Ordem de Convergência e Método de Newton

Nelson Kuhl

IME/USP

31 de agosto de 2021

Aproximações sucessivas e zeros de funções

Teorema 1

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua com uma raiz $\bar{x}$ **isolada** no intervalo $I = [a, b]$ e seja $\phi : I \to \mathbb{R}$ **tal que** $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$, satisfazendo:

Aproximações sucessivas e zeros de funções

Teorema 1

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua com uma raiz $\bar{x}$ **isolada** no intervalo $I = [a, b]$ e seja $\phi : I \to \mathbb{R}$ **tal que** $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$, satisfazendo:

(i) ϕ é continuamente diferenciável em I;

Aproximações sucessivas e zeros de funções

Teorema 1

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua com uma raiz $\bar{x}$ **isolada** no intervalo $I = [a, b]$ e seja $\phi : I \to \mathbb{R}$ **tal que** $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$, satisfazendo:

(i) ϕ é continuamente diferenciável em I;

(ii) $\max_{x \in I} |\phi'(x)| = K < 1$.

Aproximações sucessivas e zeros de funções

Teorema 1

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua com uma raiz $\bar{x}$ **isolada** no intervalo $I = [a, b]$ e seja $\phi : I \to \mathbb{R}$ **tal que** $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$, satisfazendo:

(i) ϕ é continuamente diferenciável em I;

(ii) $\max_{x \in I} |\phi'(x)| = K < 1$.

Então, para toda sequência $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ de aproximações sucessivas definida por $x_k = \phi(x_{k-1})$, $k \geq 1$, que estiver contida em I, temos

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x}.$$

Observações

- A demonstração é muito parecida com a demonstração do teorema do ponto fixo;

Observações

- A demonstração é muito parecida com a demonstração do teorema do ponto fixo;
- ela é baseada na desigualdade $|x_n - \bar{x}| \leq K|x_{n-1} - \bar{x}|$, $\forall n \geq 1$, obtida do Teorema do Valor Médio, que por sua vez implica na desigualdade $|x_n - \bar{x}| \leq K^n|x_0 - \bar{x}|$;

Observações

- A demonstração é muito parecida com a demonstração do teorema do ponto fixo;
- ela é baseada na desigualdade $|x_n - \bar{x}| \leq K|x_{n-1} - \bar{x}|$, $\forall n \geq 1$, obtida do Teorema do Valor Médio, que por sua vez implica na desigualdade $|x_n - \bar{x}| \leq K^n|x_0 - \bar{x}|$;
- sob as hipóteses (i) e (ii), se escolhermos x_0 entre $\bar{x}$ e o extremo de I mais próximo de $\bar{x}$, então a sequência gerada por aproximações sucessivas estará contida em I.

Velocidade de convergência

Sob as hipóteses do Teorema 1 temos, do Teorema do Valor Médio:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |\phi(x_n) - \phi(\bar{x})| = |\phi'(t_n)| \cdot |x_n - \bar{x}|,$$

onte t_n é um ponto entre x_n e $\bar{x}$.

Velocidade de convergência

Sob as hipóteses do Teorema 1 temos, do Teorema do Valor Médio:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |\phi(x_n) - \phi(\bar{x})| = |\phi'(t_n)| \cdot |x_n - \bar{x}|,$$

onte t_n é um ponto entre x_n e $\bar{x}$. Logo, como x_n converge para $\bar{x}$, t_n converge para $\bar{x}$ e, como $|\phi'|$ é contínua, $|\phi'(t_n)|$ converge para $|\phi'(\bar{x})|$.

Velocidade de convergência

Sob as hipóteses do Teorema 1 temos, do Teorema do Valor Médio:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |\phi(x_n) - \phi(\bar{x})| = |\phi'(t_n)| \cdot |x_n - \bar{x}|,$$

onte t_n é um ponto entre x_n e $\bar{x}$. Logo, como x_n converge para $\bar{x}$, t_n converge para $\bar{x}$ e, como $|\phi'|$ é contínua, $|\phi'(t_n)|$ converge para $|\phi'(\bar{x})|$. Portanto, assintoticamente temos

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \approx |\phi'(\bar{x})| \cdot |x_n - \bar{x}|, \quad , n \gg 1,$$

e a velocidade de convergência é determinada por $|\phi'(\bar{x})|$ (que é menor do que 1). Quanto menor este número, mais rápida será a convergência.

O Método de Newton

Da discussão sobre velocidade de convergência, vemos que se conseguirmos obter uma função ϕ tal que $\phi'(\bar{x}) = 0$, devemos esperar convergência rápida.

O Método de Newton

Da discussão sobre velocidade de convergência, vemos que se conseguirmos obter uma função ϕ tal que $\phi'(\bar{x}) = 0$, devemos esperar convergência rápida. Isto pode ser feito procurando-se ϕ na forma

$$\phi(x) = x + G(x)f(x),$$

que obviamente tem $\bar{x}$ como ponto fixo.

O Método de Newton

Da discussão sobre velocidade de convergência, vemos que se conseguirmos obter uma função ϕ tal que $\phi'(\bar{x}) = 0$, devemos esperar convergência rápida. Isto pode ser feito procurando-se ϕ na forma

$$\phi(x) = x + G(x)f(x),$$

que obviamente tem $\bar{x}$ como ponto fixo. Derivando-se a expressão acima obtemos

$$\phi'(x) = 1 + G'(x)f(x) + G(x)f'(x).$$

O Método de Newton

Da discussão sobre velocidade de convergência, vemos que se conseguirmos obter uma função ϕ tal que $\phi'(\bar{x}) = 0$, devemos esperar convergência rápida. Isto pode ser feito procurando-se ϕ na forma

$$\phi(x) = x + G(x)f(x),$$

que obviamente tem $\bar{x}$ como ponto fixo. Derivando-se a expressão acima obtemos

$$\phi'(x) = 1 + G'(x)f(x) + G(x)f'(x).$$

Impondo-se $\phi'(\bar{x}) = 0$ e lembrando-se que $f(\bar{x}) = 0$, concluímos que G deve satisfazer

$$G(\bar{x}) = -\frac{1}{f'(\bar{x})}.$$

O Método de Newton

A última igualdade é satisfeita usando-se $G(x) = -1/f'(x)$, nos levando à escolha

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{1}$$

O Método de Newton

A última igualdade é satisfeita usando-se $G(x) = -1/f'(x)$, nos levando à escolha

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{1}$$

O método de aproximações sucessivas com a escolha acima é chamado **Método de Newton**.

O Método de Newton

A última igualdade é satisfeita usando-se $G(x) = -1/f'(x)$, nos levando à escolha

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{1}$$

O método de aproximações sucessivas com a escolha acima é chamado **Método de Newton**. Para ϕ estar bem definida e ser continuamente diferenciável em uma vizinhança de $\bar{x}$, devemos impor que f tenha derivadas contínuas até ordem 2 nessa vizinhança e que $f'(\bar{x}) \neq 0$ (raiz simples!).

O Método de Newton

A última igualdade é satisfeita usando-se $G(x) = -1/f'(x)$, nos levando à escolha

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{1}$$

O método de aproximações sucessivas com a escolha acima é chamado **Método de Newton**. Para ϕ estar bem definida e ser continuamente diferenciável em uma vizinhança de $\bar{x}$, devemos impor que f tenha derivadas contínuas até ordem 2 nessa vizinhança e que $f'(\bar{x}) \neq 0$ (raiz simples!). Note que derivando-se (1) obtemos

$$\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \tag{2}$$

Convergência do Método de Newton

Teorema 2

Suponha que $f(\bar{x}) = 0$ e que:

1. f tem derivadas contínuas até ordem 2 em um intervalo aberto J contendo $\bar{x}$;

Convergência do Método de Newton

Teorema 2

Suponha que $f(\bar{x}) = 0$ e que:

1. f tem derivadas contínuas até ordem 2 em um intervalo aberto J contendo $\bar{x}$;
2. $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Convergência do Método de Newton

Teorema 2

Suponha que $f(\bar{x}) = 0$ e que:

1. f tem derivadas contínuas até ordem 2 em um intervalo aberto J contendo $\bar{x}$;
2. $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Então, para x_0 **suficientemente próximo de** $\bar{x}$, a sequência de aproximações sucessivas gerada pelo Método de Newton (1) está bem definida e converge para $\bar{x}$.

Convergência do Método de Newton

Demonstração: Como f' é contínua em J e $f'(\bar{x}) \neq 0$, existe um intervalo aberto $J' \subset J$ contendo $\bar{x}$ tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in J'$.

Convergência do Método de Newton

Demonstração: Como f' é contínua em J e $f'(\bar{x}) \neq 0$, existe um intervalo aberto $J' \subset J$ contendo $\bar{x}$ tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in J'$. De (2) e da continuidade de f'' segue que $\phi'(\bar{x}) = 0$ e ϕ' é contínua em J'.

Convergência do Método de Newton

Demonstração: Como f' é contínua em J e $f'(\bar{x}) \neq 0$, existe um intervalo aberto $J' \subset J$ contendo $\bar{x}$ tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in J'$. De (2) e da continuidade de f'' segue que $\phi'(\bar{x}) = 0$ e ϕ' é contínua em J'. Logo existe um intervalo fechado $I \subset J'$ contendo $\bar{x}$ no qual $|\phi'(x)| \leq K < 1$, $\forall x \in I$.

Convergência do Método de Newton

Demonstração: Como f' é contínua em J e $f'(\bar{x}) \neq 0$, existe um intervalo aberto $J' \subset J$ contendo $\bar{x}$ tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in J'$. De (2) e da continuidade de f'' segue que $\phi'(\bar{x}) = 0$ e ϕ' é contínua em J'. Logo existe um intervalo fechado $I \subset J'$ contendo $\bar{x}$ no qual $|\phi'(x)| \leq K < 1$, $\forall x \in I$. Use o Teorema 1 em I.

$\square$

Exemplo

Para ilustrar a rapidez da convergência do Método de Newton, vamos aplicá-lo ao cálculo de $\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$, procurando a raiz positiva de $f(x) = x^2 - \alpha$.

Exemplo

Para ilustrar a rapidez da convergência do Método de Newton, vamos aplicá-lo ao cálculo de $\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$, procurando a raiz positiva de $f(x) = x^2 - \alpha$. As iterações são calculadas a partir de

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - \alpha}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) \quad \text{(Babilônios!)}$$

Exemplo

Para ilustrar a rapidez da convergência do Método de Newton, vamos aplicá-lo ao cálculo de $\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$, procurando a raiz positiva de $f(x) = x^2 - \alpha$. As iterações são calculadas a partir de

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - \alpha}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) \quad \text{(Babilônios!)}$$

Para $\alpha = 2$ e partindo-se de $x_0 = 2$, obtemos, usando-se precisão dupla:

$$x_1 = \phi(x_0) = 1.5$$

Exemplo

Para ilustrar a rapidez da convergência do Método de Newton, vamos aplicá-lo ao cálculo de $\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$, procurando a raiz positiva de $f(x) = x^2 - \alpha$. As iterações são calculadas a partir de

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - \alpha}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) \quad \text{(Babilônios!)}$$

Para $\alpha = 2$ e partindo-se de $x_0 = 2$, obtemos, usando-se precisão dupla:

$$x_1 = \phi(x_0) = 1.5$$
$$x_2 = \phi(x_1) = 1.41666666666667$$

Exemplo

Para ilustrar a rapidez da convergência do Método de Newton, vamos aplicá-lo ao cálculo de $\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$, procurando a raiz positiva de $f(x) = x^2 - \alpha$. As iterações são calculadas a partir de

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - \alpha}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) \quad \text{(Babilônios!)}$$

Para $\alpha = 2$ e partindo-se de $x_0 = 2$, obtemos, usando-se precisão dupla:

$$x_1 = \phi(x_0) = 1.5$$
$$x_2 = \phi(x_1) = 1.41666666666667$$
$$x_3 = \phi(x_2) = 1.41421568627451$$

Exemplo

Para ilustrar a rapidez da convergência do Método de Newton, vamos aplicá-lo ao cálculo de $\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$, procurando a raiz positiva de $f(x) = x^2 - \alpha$. As iterações são calculadas a partir de

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - \alpha}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) \quad \text{(Babilônios!)}$$

Para $\alpha = 2$ e partindo-se de $x_0 = 2$, obtemos, usando-se precisão dupla:

$$x_1 = \phi(x_0) = 1.5$$
$$x_2 = \phi(x_1) = 1.41666666666667$$
$$x_3 = \phi(x_2) = 1.41421568627451$$
$$x_4 = \phi(x_3) = 1.41421356237469$$

Exemplo

Para ilustrar a rapidez da convergência do Método de Newton, vamos aplicá-lo ao cálculo de $\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$, procurando a raiz positiva de $f(x) = x^2 - \alpha$. As iterações são calculadas a partir de

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - \alpha}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) \quad \text{(Babilônios!)}$$

Para $\alpha = 2$ e partindo-se de $x_0 = 2$, obtemos, usando-se precisão dupla:

$$x_1 = \phi(x_0) = 1.5$$
$$x_2 = \phi(x_1) = 1.41666666666667$$
$$x_3 = \phi(x_2) = 1.41421568627451$$
$$x_4 = \phi(x_3) = 1.41421356237469$$
$$x_5 = \phi(x_4) = 1.4142135623731$$

Exemplo

Para ilustrar a rapidez da convergência do Método de Newton, vamos aplicá-lo ao cálculo de $\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$, procurando a raiz positiva de $f(x) = x^2 - \alpha$. As iterações são calculadas a partir de

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - \alpha}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) \quad \text{(Babilônios!)}$$

Para $\alpha = 2$ e partindo-se de $x_0 = 2$, obtemos, usando-se precisão dupla:

$$x_1 = \phi(x_0) = 1.5$$
$$x_2 = \phi(x_1) = 1.41666666666667$$
$$x_3 = \phi(x_2) = 1.41421568627451$$
$$x_4 = \phi(x_3) = 1.41421356237469$$
$$x_5 = \phi(x_4) = 1.4142135623731$$

Usando-se uma biblioteca matemática obtém-se em precisão dupla que $\sqrt{2} = 1.4142135623731$, igual ao resultado da quinta iteração.

Ordem de convergência

Para se ter uma noção melhor da convergência definimos o conceito de ordem de de convergência.

Ordem de convergência

Para se ter uma noção melhor da convergência definimos o conceito de ordem de de convergência.

Definição

Considere uma sequência $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ convergindo para $\bar{x}$. Dizemos que a sequência tem ordem de convergência $p \geq 1$ se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^p} = C.$$

Quando $p = 1$, temos necessariamente $C < 1$.

Ordem de convergência

Para se ter uma noção melhor da convergência definimos o conceito de ordem de de convergência.

Definição

Considere uma sequência $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ convergindo para $\bar{x}$. Dizemos que a sequência tem ordem de convergência $p \geq 1$ se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^p} = C.$$

Quando $p = 1$, temos necessariamente $C < 1$.

- Sob as condições do Teorema 1, se $\phi'(\bar{x}) \neq 0$, temos $p = 1$ (convergência de ordem 1 ou linear);

Ordem de convergência

Para se ter uma noção melhor da convergência definimos o conceito de ordem de de convergência.

Definição

Considere uma sequência $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ convergindo para $\bar{x}$. Dizemos que a sequência tem ordem de convergência $p \geq 1$ se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^p} = C.$$

Quando $p = 1$, temos necessariamente $C < 1$.

- Sob as condições do Teorema 1, se $\phi'(\bar{x}) \neq 0$, temos $p = 1$ (convergência de ordem 1 ou linear);
- quando $p > 1$, dizemos que a convergência é superlinear.

Ordem de convergência

Mostraremos agora que, sob as hipóteses do Teorema 2, a convergência do Método de Newton é pelo menos de ordem 2 (ou quadrática). De fato,

$$x_{k+1} - \bar{x} = x_k - \bar{x} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f'(x_k)(x_k - \bar{x}) - f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{3}$$

Ordem de convergência

Mostraremos agora que, sob as hipóteses do Teorema 2, a convergência do Método de Newton é pelo menos de ordem 2 (ou quadrática). De fato,

$$x_{k+1} - \bar{x} = x_k - \bar{x} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f'(x_k)(x_k - \bar{x}) - f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{3}$$

Usando-se expansão em Taylor:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k + \bar{x} - x_k) = f(x_k) + f'(x_k)(\bar{x} - x_k) + \frac{1}{2} f''(t_k)(\bar{x} - x_k)^2,$$

onde t_k está entre $\bar{x}$ e x_k.

Ordem de convergência

Mostraremos agora que, sob as hipóteses do Teorema 2, a convergência do Método de Newton é pelo menos de ordem 2 (ou quadrática). De fato,

$$x_{k+1} - \bar{x} = x_k - \bar{x} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f'(x_k)(x_k - \bar{x}) - f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{3}$$

Usando-se expansão em Taylor:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k + \bar{x} - x_k) = f(x_k) + f'(x_k)(\bar{x} - x_k) + \frac{1}{2} f''(t_k)(\bar{x} - x_k)^2,$$

onde t_k está entre $\bar{x}$ e x_k. Substituindo-se o resultado acima em (3) obtemos

$$x_{k+1} - \bar{x} = \frac{1}{2} \frac{f''(t_k)}{f'(x_k)} (x_k - \bar{x})^2.$$

Ordem de convergência

Como $t_k \to \bar{x}$ quando $k \to \infty$ e f' e f'' são contínuas, obtemos finalmente que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right|.$$

Ordem de convergência

Como $t_k \to \bar{x}$ quando $k \to \infty$ e f' e f'' são contínuas, obtemos finalmente que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right|.$$

Logo, se $f''(\bar{x}) \neq 0$, a ordem de convergência é 2 com $C = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right|$.

Ordem de convergência

Como $t_k \to \bar{x}$ quando $k \to \infty$ e f' e f'' são contínuas, obtemos finalmente que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right|.$$

Logo, se $f''(\bar{x}) \neq 0$, a ordem de convergência é 2 com $C = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right|$. Note que assintoticamente temos

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \approx C|x_k - \bar{x}|^2, \quad k \gg 1,$$

o que nos mostra a rapidez da convergência do Método de Newton.