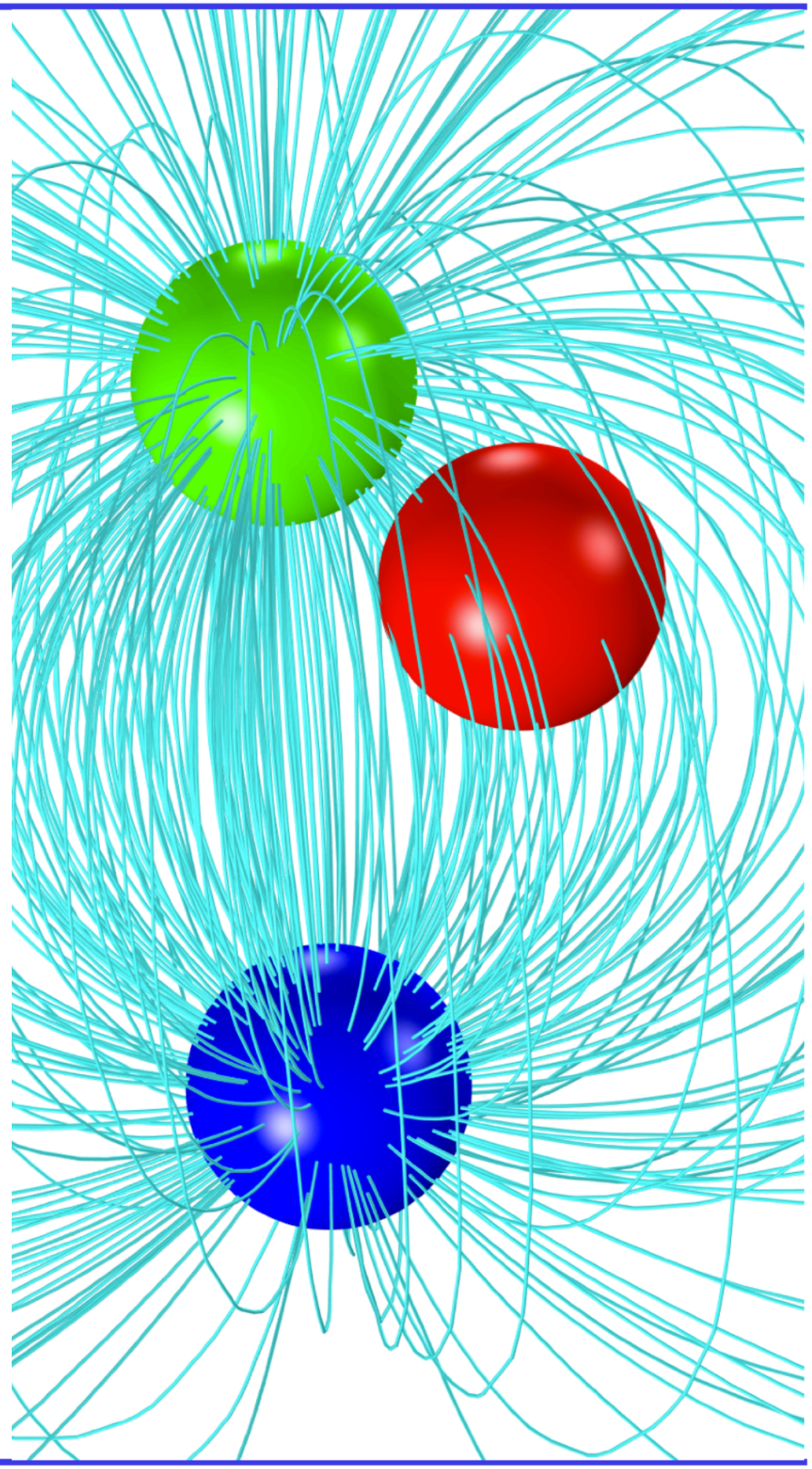
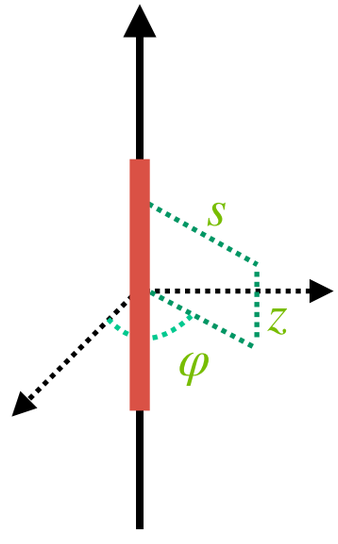
Eletromagnetismo 1

⚡Exemplos e problemas em Eletrostática



Problema do fio finito



Considere um fio muito fino mas ***finito***, reto, alinhado com a direção z e centrado na origem, no intervalo $-z_0 \leq z \leq +z_0$ (veja figura ao lado). Assuma que uma carga Q está uniformemente distribuída sobre esse fio — ou seja, o fio tem uma densidade linear de carga $\lambda = Q/(2\,z_0)$.

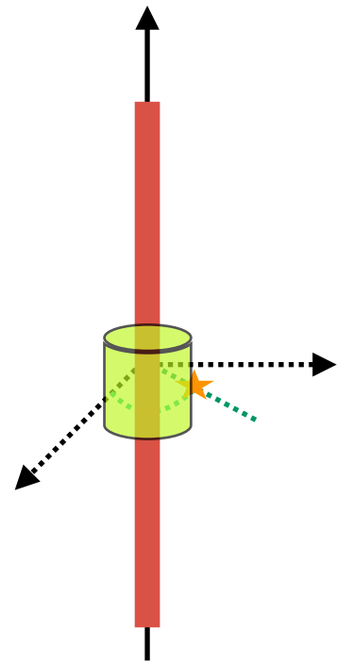
(a) Usando apenas a Lei de Gauss, vamos calcular o campo elétrico numa região muito próxima à origem — ou seja, para $|z|\,, \rho \ll z_0$.

Tanto no caso do fio infinito quanto neste caso, de um fio finito, temos ***simetria azimutal/axial*** exata — ou seja, nada depende do ângulo φ .

Porém, se o observador está muito próximo do fio, e suficientemente longe das terminações, os efeitos das pontas do fio podem ser desprezados. Isso significa que, para esse observador, o fio é efetivamente infinito, tanto para cima quanto para baixo, o que resulta numa ***simetria por translações em*** z.

Vamos então aplicar a Lei de Gauss num volume cilíndrico, como indicado na figura:

$$\int_V d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \oint_{S(V)} d\vec{S}\cdot\vec{E} = \int_V d^3x\, \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\, h}{\epsilon_0}$$



Devido às simetrias ao longo do eixo z e por rotações em torno de φ , o campo elétrico não tem nenhuma componente nessas direções, apenas na direção do raio (em coordenadas cilíndricas). Nesse caso, apenas os lados do cilindro contribuem com:

$$(h\, 2\pi s)\, E_s = \frac{\lambda\, h}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_s = \frac{\lambda}{2\pi\, \epsilon_0\, s}$$

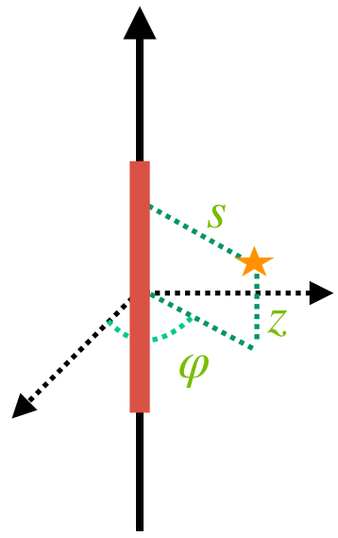
que é o resultado usual para um fio infinito. Note ainda que isso leva ao potencial elétrico:

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\,\epsilon_0}\,\ln s \quad , \quad \text{de forma que } \vec{E} = -\,\vec{\nabla}\phi = -\,\hat{s}\partial_s\phi = \hat{s}\,E_s$$

Porém, note que esse potencial só vale na região muito próxima da origem, portanto um modo melhor de escrever esse resultado seria:

$$\phi \approx -\frac{\lambda}{2\pi\,\epsilon_0}\,\ln\left(\frac{s}{2z_0}\right) + \text{const}\,. \quad , \quad \text{onde } 2z_0 \text{ é o comprimento total do fio, e aqui tomamos o limite } s \ll z_0\,.$$

Problema do fio finito



(b) Agora vamos calcular o potencial elétrico ***exato*** desse fio finito.

Para isso vamos utilizar não a Lei de Gauss, mas a nossa expressão para o potencial como solução da Eq. de Poisson:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' \, \frac{\rho(x')}{|\,\vec{x} - \vec{x}'\,|}$$

sujeito à condição de que $\phi \to 0$ para $z, s \to \infty$.

Mas nós de fato sabemos que essa é a condição de contorno no infinito?…

…Sim!

Afinal, um observador ***muito longe*** da origem vai ver simplesmente uma carga Q, com potencial $\phi \approx \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$!

Vamos então calcular esse potencial — em coordenadas cilíndricas, claro. Primeiro, vamos estabelecer que a densidade de cargas é dada por:

$\rho(s', z') = \dfrac{Q}{4\pi z_0}\dfrac{1}{s'}\delta(s')\,\theta_H(z_0 - |\,z\,|)$ onde a função theta de Heaviside (ou função degrau) é tal que

$\theta_H(x) = 0$ se $x < 0$ e $\theta_H(x) = 1$ se $x > 0$.

Com essa expressão, e lembrando que o elemento de volume em coordenadas cilíndricas é $dV' = s'ds'\,d\varphi'\,dz'$, temos:

$$\int dV'\rho \;=\; \int_0^\infty s'ds' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\varphi'\,\rho(s', z') \;=\; \int_0^\infty s'ds' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\varphi'\,\frac{Q}{4\pi z_0}\,\frac{1}{s'}\,\delta(s')\,\theta_H(z_0 - |\,z\,|)$$

$$= \frac{Q}{4\pi z_0}\int_0^\infty s'ds'\frac{1}{s'}\,\delta(s') \int_{-z_0}^{z_0} dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' \;=\; \frac{Q}{4\pi z_0}\,(1)\,(2z_0)\,(2\pi) \;=\; Q$$

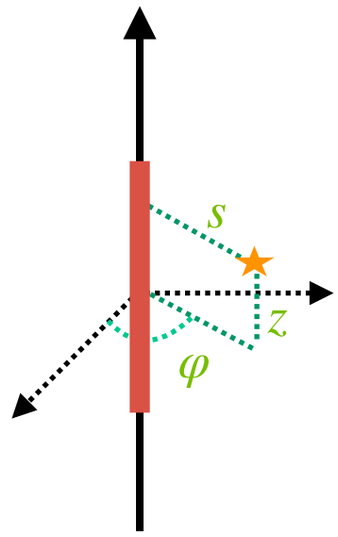
Problema do fio finito

(b) Contin.

OK, então agora podemos substituir essa densidade de cargas na integral do potencial:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' \frac{\rho(x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty ds'\, s' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{(s'-s)^2+(z'-z)^2}} \frac{Q}{4\pi z_0}\frac{\delta(s')}{s'}\theta_H(z_0-|z|)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2z_0}\int_{-z_0}^{z_0} dz' \frac{1}{\sqrt{s^2+(z'-z)^2}}$$



Agora, essa integral tem uma ***primitiva analítica***, relativamente simples — trata-se da função $\sinh^{-1}$ (arco do seno hiperbólico):

$$\int dt' \frac{1}{\sqrt{1+(t'-t)^2}} = \sinh^{-1}(t'-t) = -\sinh^{-1}(t-t')$$

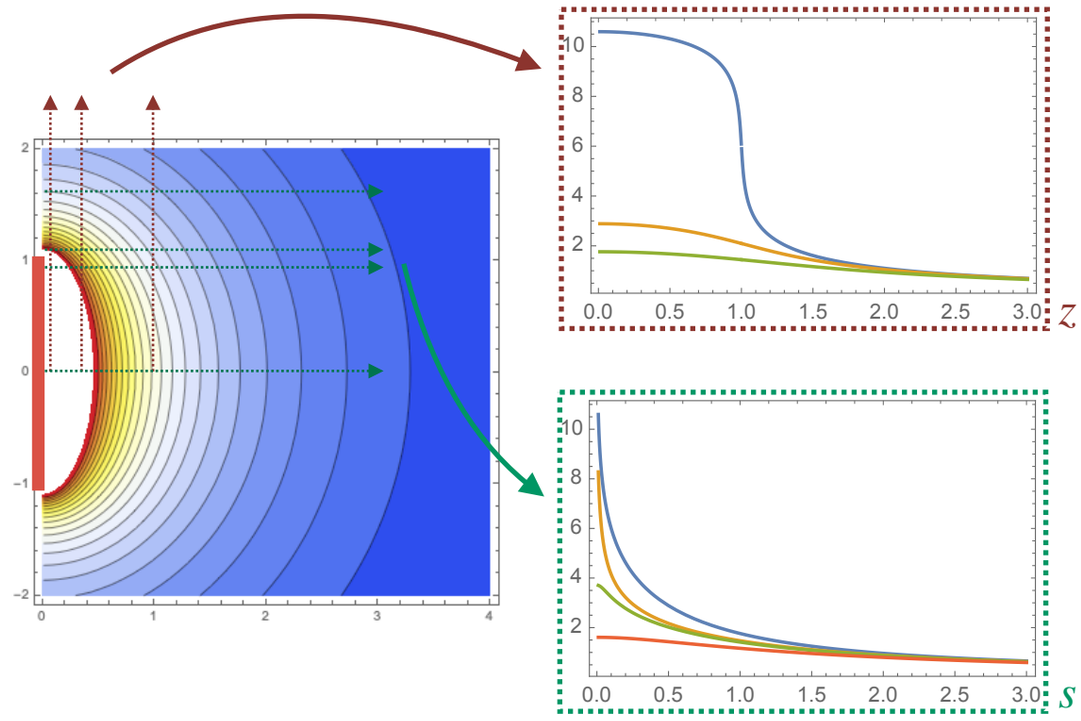
Portanto, o nosso resultado para o potencial do fio finito é:

$$\phi(s,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\int_{-z_0/s}^{z_0/s}\frac{dz'}{s}\frac{1}{\sqrt{1+(z'/s-z/s)^2}}$$

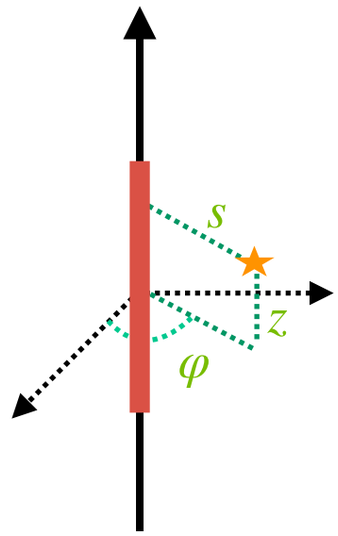
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\left[\sinh^{-1}(z_0/s-z/s)-\sinh^{-1}(-z_0/s-z/s)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\left[\sinh^{-1}\left(\frac{z+z_0}{s}\right)-\sinh^{-1}\left(\frac{z-z_0}{s}\right)\right]$$

Esse potencial está mostrado na figura ao lado.



Problema do fio finito



(c) Contin.

Agora vamos conectar o resultado exato do item (b) aos resultados aproximados, ou seja:

$$\phi \approx -\frac{\lambda}{2\pi\,\epsilon_0}\,\ln\left(\frac{s}{2z_0}\right) + \text{const.} = -\frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0\,z_0}\,\ln\left(\frac{s}{2z_0}\right) + \text{const.} \quad , \quad \text{para} \quad |z|, s \ll z_0 \quad ,$$

o que nos retorna o limite em que o fio parece ser infinito a um observador muito próximo da origem; e

$$\phi \approx \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\,\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{s^2+z^2}} \quad , \quad \text{para} \quad |z| \text{ ou } s \gg z_0 \quad ,$$

o que nos retorna o limite em que o fio finito é tão pequeno que parece uma carga pontual (Q).

Vamos precisar de alguns limites assintóticos do arco-seno hiperbólico, por exemplo:

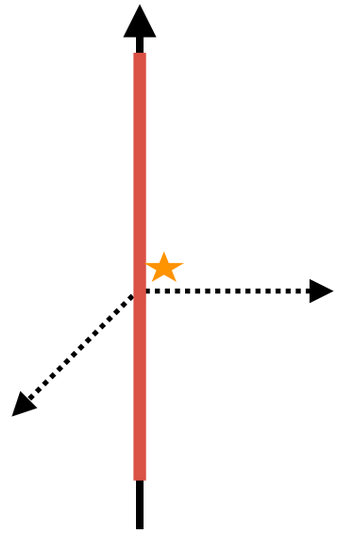
$$\lim_{t\to 0} \sinh^{-1}(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \mathcal{O}(z^5)$$

$$\lim_{t\to \infty} \sinh^{-1}(t) = \ln(2t) + \frac{1}{(2t)^2} + \mathcal{O}(t^{-4})$$

Vamos então aplicar esses dois limites no nosso potencial:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\lambda\left[\sinh^{-1}\left(\frac{z+z_0}{s}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{z-z_0}{s}\right)\right]$$

Problema do fio finito



(c) Contin.

No primeiro caso (limite do fio infinito), tomamos $|z|, s \ll z_0$ na nossa solução:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\left[\sinh^{-1}\left(\frac{z/z_0+1}{s/z_0}\right)-\sinh^{-1}\left(\frac{z/z_0-1}{s/z_0}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\left[\sinh^{-1}\left(\frac{1+z/z_0}{s/z_0}\right)+\sinh^{-1}\left(\frac{1-z/z_0}{s/z_0}\right)\right] \quad ,$$

onde observe que $|z|/z_0 \ll 1$ e $s/z_0 \ll 1$, logo o argumento do $\sin^{-1}$ é muito ***grande***.

Agora, usando que:

$$\lim_{t\to\infty}\sinh^{-1}(t) = \ln(2t) + \frac{1}{(2t)^2} + \mathcal{O}(t^{-4})$$

obtemos:

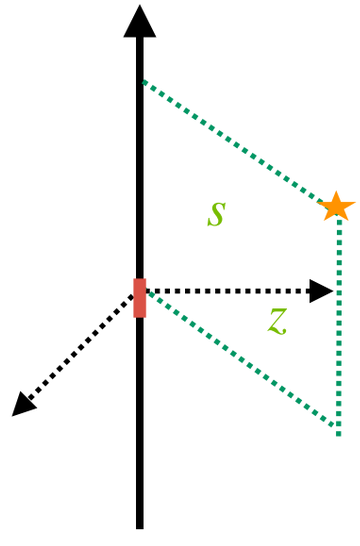
$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\left[\ln\left(\frac{2z_0}{s}\right)+\ln\left(\frac{2z_0}{s}\right)+\ldots\right]$$

$$\approx -\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\lambda\,\ln\left(\frac{s}{2z_0}\right)+\ldots \quad , \quad \text{que é precisamente o resultado para um fio infinito!}$$

Problema do fio finito

(c) Contin.

Agora vamos tomar o limite em que estamos muito longe do fio infinito, ou seja, tomamos $|z|, s \gg z_0$ na nossa solução:



$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\left[\sinh^{-1}\left(\frac{z+z_0}{s}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{z-z_0}{s}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\left[\sinh^{-1}\left(\frac{1+z_0/z}{s/z}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{1-z_0/z}{s/z}\right)\right] \quad ,$$

Por simplicidade, vamos primeiro tomar $s/z \gg 1$, logo o argumento do $\sin^{-1}$ é muito ***pequeno***.

Agora, usando que:

$$\lim_{t\to 0}\sinh^{-1}(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \mathcal{O}(z^5)$$

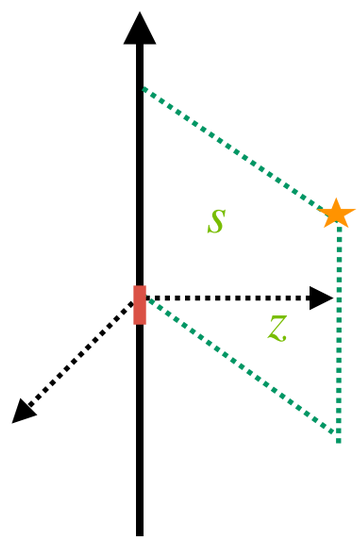
obtemos:

$$\phi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\left[\left(\frac{1+z_0/z}{s/z}\right) - \left(\frac{1-z_0/z}{s/z}\right) + \ldots\right]$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\,z_0}2\frac{z_0}{s} + \ldots$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{s} + \ldots \quad , \text{ que é precisamente o resultado que obtemos muito longe da carga } Q \text{ !}$$

Problema do fio finito



(c) Contin.

OK, mas nesse último caso nós não obtivemos realmente o limite ***mais geral***, em que $\phi \to (1/4\pi\epsilon_0)\, Q/r$, pois acabamos nos limitando à região próxima do plano z, apesar de tomarmos $s \to \infty$ …

Porém, nós podemos obter o limite correto se observarmos que a expansão em série de Taylor da função $\sinh^{-1}$ é na verdade dada por:

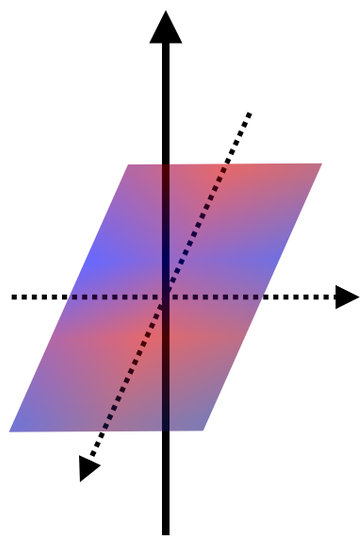
$$\lim_{\Delta t \to 0} \sinh^{-1}(t + \Delta t) = \sinh^{-1} t + \frac{\Delta t}{\sqrt{1 + t^2}} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Você pode agora usar essa série no caso geral, com quaisquer $|z|, s \gg z_0$, para obter que:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\lambda\,\left[\sinh^{-1}\left(\frac{z + z_0}{s}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{z - z_0}{s}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\lambda\,\left[\sinh^{-1}\left(\frac{1 + z_0/z}{s/z}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{1 - z_0/z}{s/z}\right)\right] \\
&\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{\sqrt{s^2 + z^2}} + \ldots
\end{aligned}$$

O que novamente é a resposta correta!

Plano com densidade de carga periódica



Considere que o plano $z = 0$ possui uma densidade superficial de carga dada por:

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 \, \sin(3x) \, \cos(4y)$$

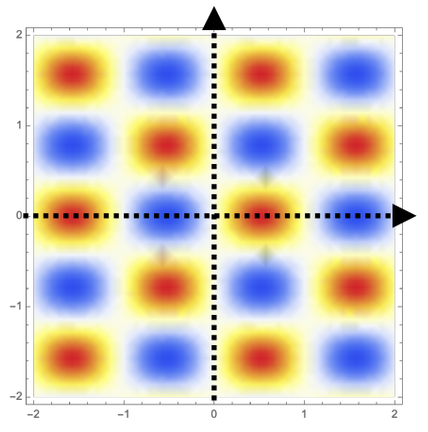
Vamos encontrar o potencial e o campo elétrico em todo o espaço.

(a) Escreva ***todas*** as condições de contorno relevantes para esse problema físico.

Deve estar claro que temos dois volumes desconexos:

(a) o volume $z > 0$, delimitado pelo plano $z = 0$ e pelo comportamento do campo em $z \to +\infty$

(b) o volume $z < 0$, delimitado pelo plano $z = 0$ e pelo comportamento do campo em $z \to -\infty$



Do ponto de vista do campo elétrico, o Teorema de Helmholtz nos diz que é necessário especificar o divergente ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$) e o rotacional ($\vec{\nabla} \times \vec{E}$) nas duas superfícies que delimitam esses volumes.

É claro que estamos tratando de um problema de eletrostática, portanto $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ em todo o espaço.

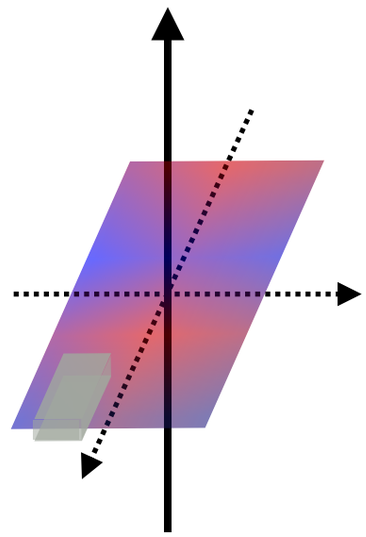
Além disso, como a carga total no plano $z = 0$ se anula, o campo $\vec{E}(z \to \pm\infty) \to 0$.

Resta então especificar o divergente do campo na superfície $z = 0$.

Plano com densidade de carga periódica

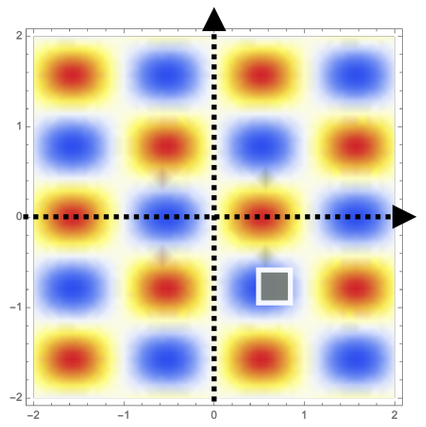
(a) Contin.

Vamos então aplicar a Lei de Gauss num bloquinho de lados $x \to x + \delta_x$ e $y \to y + \delta_y$, e altura δz muito pequena (muito menor do que δ_x ou δ_y). Vamos assumir também que os lados são tão pequenos que a densidade de carga é aproximadamente constante dentro do bloquinho. Temos então:



$$\int_V d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \;=\; \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{E} \;=\; \int_V d^3x\, \frac{\rho}{\epsilon_0} \;=\; \int_V d^2S\, \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma(x,y)}{\epsilon_0}\, \delta_x\, \delta_y$$

A integral de superfície nos dá o campo elétrico nas tampas de cima e de baixo que, por simetria, são iguais e de sentido contrário. Portanto:



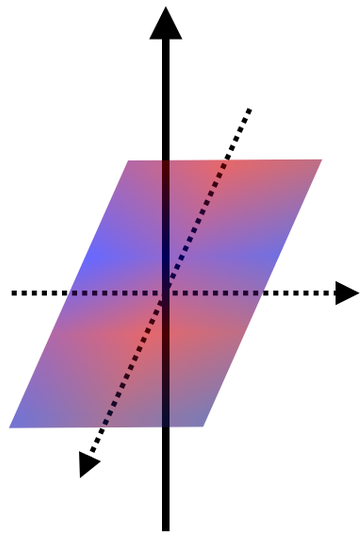
$$\left[E_z(x,y,z\to 0^+) - E_z(x,y,z\to 0^-)\right]\, \delta_x\, \delta_y \;=\; 2\, E_z(x,y,z\to 0^+)\, \delta_x\, \delta_y \;=\; (\sigma/\epsilon_0)\, \delta_x\, \delta_y \quad , \quad \text{ou,}$$

dito de uma forma mais elegante: $\Delta E_\perp = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$

Também podemos escrever essa condição como: $\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = -\,\sigma/2\epsilon_0$

Note que nós estamos assumimos implicitamente que o potencial é contínuo nas direções do campo que são paralelas ao plano : $\Delta \vec{E}_{||} = 0$. De fato, você pode chegar nesse resultado aplicando o Teorema de Stokes nesse mesmo bloquinho, e usando o fato de que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$!

Plano com densidade de carga periódica



(b) Levando em conta essas condições de contorno, encontre o potencial em $z > 0$ — e depois calcule o campo elétrico.

Claramente, estamos buscando uma solução para a equação de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$, sujeita a certas cond. de contorno.

Já sabemos que a condição de contorno mais relevante para o potencial elétrico é:

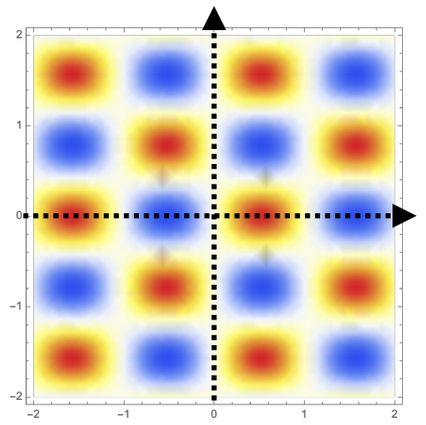
$$\hat{n}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\sigma/2\epsilon_0 \quad \text{onde} \quad \sigma(x,y) = \sigma_0\,\sin(3x)\,\cos(4y)$$

Neste problema podemos (devemos!) tentar uma solução via separação de variáveis. Em geral, teríamos:

$$\phi(x,y,z) = \sum_n X_n(x)\,Y_n(y)\,Z_n(z) \quad \text{com} \quad \frac{1}{X_n}\frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} + \frac{1}{Y_n}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} + \frac{1}{Z_n}\frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} = 0$$

Vimos na aula passada que a solução geral é dada por combinações de senos e cossenos, algo como:

$$\phi = \sum_n Re\left[A_n\, e^{i\,(k_n^x\,x + k_n^y\,y + k_n^z\,z)}\right] = \sum_n Re\left[A_n\, e^{i\,\vec{k}_n\cdot\vec{x}}\right]$$



onde os modos são $\vec{k}_n = \{k_n^x, k_n^y, k_n^z\}$ com $\vec{k}_n\cdot\vec{k}_n = 0$

Impondo as condições de contorno podemos encontrar as constantes acima, mas é evidente que $e^{i\,k_n^x\,x} \to \sin(3x)$ e $e^{i\,k_n^y y} \to \cos(4y)$:

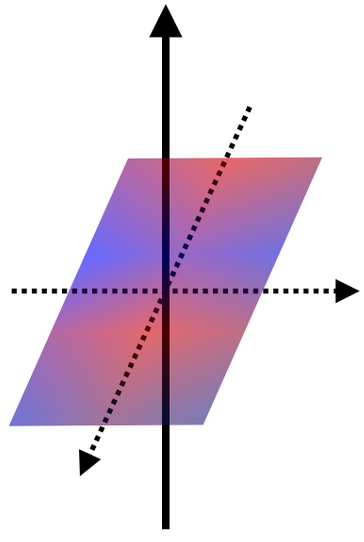
$$\phi(x,y,0) = \sum_n Re\left[A_n\, e^{i(k_n^x\,x + k_n^y\,y + k_n^z\,0)}\right] \sim \sin(3x)\,\cos(4y)$$

com $k_{n,x} = 3$ e $k_{n.y} = 4$. Pela condição de que $\vec{k}_n\cdot\vec{k}_n = 0$ temos que $k_{n,z} = 5\ i$. Ou seja:

$$\phi(x,y,z) = \frac{\sigma_0}{10\epsilon_0}\,\sin(3x)\,\cos(4y)\,e^{\pm 5z}$$

[Para ver quais são os modos em termos dos A_n, use $\cos\alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$, $\sin\alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/2i$ $\Rightarrow$ $k^x = \pm 3$, $k^y = \pm 4$ e $k^z = \pm 5i$]

Plano com densidade de carga periódica



(b) Cont.

Agora, é claro que para o volume $z > 0$ a condição de que o campo decai com a distância até se tornar nulo no infinito implica que a única solução que pode satisfazer essa cond. de contorno é a que decai com e^{-5z}, e portanto temos:

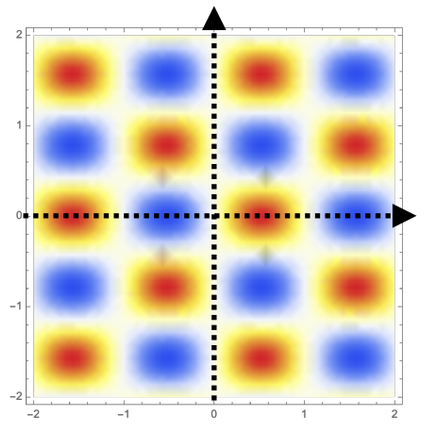
$$\phi(x, y, z \geq 0) \;=\; \frac{\sigma_0}{10\epsilon_0}\; \sin(3x)\; \cos(4y)\, e^{-5z}$$

No volume $z < 0$ é o exato oposto: o campo decai a zero para $z \to -\infty$, portanto temos:

$$\phi(x, y, z \leq 0) \;=\; \frac{\sigma_0}{10\epsilon_0}\; \sin(3x)\; \cos(4y)\, e^{+5z}$$

(c) Vamos agora calcular o campo elétrico. Na parte de cima temos:

$$\vec{E} = -\,\vec{\nabla}\,\phi = -\left(\hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z\right)\,\phi$$



Aplicando no potencial acima temos:

$$\vec{E}(x, y, z \geq 0) \;= -\frac{\sigma_0}{10\epsilon_0}\left\{\hat{x}\,[3\;\cos(3x)]\;\cos(4y)\,e^{-5z} + \hat{y}\;\sin(3x)\,[-4\sin(4y)]\,e^{-5z} + \hat{z}\;\sin(3x)\;\cos(4y)\,[-5e^{-5z}]\right\}$$

Por outro lado, o campo no volume de baixo é idêntico ao encontrado acima, só temos que mudar $z \to -z$:

$$\vec{E}(x, y, z \leq 0) \;= -\frac{\sigma_0}{10\epsilon_0}\left\{\hat{x}\,[3\;\cos(3x)]\;\cos(4y)\,e^{+5z} + \hat{y}\;\sin(3x)\,[-4\sin(4y)]\,e^{+5z} + \hat{z}\;\sin(3x)\;\cos(4y)\,[5e^{+5z}]\right\}$$

Note que esse campo satisfaz ***exatamente*** as condições de contorno:

$$\left[E_z(x, y, z \to 0^+) - E_z(x, y, z \to 0^-)\right] \;=\; \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\sin(3x)\cos(4y) \;=\; \frac{\sigma(x, y)}{\epsilon_0}\;\;!!!$$

Ou seja, tudo se encaixa direitinho, como deveria ser!

Próxima aula:

- A Equação de Laplace em coordenadas esféricas
- Separação de variáveis em coordenadas esféricas
- A expansão multipolar

- Leitura:

  Griffiths, Cap. 3.3-3.4

  Jackson, Cap. 2