Eletromagnetismo 1



Aula 3

- ⚡Equações de Laplace e Poisson
- ⚡Separação de variáveis
- ⚡Solução formal: Função de Green
- ⚡O método das imagens

As Equações de Poisson e Laplace

- A versão homogênea da Lei de Gauss (ou Equação de Poisson para o potential) é a ***Equação de Laplace***:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \nabla^2\phi = 0$$

- Além do interesse próprio, as soluções da Equação de Laplace podem ser somadas às soluções da Equação de Poisson, de modo a encontrar uma solução particular que satisfaça as condições de contorno:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \phi_1$$

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_2$$

Aqui entra uma propriedade fundamental do Eletromagnetismo: a ***linearidade.*** Ou seja, qualquer combinação linear de duas soluções das equações do EM também é uma solução!

- Podemos então utilizar essas funções homogêneas para ***ajustar as condições de contorno*** conforme o caso:

C.C. de Dirichlet $\Longrightarrow$ $\left(\phi_1 + \phi_2\right)_S = \Phi_s$, onde Φ_S expressa o potencial numa superfície S;

C.C. de Neumann $\Longrightarrow$ $\left[\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\left(\phi_1 + \phi_2\right)\right]_S = \partial\Phi_{n,S}$, onde $\partial\Phi_{n,S}$ expressa o gradiente do potencial normal à superfície S;

- Ainda hoje veremos como essa linearidade pode ser utilizada para construir uma ferramenta extremamente poderosa — o ***método da Função de Green***, que permite calcular uma ***solução geral*** para a equação de Poisson (inhomogênea) .

Separação de variáveis e série de Fourier

- Na aula passada consideramos um problema bastante geral, formulado em coordenadas Cartesianas, cuja solução em termos do método de separação de variáveis é:

$$\nabla^2\phi \;=\; \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad \phi(x,y,z) \;=\; \sum_n X_n(x)\,Y_n(y)\,Z_n(z)$$

- Substituindo na equação de Laplace temos:

$$\frac{1}{X_n}\frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2}+\frac{1}{Y_n}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2}+\frac{1}{Z_n}\frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2}=0$$

- Cada termo da expressão acima é função de uma variável diferente, portanto para satisfazer a equação eles têm que ser ***constantes*** — vamos chamá-las de $-k_{n,x}^2$, $-k_{n,y}^2$ e $-k_{n,z}^2$. Com isso, chegamos a uma ***equação algébrica*** que expressa a Eq. de Laplace:

$$k_{x,n}^2+k_{y,n}^2+k_{z,n}^2 \;=\; 0$$

- Isso nos leva imediatamente à ***solução geral***:

$$\phi \;=\; \sum_n A_n\, e^{i(k_{n,x}x+k_{n,y}y+k_{n,z}z)} \;=\; \sum_n A_n\, e^{i\,\vec{k}_n\cdot\vec{x}} \qquad , \qquad \text{com} \quad \vec{k}_n=\{k_{n,x}\,,k_{n,y}\,,k_{n,z}\} \quad \text{e} \quad \vec{k}_n\cdot\vec{k}_n=0$$

Separação de variáveis e série de Fourier

- Vimos nos exemplos acima como podemos expressar as condições de contorno em termos de séries de Fourier.
  Em 1D temos algo como:

$$f(x) \to \sum_n f_n \cos(k_n x + \varphi_n^+) = \sum_n \left[a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) \right]$$

- Agora queremos fazer uma afirmação mais rigorosa. Digamos que temos uma ***função periódica***, de periodicidade L. Então temos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) \right] \quad , \quad \text{com} \quad k_n = n\, 2\pi / L$$

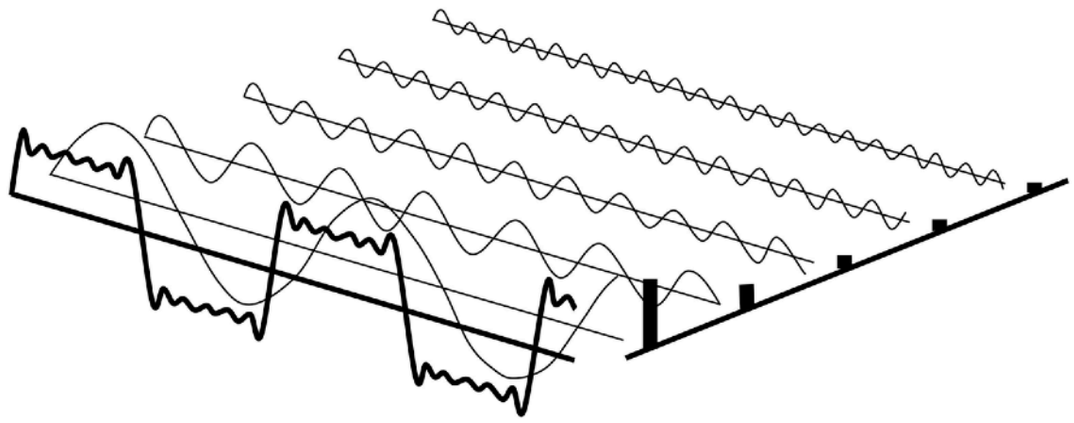
  Note que $n\, 2\pi(x+L)/L = n\, 2\pi + n\, 2\pi x/L$, portanto $\cos[k_n(x+L)] = \cos[k_n x]$ e $\sin[k_n(x+L)] = \sin[k_n x]$, o que garante a periodicidade.

- Podemos encontrar quem são esses coeficientes (a_n e b_n) usando as ***condições de ortogonalidade***:

$$\int_0^L dx\ \sin\left(\frac{n\,2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\,2\pi x}{L}\right) = \frac{L}{2}\delta_{mn} \quad ,$$

$$\int_0^L dx\ \cos\left(\frac{n\,2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\,2\pi x}{L}\right) = \frac{L}{2}\delta_{mn} \quad , \text{ e}$$

$$\int_0^L dx\ \sin\left(\frac{n\,2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\,2\pi x}{L}\right) = 0 \quad .$$



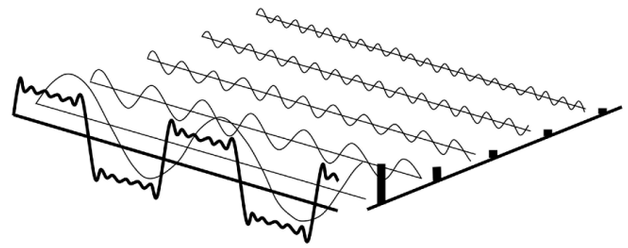
Separação de variáveis e série de Fourier

- Usando as ortogonalidades acima, podemos integrar a nossa função:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) \right]$$

$$\int_0^L dx\, f(x)\, \cos\left(m\, 2\pi x/L\right) = a_m \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L dx\, f(x)\, \sin\left(m\, 2\pi x/L\right) = b_m \frac{L}{2}$$

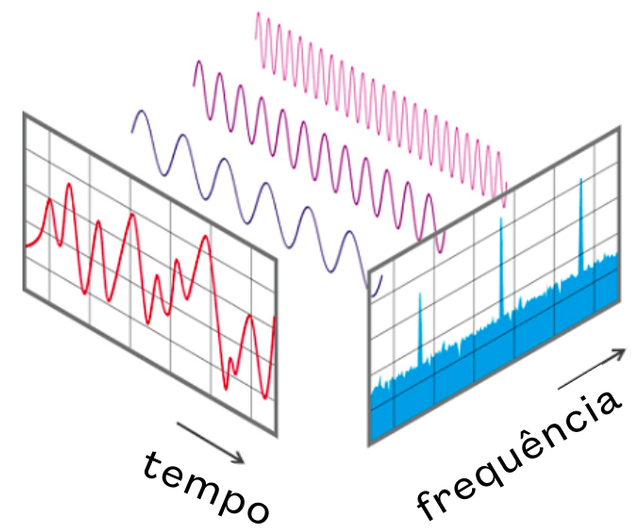


- Mas e para funções contínuas em $\mathbb{R}$, porém não necessariamente periódicas? Nesse caso podemos usar o conceito da ***transformada de Fourier***:

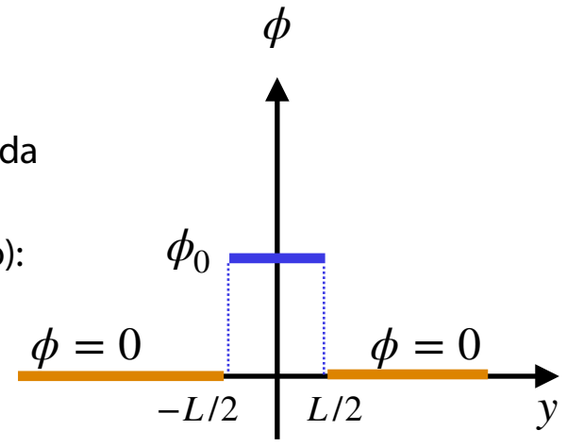
$$f(x) \quad \rightarrow \quad \tilde{f}(k) = \int dx\, e^{ikx} f(x) \quad ,$$

$$\tilde{f}(k) \quad \rightarrow \quad f(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ikx} \tilde{f}(k) \quad , \text{ com}$$

$$\int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ik(x-x')} = \delta(x-x') \quad \text{e} \quad \int dx\, e^{i(k-k')x} = 2\pi\, \delta(k-k')$$



Separação de variáveis e Transformada de Fourier



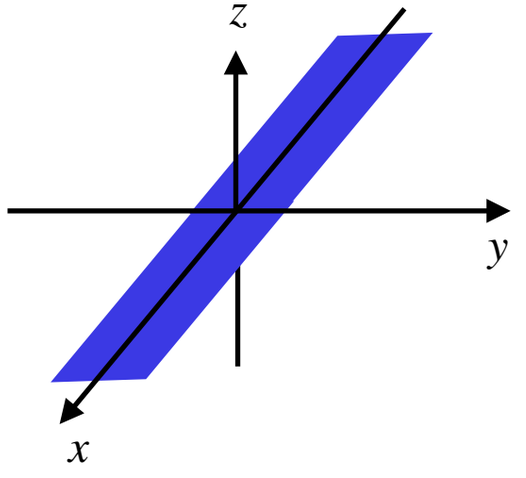
- Vamos agora resolver um problema bastante avançado, mas muito interessante, que pode ser resolvido pelo método da transformada de Fourier. Considere que fixamos o potencial no plano x-y, de tal forma que numa "fita" de largura L o potencial tem um certo valor (ϕ_0), e no restante do plano o potencial é nulo (ou seja, o resto desse plano está aterrado):

$$\phi(|y| < L/2\,, z = 0) = \phi_0$$

$$\phi(|y| > L/2\,, z = 0) = 0$$

- Esse "degrau" no potencial, como função de y, pode ser escrito por meio de uma transformada de Fourier:

$$\phi(y, z = 0) = \phi_0 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \cos(ky)$$



- Substituindo isso na Eq. de Laplace e usando as solutions encontradas antes nesta aula nós obtemos:

$$\phi(y, z) = \phi_0 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{-k|z|} \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \cos(ky)$$

$$= \frac{\phi_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{-k|z|} \left[\sin k(y + L/2) - \sin k(y - L/2)\right]$$

- Agora temos um tipo de integral que é ***exata***:

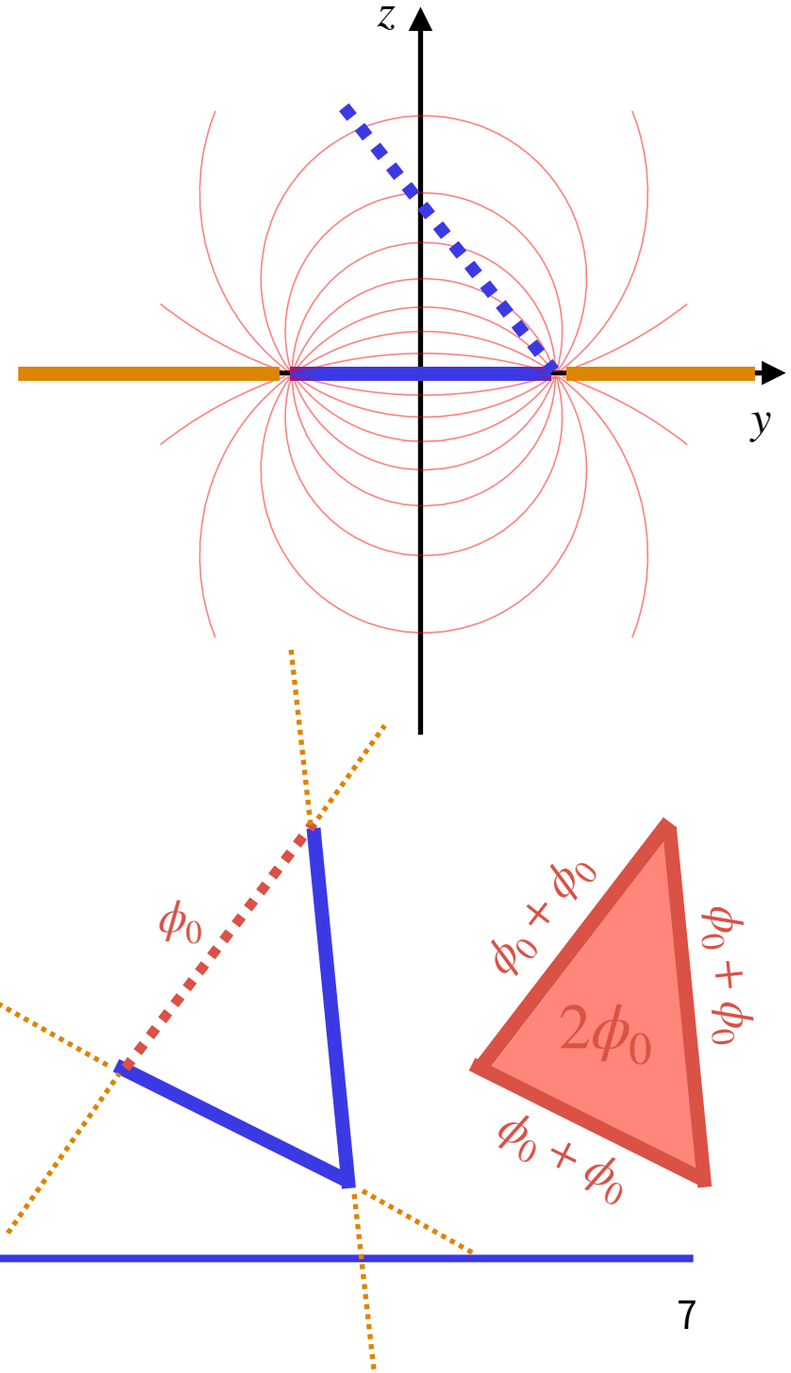
$$\int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{-k|z|} \sin ky = \text{ArcTan}\left(\frac{y}{|z|}\right)$$

Separação de variáveis e Transformada de Fourier

- Com a ajuda da integral acima nós re-escrevemos o potencial como:

$$\phi(y,z) = \frac{\phi_0}{\pi}\left[\text{ArcTan}\left(\frac{y+L/2}{|z|}\right) - \text{ArcTan}\left(\frac{y-L/2}{|z|}\right)\right]$$

- A forma desse potencial é mostrada na figura ao lado (lembrando: a tira se estende infinitamente na direção x).
- Agora, nós poderíamos pensar em **combinar** fitas tais como essa, sempre no plano $y-z$. Mas devemos proceder com ***cuidado***, porque ao adicionar o potencial da outra fita, isso ***muda o campo na posição da outra fita***!
- Ou seja, a soma dos potenciais de duas fitas individuais ***não obedece a condição de contorno***, que nos diz que o potencial de uma fita individual, na posição dela, deve ser ϕ_0 — e quando introduzimos a outra fita, o potencial na posição de cada uma delas não é mais ϕ_0 !
- Porém, é fascinante que essas soluções do tipo arco-tangente têm uma propriedade absolutamente incrível: suponha que nós somamos as soluções de duas fitas com o mesmo potencial ϕ_0 , de tal modo que as fitas se tocam, como mostrado na figura ao lado.
- Então, pode-se mostrar (!) que, apesar do **potencial na posição de cada uma das duas fitas não ser mais dado por ϕ_0 , o potencial do lado "faltante" do triângulo formado pelas duas fitas tem o valor ϕ_0 !!**
- Isso significa que , se agora nós de **fato** colocamos uma ***terceira*** fita no lado do triângulo, também com potencial ϕ_0, então cada par de fitas vai gerar aumentar o potencial na posição da terceira fita por um valor ϕ_0 , de tal modo que ficamos com a seguinte configuração:
- Bem, o que você acha que vai acontecer dentro desse triângulo…
- Sim, o potencial **dentro do triângulo é constante** — de fato, ele será $2\phi_0$, tal como na borda do triângulo!
- Então agora o que nós temos é uma solução ***exata*** para qualquer ***triângulo de potencial constante*** $(2\phi_0)$!



Separação de variáveis e Transformada de Fourier

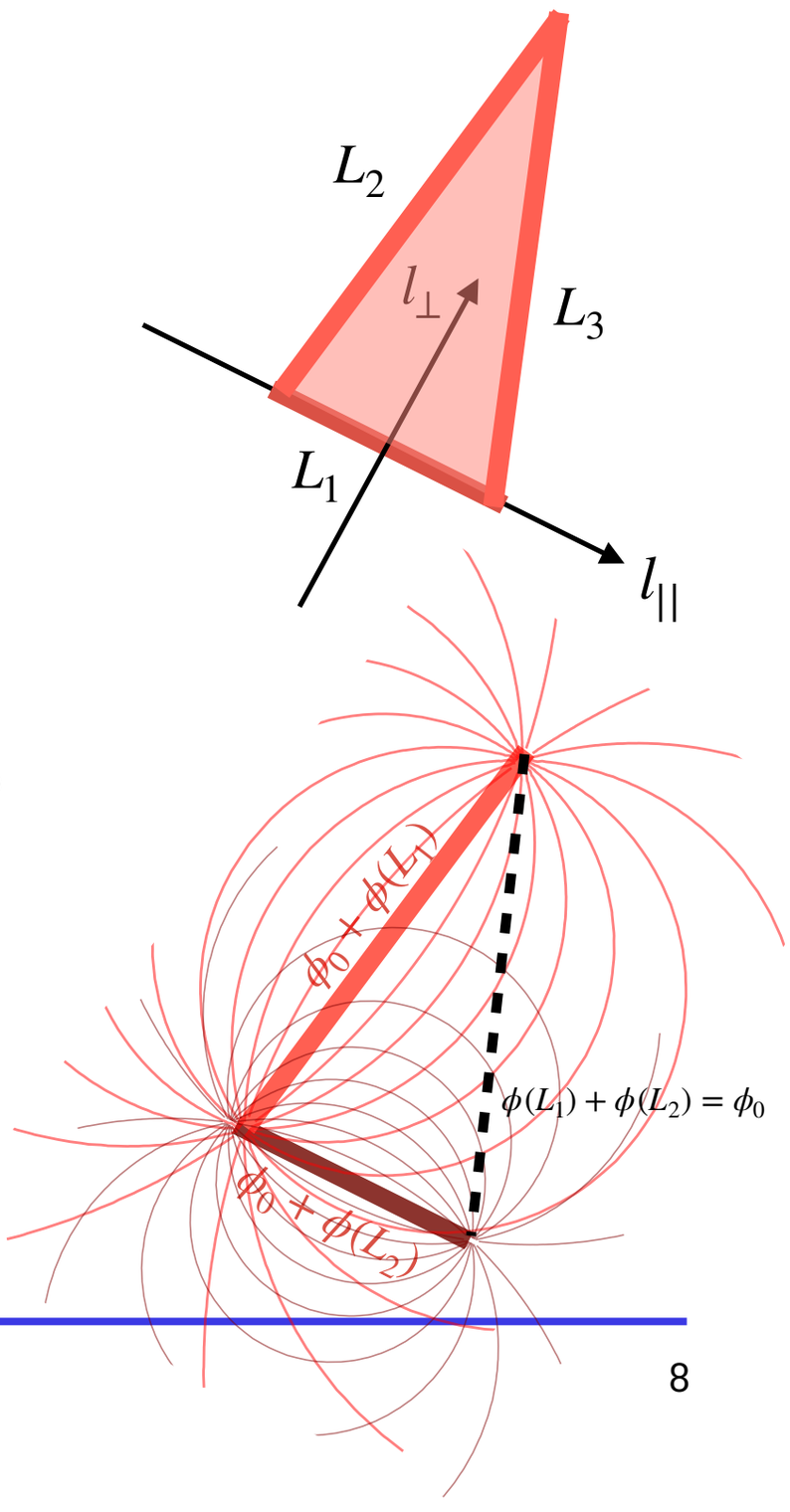
- Que ***raios*** está acontecendo?… Uma solução exata, de uma fita de comprimento L, orientada ao longo de uma direção $l_{||}$ qualquer, é dada por:

$$\phi^{(L_1)}(l_{||}, l_\perp) = \frac{\phi_0}{\pi}\left[\text{ArcTan}\left(\frac{l_{||}+L_1/2}{|l_\perp|}\right) - \text{ArcTan}\left(\frac{l_{||}-L_1/2}{|l_\perp|}\right)\right]$$

- Por outro lado, tem que ser verdade que, para qualquer **volume fechado** com um **valor fixo de ϕ como condição de contorno,** o potencial dentro dessa superfície tem que ser **homogêneo**, e **igual ao valor na superfície.**

- Suponha agora que começamos com um lado (L_1), e que fechamos um triângulo usando dois outros lados (L_2 e L_3). Então, a **linearidade** da Eq. de Laplace implica que **tem** que ser verdade que a soma das três soluções nos dá um potencial **constante** dentro do triângulo.

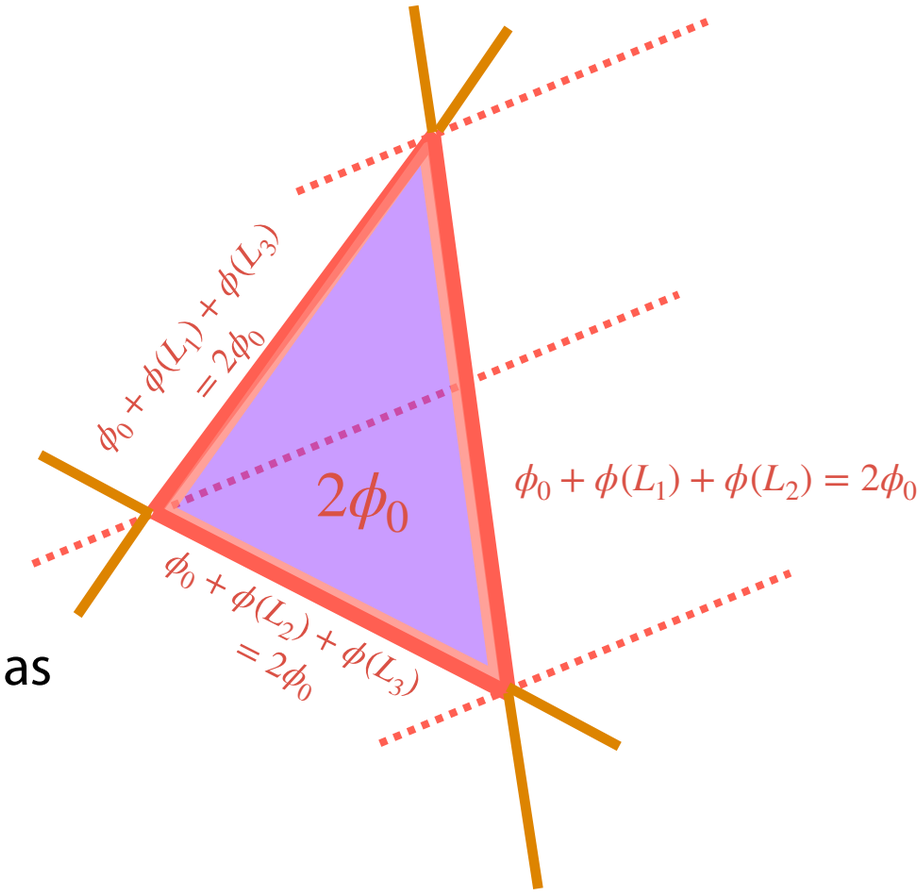
- Mas se a solução é **constante dentro do triângulo**, e a condição de contorno é ela mesma tal que qualquer um dos lados tem um potencial constante, então **tem que ser verdade** que os dois outros lados contribuem com um potencial constante no terceiro lado do triângulo!



Separação de variáveis e Transformada de Fourier

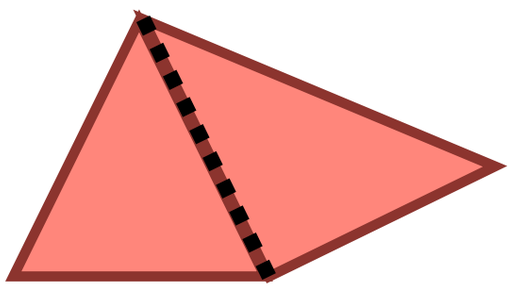
- A combinação de tudo isso é, portanto, que:

$$\phi(y,z) = \phi^{(L_1)}(y,z) + \phi^{(L_2)}(y,z) + \phi^{(L_3)}(y,z)$$



- Essa é a *mágica* das funções harmônicas: elas "sabem" como ajustar as condições em todo o espaço, de modo a satisfazer as condições de contorno!

- Agora, uma pequena provocação para vocês: considere a seguinte situação. Suponha que nós combinamos dois triângulos:



E agora? …

Nós podemos então obter uma **solução exata** para qualquer **polígono em 2D** usando a nossa solução para o segmento/fita?

Separação de variáveis: generalização

- O método da separação de variáveis também é extremamente útil em ***outros sistemas de coordenadas***.
- Digamos que temos um problema no qual as ***coordenadas cilíndricas*** sejam as mais indicadas. A equação de Laplace nessas coordenadas fica:

$$\nabla^2\phi \;=\; \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \;=\; 0$$

- Agora, "ingenuamente", se aplicarmos a separação com um *ansatz* de um modo similar ao que fizemos no caso Cartesiano teríamos:

$$\phi(\rho,\varphi,z) \;=\; \sum_n R_n(\rho)\,\Psi_n(\varphi)\,Z_n(z)$$

- Mas substituindo isso na Eq. de Laplace, cada termo (n) dessa equação ficaria:

$$\frac{1}{R_n}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R_n}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\Psi_n}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi_n}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{Z_n}\frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} \;=\; 0 \quad , \quad \text{o que de fato só é "separável" para o termo que depende de } z!$$

- Portanto, agora temos de proceder com mais cuidado, e a separação de variáveis tem de ser feita "por partes". Vamos tomar:

$$\phi(\rho,\varphi,z) \;=\; \sum_n S_n(\rho,\varphi)\,Z_n(z) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{S_n}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial S_n}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{S_n}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 S_n}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{Z_n}\frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} \;=\; 0$$

- Tomando o termo em z como uma constante ($-k_n^2$), temos então:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial S_n}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 S_n}{\partial\varphi^2}-k^2 S_n \;=\; 0$$

Separação de variáveis: generalização

- Portanto, em coordenadas cilíndricas chegamos nas equações:

$$\frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} = -k_n^2 Z_n \quad , \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial S_n}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 S_n}{\partial \varphi^2} - k_n^2 S_n = 0$$

- Agora, vamos escrever $S_n = \rho^2 R_n(\rho)\Psi_n(\varphi)$, o que leva a:

$$\frac{1}{R_n}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial (\rho^2 R_n)}{\partial \rho}\right) - k_n^2 \rho^2 + \frac{1}{\Psi_n}\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \varphi^2} = 0$$

- Agora, sim, os dois termos da esquerda são funções apenas de ρ, enquanto o último é função apenas de φ. Portanto, ambos devem ser uma constante, que vamos chamar de $-\alpha_n^2$. Temos então:

$$\frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} = -k_n^2 Z_n \quad , \quad \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \varphi^2} = -\alpha_n^2 \Psi_n \quad , \quad \text{e a equação “radial":}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial (\rho^2 R_n)}{\partial \rho}\right) - \left(\alpha_n^2 + k_n^2 \rho^2\right) R_n = 0$$

- Nós veremos mais adiante como lidar com esse tipo de situação — por enquanto, não se preocupe com essa complicação toda!

O método da Função de Green

- Vamos voltar à Equação de Poisson no Eletromagnetismo:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$ ou , de um modo mais geral, a Eq. de Poisson em termos de uma ***fonte genérica*** $f(\vec{x})$:

$$\nabla^2\phi = f(\vec{x})$$

- De fato, podemos considerar uma equação ***ainda mais geral*** (em 1D, por simplicidade):

$$\hat{D}_x\,\phi \;=\; \alpha(x)\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} \;+\; \beta(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} \;+\; \gamma(x)\,\phi(x) \;=\; f(x)$$

onde $\alpha(x)$, $\beta(x)$ e $\gamma(x)$ são funções dadas: polinômios, exponenciais, etc.

- Note essa é uma ***equação linear***, de ***segunda ordem***, com um termo de ***fonte*** totalmente ***geral***, $f(x)$.
- Vamos agora mostrar um ***método geral*** que nos permite encontrar soluções para essa equação, para ***quaisquer fontes***: o **método da Função de Green**.
- Vamos supor que encontramos uma solução da equação associada:

$$\hat{D}_x\,G(x,x') \;=\; \delta(x-x')$$

- Note que, no caso da Equação de Poisson, já temos uma solução — em 3D!

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \quad\Rightarrow\quad G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{-1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

O método da Função de Green

- Temos então a equação diferencial original,

$$\hat{D}_x \phi = f(x) \quad , \quad \text{e a equação associada:}$$

$$\hat{D}_x G(x, x') = \delta(x - x')$$

- A ***solução geral*** da equação, com quaisquer fontes, é então dada por:

$$\phi(x) = \int dx' \, G(x, x') f(x')$$

- Demonstração:

$$\hat{D}_x \phi = \hat{D}_x \int dx' \, G(x, x') f(x') = \int dx' \, \hat{D}_x G(x, x') f(x')$$

$$= \int dx' \, \delta(x - x') f(x') = f(x)$$

- No caso da Equação de Poisson da Eletrostática,

$$f \to -\rho/\epsilon_0 \quad \text{e} \quad G(\vec{x}, \vec{x}') = -1/(4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|) \quad , \quad \text{levando a:}$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$ ***Ainda bem!!***

O método da Função de Green

- Uma questão muito importante a respeito dessa solução formal exposta acima é: ela seria ***única***?
- E uma questão muito próxima a essa: como essa solução geral permite resolver a Eq. de Poisson sujeita a diferentes ***condições de contorno***?
- A resposta passa por considerar novamente a equação para a Função de Green:

$$\hat{D}_x\, G(x,x') \;=\; \delta(x-x') \qquad ,$$

e notar que ela mesma admite ***várias (infinitas!) soluções.***



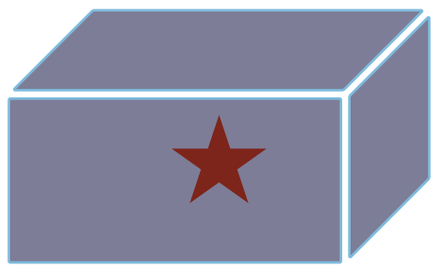
- Vamos tomar as soluções da equação homogênea:

$$\hat{D}_x\, \phi_h(x) \;=\; 0$$ (no caso da Eq. de Poisson, a "equação homogênea" é a Eq. de Laplace!)

- Qualquer solução homogênea pode então ser adicionada à Função de Green:

$$G(x,x') \;\rightarrow\; \tilde{G}(x,x') = G(x,x') + \phi_h(x)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{D}_x\, \tilde{G}(x,x') \;=\; \delta(x-x')$$



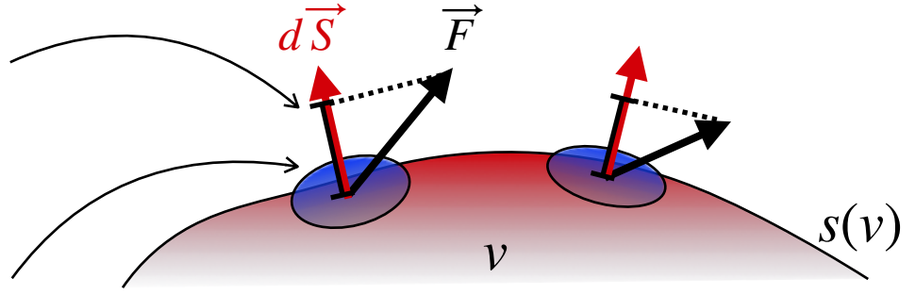
- Ou seja, de fato existem *infinitas* funções de Green — dizemos que as funções de Green são ***degeneradas*.**
- Isso significa, em particular, que podemos ***ajustar a função de Green***, adicionando soluções homogêneas à vontade, de modo a ***satisfazer as condições de contorno***!
- Isso é mais fácil dizer do que fazer — mas não se preocupe, vamos fazer isso logo mais!

A função de Green e o Teorema de Helmholtz

- Vamos retornar ao Teorema de Helmholtz, que nos diz que tudo que precisamos para encontrar um campo vetorial num dado volume é especificar o seu **divergente** e o seu **rotacional**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = S_{\text{div}} \qquad \text{and} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{S}_{\text{rot}}$$

- O campo é determinado univocamente se também especificamos as **condições de contorno** na superfície que delimita esse volume:



$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Psi + \vec{\nabla} \times \vec{T} \quad , \quad \text{com}$$

$$\Psi = \frac{1}{4\pi}\int_v d^3x' \frac{S_{\text{div}}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi}\oint_{s(v)} d\vec{s}' \cdot \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \Longleftarrow \quad \vec{F}_{\perp}$$

$$\vec{T} = \frac{1}{4\pi}\int_v d^3x' \frac{\vec{S}_{\text{rot}}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{4\pi}\oint_{s(v)} d\vec{s}' \times \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \Longleftarrow \quad \vec{F}_{||}$$

O Teorema de Green

- Agora vamos obter um resultado que é similar ao Teorema de Helmholtz, mas é ainda **mais poderoso**. Considere o **Teorema de Green:**

$$\int_v d^3x \, \left(f \, \nabla^2 g - g \, \nabla^2 f\right) = \oint_{s(v)} d\vec{S} \cdot \left(f \, \vec{\nabla} g - g \, \vec{\nabla} f\right)$$

- Vamos agora especificar essas funções. Primeiro, tome $x \to x'$ como a variável de integração, e para as funções f e g tome:

$f \to \phi(\vec{x}')$, e

$g \to G(\vec{x}', \vec{x})$ — ou seja, uma função de Green da Equação de Poisson, tal que $\nabla^2 G = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$.

- O Teorema de Green fica então:

$$\int d^3x' \, \left[\phi(\vec{x}') \, \nabla'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x}) \, \nabla'^2 \phi(\vec{x}')\right] = \oint d\vec{S}' \cdot \left[\phi(\vec{x}') \, \vec{\nabla}' G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x}) \, \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')\right]$$

- Mas lembre-se que $\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$, ou melhor, $\nabla'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) = \delta(\vec{x}' - \vec{x})$. Além disso, $\nabla'^2 \phi(\vec{x}') = -\rho(\vec{x}')/\epsilon_0$, portanto:

$$\int d^3x' \left[\phi(\vec{x}') \, \delta(\vec{x}' - \vec{x}) + G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0}\right] = \oint d\vec{S}' \cdot \left[\phi(\vec{x}') \, \vec{\nabla}' G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x}) \, \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')\right]$$

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = -\int d^3x' \, G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} + \oint d\vec{S}' \cdot \left[\underbrace{\phi(\vec{x}') \, \vec{\nabla}' G(\vec{x}', \vec{x})}_{\text{Dirichlet}} - \underbrace{G(\vec{x}', \vec{x}) \, \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')}_{\text{Neumann}}\right]$$

O Teorema de Green

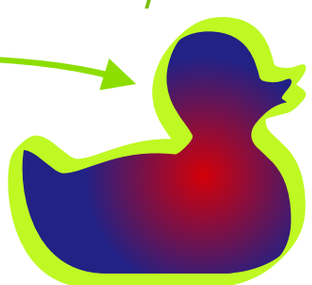
- Isso significa que o potencial é dado por:

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = -\int_V d^3x'\, G(\vec{x}', \vec{x})\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0}$$

$$+ \oint_{S(V)} d\vec{S}' \cdot \left[\phi(\vec{x}')\, \vec{\nabla}' G(\vec{x}', \vec{x})\right]$$

Especifique ϕ em S

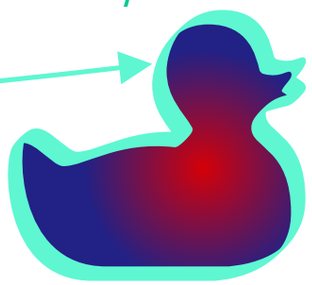
$G\big|_{S'} \to 0 \quad , \quad \partial G/\partial n'\big|_{S'} \neq 0$



$$- \oint_{S(V)} d\vec{S}' \cdot \left[G(\vec{x}', \vec{x})\, \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')\right]$$

Especifique $\partial\phi/\partial n$ em S

$G\big|_{S'} \neq 0 \quad , \quad \partial G/\partial n'\big|_{S'} \to 0$



- Podemos então utilizar essa "liberdade" para escolher a função de Green:

(i) Dadas C.C. de Dirichlet, tome $G \to G_D(\vec{x}', \vec{x})$ tal que $G_D\left(\vec{x}', \vec{x}\right)\Big|_S = 0$

(ii) Dadas C.C. de Neumann, tome $G \to G_N(\vec{x}', \vec{x})$ tal que $\left[\frac{\partial}{\partial n'} G_N\left(\vec{x}', \vec{x}\right)\right]_S = 0$

O Teorema de Green

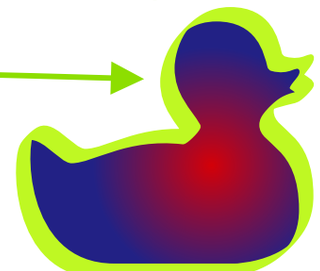
- No caso de C.C. de Dirichlet a situação é um pouco mais simples:

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = -\int_V d^3x'\, G_D(\vec{x}', \vec{x})\, \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0}$$

$$+ \oint_{S(V)} d\vec{S}' \cdot \left[\phi(\vec{x}')\, \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}', \vec{x})\right]$$

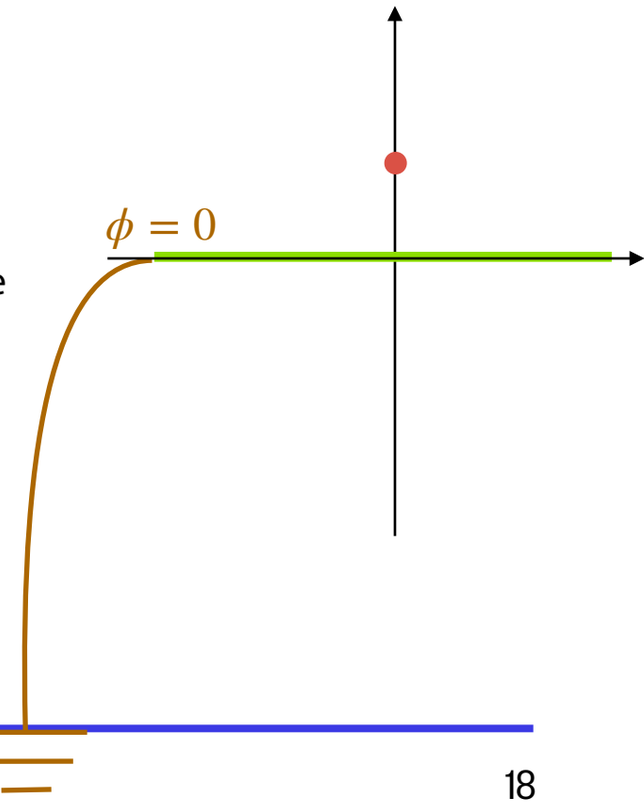
$$- \oint_{S(V)} d\vec{S}' \cdot \left[G_D(\vec{x}', \vec{x})\, \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')\right]$$

Especifique ϕ em S



- Vamos usar essa idéia para encontrar um método muito legal para resolver certos tipos de problemas envolvendo cargas nas proximidades de um condutor.

- Suponha que temos uma ***carga pontual*** localizada num ponto qualquer acima de um ***condutor*** que é muito ***plano*** e muito grande, como na figura ao lado. Digamos também que o condutor está ***aterrado***, de forma que $\phi \to 0$ na superfície do condutor.



- Por simplicidade, vamos definir a superfície do condutor como sendo o plano $z = 0$, e colocar a carga a uma altura z_0 acima do plano, ou seja:

$$\phi(x, y, z = 0) = 0 \quad , \quad \text{e}$$

$$\rho = q\, \delta(\vec{x} - z_0\, \hat{z}) = q\, \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z - z_0)$$

O método das imagens

- Vamos tentar pensar nesse problema usando a função de Green dados o volume e a superfície mostrados ao lado (plano $z > 0$):

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = -\int_V d^3x'\, G_D(\vec{x}', \vec{x})\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} + \oint_{S(V)} d\vec{S}' \cdot \left[\phi(\vec{x}')\,\vec{\nabla}' G_D(\vec{x}', \vec{x})\right] - \oint_{S(V)} d\vec{S}' \cdot \left[G_D(\vec{x}', \vec{x})\,\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}')\right]$$

- Já sabemos que a função de Green da Eq. de Poisson tem uma solução particular:

$$G = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|}$$

- Mas a C.C. que nos diz que $\phi \to 0$ em $z = 0$, então podemos adicionar uma solução "homogênea", $\nabla^2\phi_h = 0$, tal que $G_D \to 0$ naquela superfície.
- Considere a seguinte função:

$$\phi_h = +\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}_i|} \quad , \quad \text{onde} \quad \vec{x}_i = \{x, y, -z\}$$

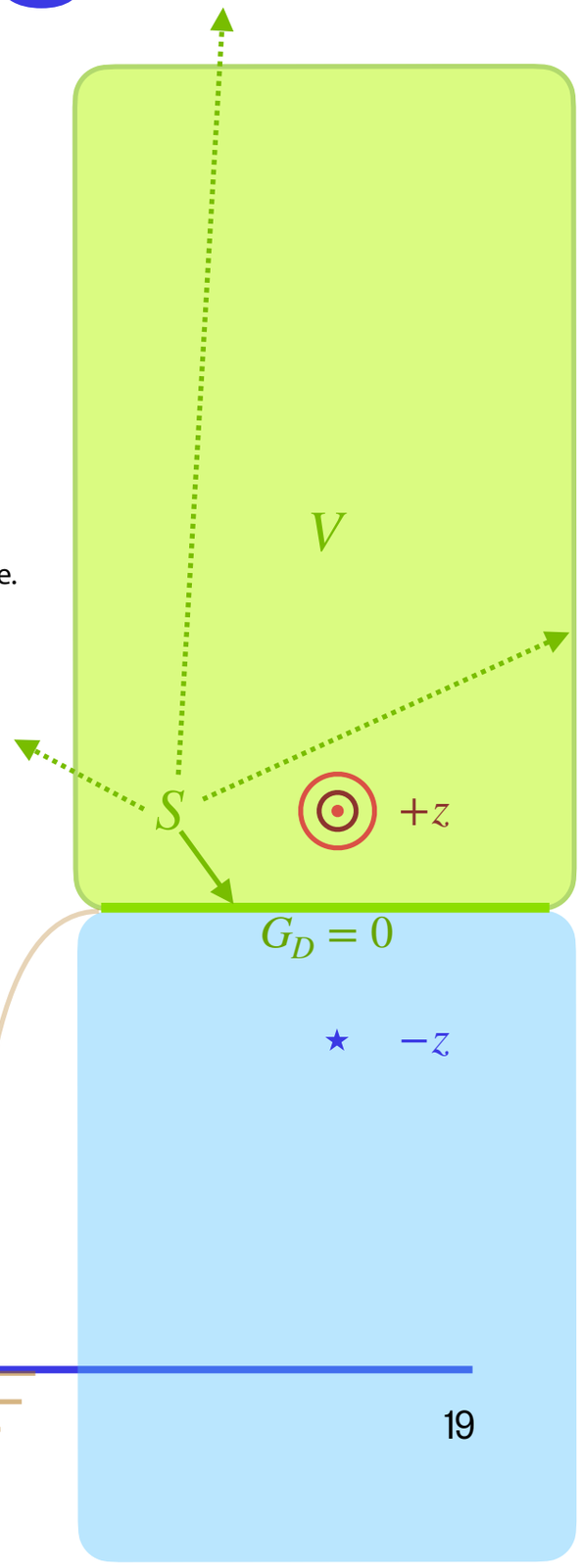
$$\nabla^2\phi_h = -\,\delta(x - x')\,\delta(y - y')\,\delta(z + z')$$

- Note que no volume $z > 0$ essa função delta só teria valores não-nulos com $z' < 0$ — na região ***abaixo*** do nosso plano condutor aterrado.
- Portanto, podemos construir uma função de Green que satisfaz as C.C. de Dirichlet como:

$$G_D = G + \phi_h = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}_i|}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad G_D(\vec{x}, \vec{x}')\Big|_{z'=0} = 0$$



O método das imagens

- Substituindo a função de Green encontrada acima temos:

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x' \left[\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} - \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}_i|}\right] \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0}$$

$$+ \oint_{S(V)} d\vec{S}' \cdot \left[\phi(\vec{x}')\, \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}', \vec{x})\right]$$

onde o segundo termo é zero porque nossa condição de contorno determina que $\phi\,|_s = \phi(z' = 0) = 0$.

- Agora basta substituir a nossa única fonte para esse problema, que é a carga pontual, $\rho = q\,\delta(\vec{x} - z_0\,\hat{z}) = q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_0)$. Temos então a solução final:

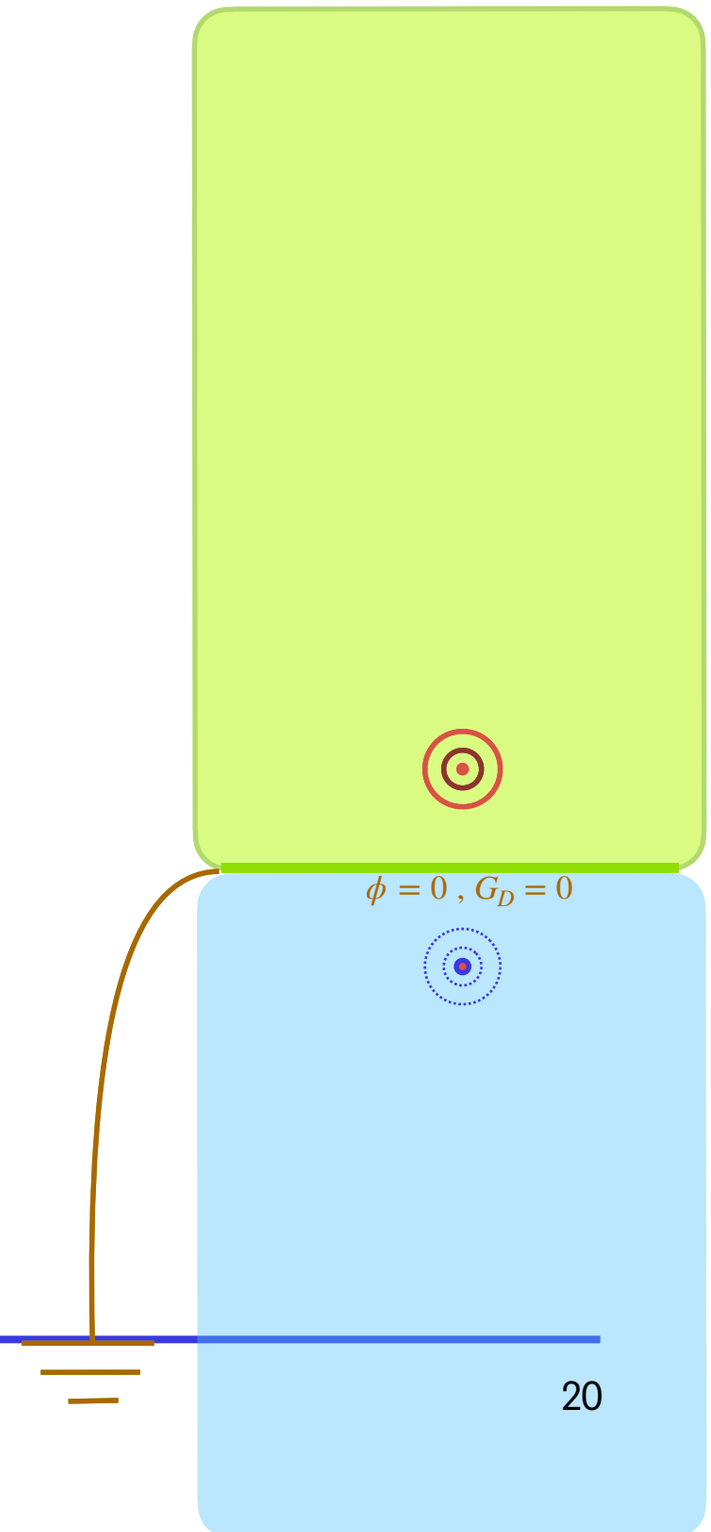
$$\phi(\vec{x}) = +\frac{q}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x} - z_0\,\hat{z}|} - \frac{q}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x} + z_0\,\hat{z}|}$$

- Esse segundo termo é totalmente idêntico a colocar uma carga de "mentirinha" na parte inferior do volume, ou seja, uma *imagem*:

$$q \to -q \quad , \quad \text{e} \quad z_0 \to -z_0$$

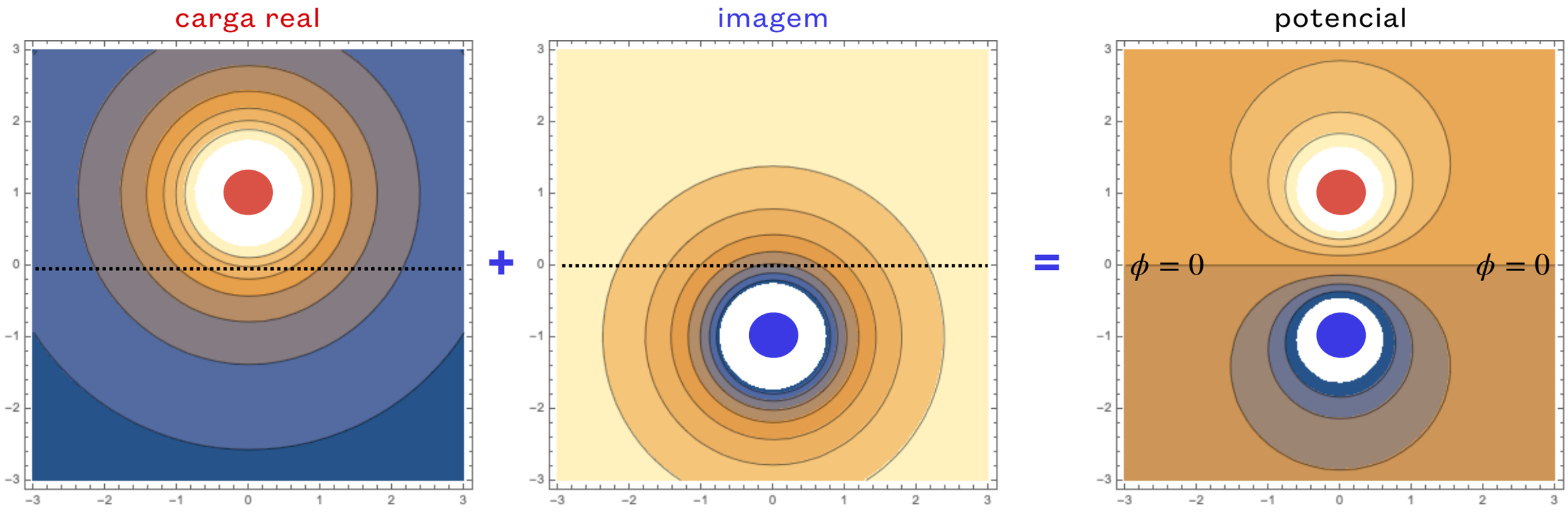
- Em outras palavras, pensamos no plano condutor como um espelho, e a carga de baixo como a imagem .

- Note que essa imagem não existe, mas um observador na parte superior ($z \geq 0$) vê uma configuração de campos que é idêntica à que existe caso existam as duas cargas — a real, q, e a imagem, $-q$.



O método das imagens

- Para ser mais específico, a solução tem a seguinte "cara":



O método das imagens

- O método das imagens pode ser generalizado para qualquer configuração de cargas colocadas na vizinhança de um condutor aterrado (de forma que $\phi \to 0$ em $z = 0$):

$$\phi = \phi_\rho + \phi_{\rho,im}$$

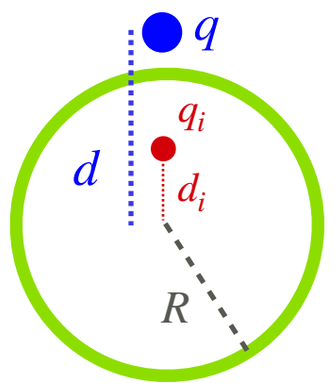




- Mais incrível ainda é que esse método pode ser generalizado para superfícies cilíndricas e até mesmo cascas esféricas que sejam sujeitas a essa condição $\phi \to 0$. Para uma carga pontual q a uma distância d do centro de uma casca esférica aterrada temos:

$$q \to q_i = -\frac{R}{d}q \quad , \quad \text{e} \quad d \to d_i = \frac{R^2}{d}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = +\frac{q}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x} - d\,\hat{z}|} - \frac{qR/d}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x} - (R^2/d)\,\hat{z}|}$$

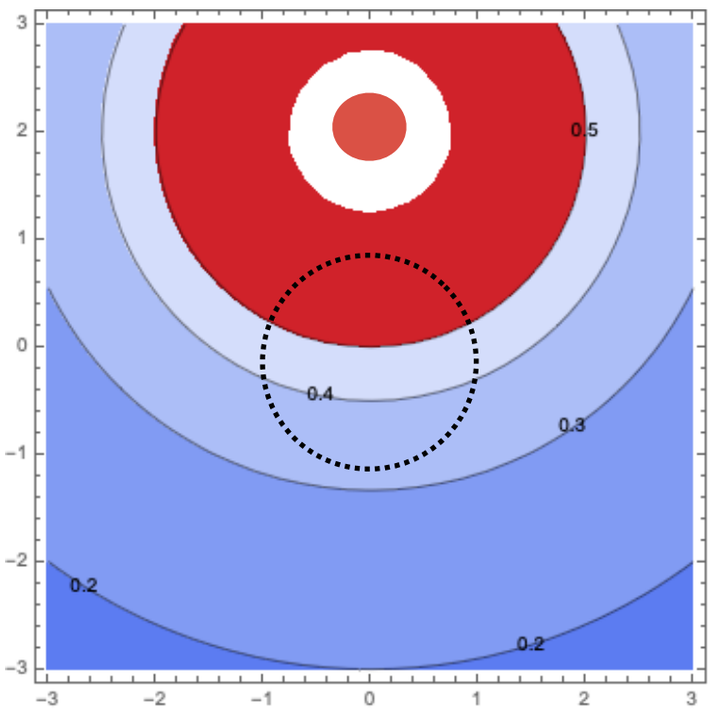


- Você pode verificar que $\phi(r = R) = 0$, portanto satisfazendo todas as condições de contorno e garantindo que o potencial dessas duas cargas é a solução desse problema!

O método das imagens

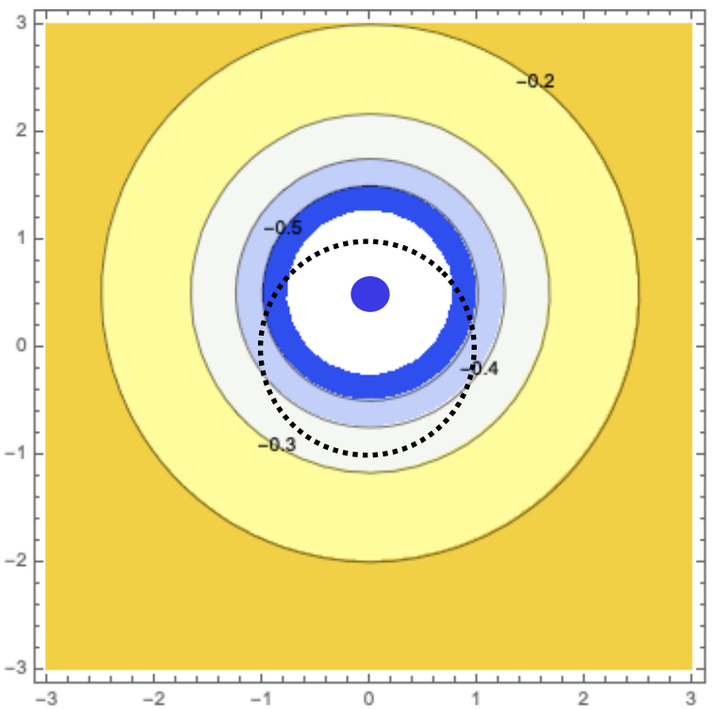
- A solução da casca esférica aterrada com uma carga pontual tem a cara:

carga real



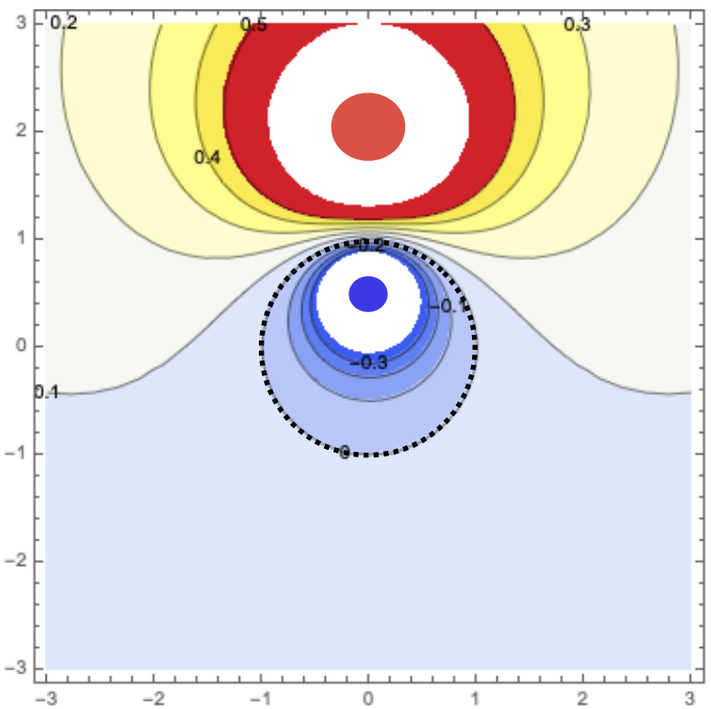
+

imagem



=

potencial



Próxima aula:

- Alguns exemplos e exercícios sobre a matéria até o momento

- Leitura:

Griffiths, Caps. 2 e 3

Jackson, Cap. 2