Indução Matemática e Boa Ordenação

Teo. (Princípio da Indução Matemática)

Seja S um subconjunto dos inteiros positivos $\mathbb{P}$ satisfazendo:

(i) $1 \in S$

(ii) Se $k \in S$ então $k+1 \in S$.

Então todos os inteiros positivos estão em S.

Princípio da Boa Ordenação

Todo subconjunto não vazio de inteiros positivos possui um elemento minimal

Def: $T \subset \mathbb{P}$, $t_0 \in T$ é minimal se $t_0 \in T$ e $t \geq t_0$ $\forall t \in T$.

Teo. O princípio da boa ordenação é equivalente a indução matemática.

Exemplo: Verifique que vale.

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \quad n\in P.$$

dem. Suponha por absurdo que a afirmação não é válida $\forall$ n inteiro positivo.

Note que se $n=1$ tal afirmação vale.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2+3+1}{6}=\frac{6}{6}=1=1^2$$

Seja $S\subset P$ o conj. tais que a afirmação seja falsa

Como $1\notin S$, pelo PBO que $\exists\, k>1$ em S tal que é elemento minimal de S, e a afirmação é falsa para k. Logo a afirmação é verdadeira para $k-1$.

$$k^2+1^2+2^2+\dots+(k-1)^2=\frac{(k-1)^3}{3}+\frac{(k-1)^2}{2}+\frac{k-1}{6}+k^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(k^3-3k^2+3k-1\right)+\frac{1}{2}\left(k^2-2k+1\right)+\frac{k-1}{6}+k^2$$

$$=\frac{k^3}{3}-\cancel{k^2}+\cancel{k}-\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{k^2}{2}-\cancel{k}+\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{k-\cancel{1}}{6}+\cancel{k^2}=\frac{k^3}{3}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{6} \;\lightning$$

$\therefore S=\emptyset \Longrightarrow$ Afirmação verdadeira $\forall$ inteiro positivo. $\boxtimes$

Definição por indução: Consiste em:

recursão

(i) define-se para $n=1$.

(ii) Assume-se definido para $n=k$ e define-se para $n=k+1$.

n inteiro positivo!

Exemplos.

inteiros positivos

1) Verifique que $\varphi : \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{P}$ por

(i) $\varphi(1) = 1$ (ii) $\varphi(n+1) = (n+1)\varphi(n)$

está bem definida.

$n=1$ $\varphi(1+1) = \varphi(2) = (1+1)\varphi(1) = 2.1$

$n=k \rightsquigarrow n=k+1$ $\varphi(k+2) = (k+2)\varphi(k+1)$

$= (k+2)(k+1)\varphi(k)$

$= (k+2)(k+1)k(k-1)\cdots$

$= (k+2)!$

$$
\begin{aligned}
n! := \varphi(n) &= n\varphi(n-1) \\
&= n(n-1)\varphi(n-2) \\
&= n(n-1)\cdots\varphi(1)
\end{aligned}
$$

2) A soma de vários nºs reais $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ é denotada por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Note que tal simbologia está bem definida.

$n = 1$ $\quad \sum_{k=1}^{1} a_1 = a_1$

$n = j$ $\quad \sum_{k=1}^{j} a_k \rightsquigarrow n = j+1 \quad \sum_{k=1}^{j} a_k + a_{j+1}$

$$= \sum_{k=1}^{j+1} a_k$$

Valores absolutos e desigualdades

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Geometricamente $|x|$ representa a distância de $x \in \mathbb{R}$ à origem $\underline{\underline{0}}$.

<u>Teo</u>: Se $a \geq 0$, então $|x| \leq a$ se só se $-a \leq x \leq a$.

($\Rightarrow$) Note que $-|x| \leq x \leq |x|$

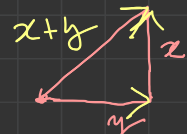
$\therefore \; -a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$

Logo $\boxed{-a \leq x \leq a}$.

($\Leftarrow$) se $x \geq 0 \rightsquigarrow \quad |x| = x \leq a$.

se $x < 0$, $\quad |x| = -x \leq a$

$\therefore \quad |x| \leq a \quad \forall \, -a \leq x \leq a$. $\blacksquare$



Teo. (Desigualdade Triangular)

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

dem. $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$

$$\rightsquigarrow \quad -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$\therefore \quad -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$\rightsquigarrow \quad |x+y| \leq |x| + |y| \qquad \blacksquare$$

Teo. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ nºs reais. Então

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

que é equivalente a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

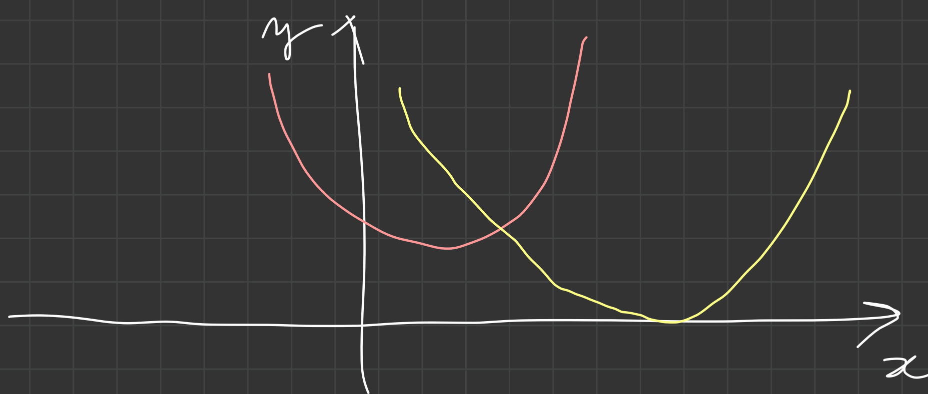
Prova. Note que $\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \{a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2\}$$

$$0 \leq x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + x\, 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = p(x)$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad B = 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad e \quad C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$p(x) = Ax^2 + Bx + C \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$p(x)$ possui no máximo 1 raiz i.e.

$$\Delta = B^2 - 4AC \leq 0 \rightsquigarrow B^2 \leq 4AC$$

$$\therefore 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \quad \blacksquare$$

Exercícios.

1) Mostre que $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$.

2) Seja $p: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ o polinômio de grau dois $p(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes. Verifique se $p(x) \geq 0$ então $b^2 - 4ac \leq 0$.

3) $$\sum_{i=1}^{n} \{\alpha a_i + \beta b_i\} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Com $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ dados