

Teorema do ponto fixo (de Banach)

Nelson Kuhl

IME/USP

25 de agosto de 2021

Introdução

- Demonstraremos aqui o teorema do ponto fixo relacionado ao problema de raízes de funções reais de uma varável;

¹Veja por exemplo: Chaim Samuel Honig, *Aplicações da Topologia à Análise*, IMPA (Projeto Euclides), 1976

Introdução

- Demonstraremos aqui o teorema do ponto fixo relacionado ao problema de raízes de funções reais de uma variável;
- este teorema é um caso particular do *Teorema do Ponto Fixo de Banach*, formulado em situações mais gerais, que tem aplicações em existência de soluções para problemas mais abstratos¹;

¹Veja por exemplo: Chaim Samuel Honig, *Aplicações da Topologia à Análise*, IMPA (Projeto Euclides), 1976

Introdução

- Demonstraremos aqui o teorema do ponto fixo relacionado ao problema de raízes de funções reais de uma variável;
- este teorema é um caso particular do *Teorema do Ponto Fixo de Banach*, formulado em situações mais gerais, que tem aplicações em existência de soluções para problemas mais abstratos¹;
- a demonstração apresentada é idêntica, com as devidas modificações de notações e definições, à demonstração do caso abstrato;

¹Veja por exemplo: Chaim Samuel Honig, *Aplicações da Topologia à Análise*, IMPA (Projeto Euclides), 1976

Introdução

- Demonstraremos aqui o teorema do ponto fixo relacionado ao problema de raízes de funções reais de uma variável;
- este teorema é um caso particular do *Teorema do Ponto Fixo de Banach*, formulado em situações mais gerais, que tem aplicações em existência de soluções para problemas mais abstratos¹;
- a demonstração apresentada é idêntica, com as devidas modificações de notações e definições, à demonstração do caso abstrato;
- no final destas notas, apresentamos também uma demonstração mais simples, específica para funções reais de uma variável real. Porém, esta demonstração não pode ser generalizada para casos mais abstratos.

¹Veja por exemplo: Chaim Samuel Honig, *Aplicações da Topologia à Análise*, IMPA (Projeto Euclides), 1976

Definição 1

Dizemos que uma função $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é uma **contração** se existir uma constante K , com $0 \leq K < 1$, tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Definição 1

Dizemos que uma função $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é uma **contração** se existir uma constante K , com $0 \leq K < 1$, tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Observações:

- Estamos assumindo que a imagem do intervalo $[a, b]$ por ϕ está contida nele;

Definição 1

Dizemos que uma função $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é uma **contração** se existir uma constante K , com $0 \leq K < 1$, tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Observações:

- Estamos assumindo que a imagem do intervalo $[a, b]$ por ϕ está contida nele;
- note que uma contração é contínua (na verdade, uniformemente contínua);

Definição 1

Dizemos que uma função $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é uma **contração** se existir uma constante K , com $0 \leq K < 1$, tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Observações:

- Estamos assumindo que a imagem do intervalo $[a, b]$ por ϕ está contida nele;
- note que uma contração é contínua (na verdade, uniformemente contínua);
- suponha que $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é continuamente diferenciável e defina $M = \max_{a \leq x \leq b} |\phi'(x)|$. Se $M < 1$, então ϕ é uma contração (com $K = M$).

Teorema do ponto fixo

Teorema 1

Seja $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma contração. Então ϕ tem um único ponto fixo $\alpha \in [a, b]$ (i.e., $\phi(\alpha) = \alpha$) e a sequência de aproximações sucessivas $x_k = \phi(x_{k-1})$, $k \geq 1$, converge para α qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$.

Teorema do ponto fixo

Teorema 1

Seja $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma contração. Então ϕ tem um único ponto fixo $\alpha \in [a, b]$ (i.e., $\phi(\alpha) = \alpha$) e a sequência de aproximações sucessivas $x_k = \phi(x_{k-1})$, $k \geq 1$, converge para α qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$.

Demonstração

Primeiramente, provemos a unicidade. Suponha que α e β sejam pontos fixos de ϕ em $[a, b]$. Então,

$$|\alpha - \beta| = |\phi(\alpha) - \phi(\beta)| \leq K|\alpha - \beta| \implies (1 - K)|\alpha - \beta| \leq 0.$$

Como $0 \leq K < 1$, não podemos ter $\alpha \neq \beta$.

Teorema do ponto fixo

Para as outras afirmações, considere a sequência $\{x_k\}_{k \geq 0}$ de aproximações sucessivas definida a partir de um $x_0 \in [a, b]$. Esta sequência está bem definida pois $\phi([a, b]) \subset [a, b]$. Como

$$|x_{n+1} - x_n| = |\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})| \leq K|x_n - x_{n-1}|, \quad \forall n \geq 1,$$

podemos provar por indução que $|x_{n+1} - x_n| \leq K^n|x_1 - x_0|$, $\forall n \geq 0$.

Teorema do ponto fixo

Para as outras afirmações, considere a sequência $\{x_k\}_{k \geq 0}$ de aproximações sucessivas definida a partir de um $x_0 \in [a, b]$. Esta sequência está bem definida pois $\phi([a, b]) \subset [a, b]$. Como

$$|x_{n+1} - x_n| = |\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})| \leq K|x_n - x_{n-1}|, \quad \forall n \geq 1,$$

podemos provar por indução que $|x_{n+1} - x_n| \leq K^n |x_1 - x_0|$, $\forall n \geq 0$. Logo, para $m > n$ temos

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} |x_{n+j+1} - x_{n+j}| \leq \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} K^{n+j} \right) |x_1 - x_0| \\ &= \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} K^n < \frac{K^n}{1 - K}. \end{aligned} \tag{1}$$

Teorema do ponto fixo

Como $0 \leq K < 1$, concluímos de (1) que $\{x_k\}_{k \geq 0}$ é uma sequência de Cauchy contida no intervalo $[a, b]$. . E como $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é fechado, a sequência é convergente para um número $\alpha \in [a, b]$.

Teorema do ponto fixo

Como $0 \leq K < 1$, concluímos de (1) que $\{x_k\}_{k \geq 0}$ é uma sequência de Cauchy contida no intervalo $[a, b]$. E como $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é fechado, a sequência é convergente para um número $\alpha \in [a, b]$. Sendo ϕ contínua, temos

$$\phi(\alpha) = \phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \alpha$$

e portanto α é ponto fixo de ϕ e qualquer sequência de aproximações sucessivas converge para α .



Outra demonstração

- **Existência:** Defina $g(x) = x - \phi(x)$. Como $\phi(a) \geq a$ e $\phi(b) \leq b$, concluímos que $g(a) \leq 0$ e $g(b) \geq 0$. Sendo ϕ contínua em $[a, b]$, g também o é. Do teorema do valor intermediário segue que existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $g(\alpha) = 0$, ou seja $\alpha = \phi(\alpha)$.

Outra demonstração

- **Existência:** Defina $g(x) = x - \phi(x)$. Como $\phi(a) \geq a$ e $\phi(b) \leq b$, concluímos que $g(a) \leq 0$ e $g(b) \geq 0$. Sendo ϕ contínua em $[a, b]$, g também o é. Do teorema do valor intermediário segue que existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $g(\alpha) = 0$, ou seja $\alpha = \phi(\alpha)$.
- **Unicidade:** Mesma demonstração.

Outra demonstração

- **Existência:** Defina $g(x) = x - \phi(x)$. Como $\phi(a) \geq a$ e $\phi(b) \leq b$, concluímos que $g(a) \leq 0$ e $g(b) \geq 0$. Sendo ϕ contínua em $[a, b]$, g também o é. Do teorema do valor intermediário segue que existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $g(\alpha) = 0$, ou seja $\alpha = \phi(\alpha)$.
- **Unicidade:** Mesma demonstração.
- Considere a sequência de aproximações sucessivas $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $k \geq 0$, definida a partir de um x_0 .

Outra demonstração

- **Existência:** Defina $g(x) = x - \phi(x)$. Como $\phi(a) \geq a$ e $\phi(b) \leq b$, concluímos que $g(a) \leq 0$ e $g(b) \geq 0$. Sendo ϕ contínua em $[a, b]$, g também o é. Do teorema do valor intermediário segue que existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $g(\alpha) = 0$, ou seja $\alpha = \phi(\alpha)$.
- **Unicidade:** Mesma demonstração.
- Considere a sequência de aproximações sucessivas $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $k \geq 0$, definida a partir de um x_0 . Como

$$|x_{n+1} - \alpha| = |\phi(x_n) - \phi(\alpha)| \leq K|x_n - \alpha|, \quad \forall n \geq 0,$$

Outra demonstração

- **Existência:** Defina $g(x) = x - \phi(x)$. Como $\phi(a) \geq a$ e $\phi(b) \leq b$, concluímos que $g(a) \leq 0$ e $g(b) \geq 0$. Sendo ϕ contínua em $[a, b]$, g também o é. Do teorema do valor intermediário segue que existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $g(\alpha) = 0$, ou seja $\alpha = \phi(\alpha)$.
- **Unicidade:** Mesma demonstração.
- Considere a sequência de aproximações sucessivas $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $k \geq 0$, definida a partir de um x_0 . Como

$$|x_{n+1} - \alpha| = |\phi(x_n) - \phi(\alpha)| \leq K|x_n - \alpha|, \quad \forall n \geq 0,$$

podemos provar por indução que

$$|x_n - \alpha| \leq K^n |x_0 - \alpha|, \quad \forall n \geq 0.$$

Outra demonstração

- **Existência:** Defina $g(x) = x - \phi(x)$. Como $\phi(a) \geq a$ e $\phi(b) \leq b$, concluímos que $g(a) \leq 0$ e $g(b) \geq 0$. Sendo ϕ contínua em $[a, b]$, g também o é. Do teorema do valor intermediário segue que existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $g(\alpha) = 0$, ou seja $\alpha = \phi(\alpha)$.
- **Unicidade:** Mesma demonstração.
- Considere a sequência de aproximações sucessivas $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $k \geq 0$, definida a partir de um x_0 . Como

$$|x_{n+1} - \alpha| = |\phi(x_n) - \phi(\alpha)| \leq K|x_n - \alpha|, \quad \forall n \geq 0,$$

podemos provar por indução que

$$|x_n - \alpha| \leq K^n |x_0 - \alpha|, \quad \forall n \geq 0.$$

Portanto a sequência converge para α , pois $0 \leq K < 1$.