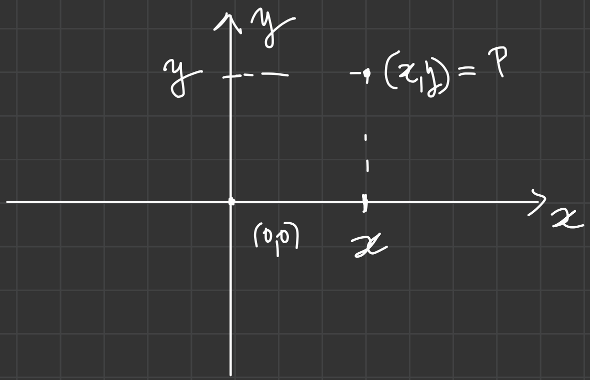
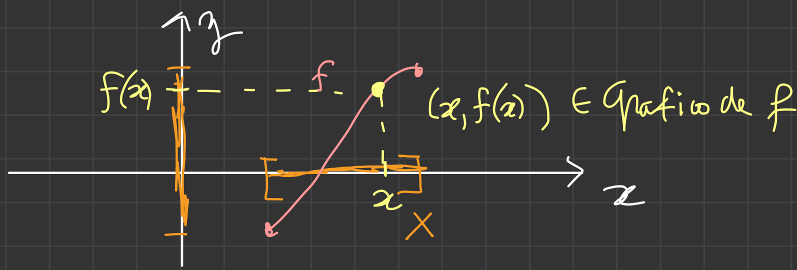
Plano cartesiano



$f: X \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ uma função

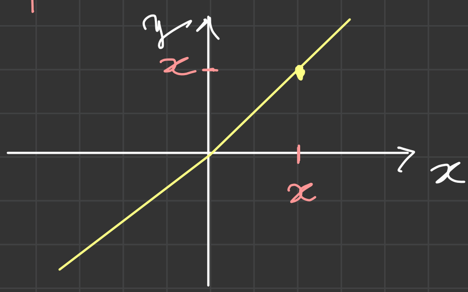
gráfico de f: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$

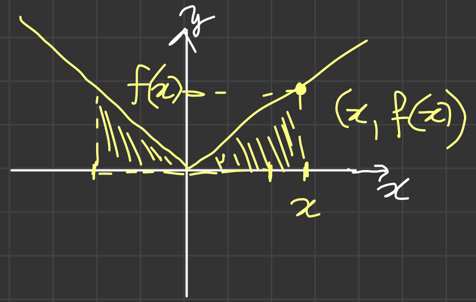


Exemplo: 1) $f(x) = x$

Domínio $= \mathbb{R}$

Imagem $= \mathbb{R}$

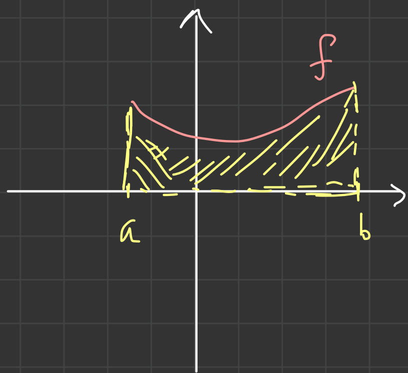




2) $f(x) = |x|$

$$= \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$D = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq |x|\}$$



$f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

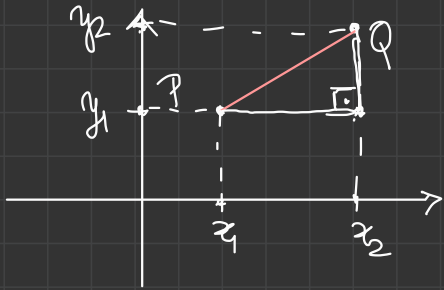
Objetivo: Introduzir a noção de área.

$$\mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Def: A distância entre dois pontos de $\mathbb{R}^2$ é dada por: $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto [0,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

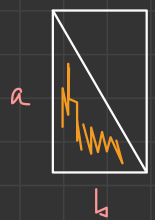
$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \{ (P,Q) : P \in \mathbb{R}^2 \text{ e } Q \in \mathbb{R}^2 \}$$



$$d(P,Q)^2 = (y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2$$

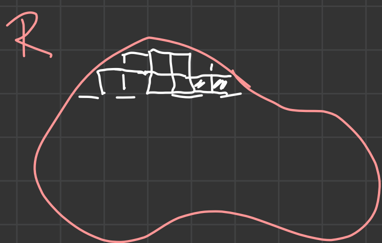
pelo Teo de Pitágoras

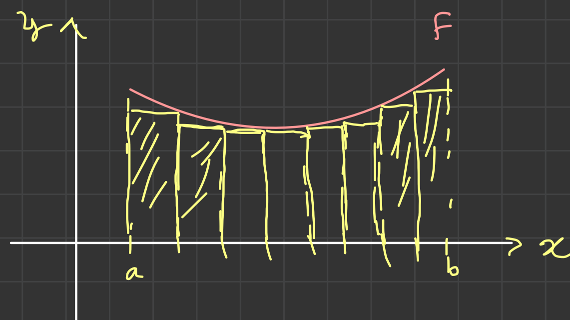
Noção de área.



$$\text{Área}_{\square} = ba$$

$$\text{Área}_{\Delta} = \frac{ba}{2}$$





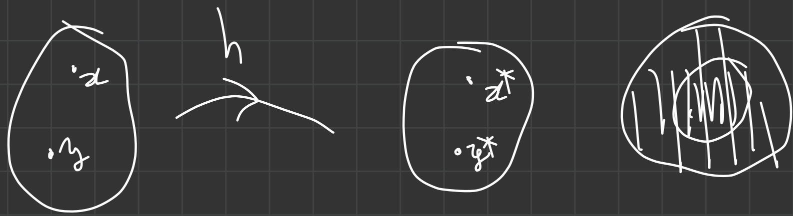
Axiomas de área

Antes de introduzir os axiomas algumas definições

Def.

a) Dizemos que $\underline{a}$ é uma função conjunto quando seu domínio é uma coleção de subconjuntos do plano cujos valores da função são n.os reais

b) Dois subconj. do plano são congruentes q.do dois pontos quaisquer são associados biunivocamente de tal maneira que as distâncias são preservadas



h é bijetora (injetora e sobre)

$$d(x,y) = d(x^*, y^*)$$

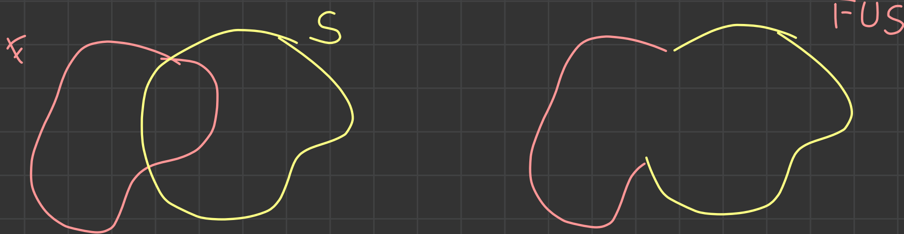
c) Seja $\underline{a}$ uma função conj não negativa (i.e. uma função área) O domínio de $\underline{a}$ é chamado conjunto mensurável.

Axiomas de área. Assumimos que existe uma classe μ de conj. mensuráveis no plano e uma função a cujo domínio é μ.

1) $a(F) \geqslant 0 \quad \forall F \in \mu$.

2) Se $F, S \in \mu$ então $F \cup S$ e $F \cap S \in \mu$

$$a(F \cup S) = a(F) + a(S) - a(F \cap S) \quad \forall F, S \in \mu$$



3) Se $T, S \in \mu$ com $S \subset T$ então

$T - S \in \mu$ e $a(T-S) = a(T) - a(S)$.

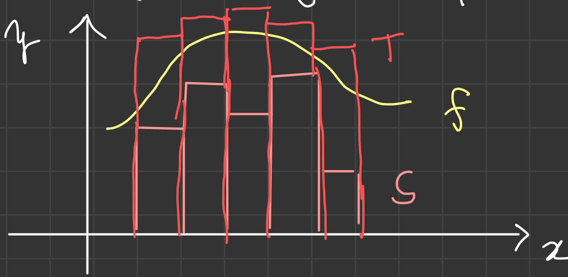
4) Se $S \in \mu$ e T congruente a S, então $T \in \mu$

e $a(S) = a(T)$.

5) Todo retângulo $R \in \mu$ e $a(R) = bh$

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 . \ 0 \leqslant x \leqslant b \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant h\}$$

Def $S \subset \mathbb{R}^2$ é uma região escada se é a coleção finita de retângulos adjacentes cuja base pertence ao eixo x



6) Seja $Q \in \mu$ tal que existem regiões $T, S \in \mu$ escadas com $S \subseteq Q \subseteq T$ (*)

Se existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$a(S) \leqslant c \leqslant a(T)$$

$\forall S, T$ regiões escadas satisfazendo (*) então $Q \in \mu$ e $a(Q) = c$.