mathrm{n}\cdot\mathbf{D}\cdot l\mathrm{n} = \dfrac{dl}{dt}$

TAXA DE ALTERAÇÃO DE FORMA

Taxa de Deformação Infinitesimal

Para pequenas deformações o tensor da taxa de deformação pode ser aproximado por:

$$\frac{d}{dt}\varepsilon = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[\mathrm{u}\otimes\nabla + \left(\mathrm{u}\otimes\nabla\right)^{T}\right] \approx \mathbf{D}$$ ou $$\dot{\varepsilon}_{ij} \approx D_{ij}$$

Taxa de Rotação Infinitesimal

Para pequenas deformações o tensor da taxa de rotação pode ser aproximado por:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{w} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[\mathrm{u}\otimes\nabla + \left(\mathrm{u}\otimes\nabla\right)^{T}\right] \approx \mathbf{W}$$ ou $$\dot{w}_{ij} \approx W_{ij}$$

Pode-se demonstrar que:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \dot{F}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{w}_{ij} \approx L_{ij}$$

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES

Análise de deformações ⇒ equações de compatibilidade

Dado um campo de deslocamentos u_i (u_1, u_2 e u_3 ou u, v e w) as deformações são determinadas unicamente

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Um campo deformações ε_{ij} (ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, ε_{12}, ε_{13}, ε_{23}) (6 equações) escolhido arbitrariamente pode não corresponder a um campo de deslocamentos u_i (u_1, u_2 e u_3) (3 incógnitas). Para obter um único campo de deslocamentos possível aplicam-se condições de compatibilidade, que garantem que o deslocamento é uma acumulação continua de deformações (sem variação brusca do deslocamento de um ponto relativamente ao deslocamento do ponto vizinho. Para tal, o campo de deformações deve obedecer a condição:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES

Expandindo-se $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$

Resulta nas 6 equações de compatibilidade

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}$$