A propriedade Arquimediana

Teo. Seja P o conj. dos nº inteiros positivos. Então P é ilimitado superiormente.

dem. Suponha por absurdo que P é ltdo superiormente.

$\to \exists\, B \in \mathbb{R}$ t.q. $x \leq B \;\; \forall x \in P$.

Pelo Axioma 10 $\sup P = b \in \mathbb{R}^+$.

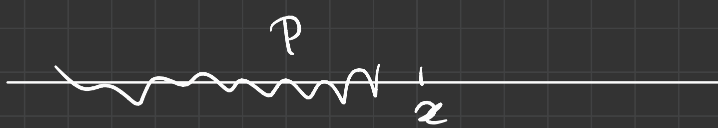
$b-1 < b \to$ não pode ser cota superior de P

$\therefore \exists\, n \in P \quad b-1 < n \leq b$.

$b = b-1+1 < n+1 \in P \quad \nLeftarrow$

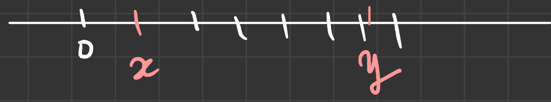
OBS: b não necessariamente está em P. ■

Corolário: $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists\, n \in P$ tal que $n > x$.



Teo. (Prop. Arquimediana) Se $x>0$ e $y\in\mathbb{R}$, então $\exists\, n\in P$ tal que

$$\boxed{nx>y}.$$



dem. Pelo corolário anterior $\exists\, n\in P$ t.q. $n > y/x$.

Como $x>0 \rightsquigarrow nx>y$. ∎

Teo. Se existem a, y e $x \in \mathbb{R}$ tal que

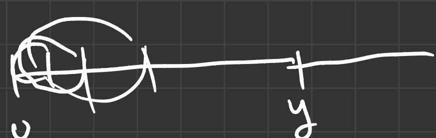
$$a \leq x \leq a + y/n \quad \forall n \in P$$

então $\boxed{x=a}$.

dem. Suponha por absurdo que $x>a$ ∴ $x-a>0$. (portanto)

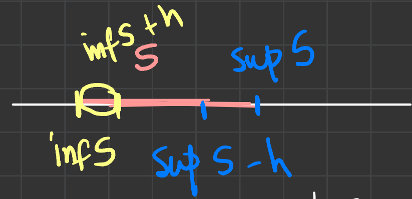
Pela Prop. Arq. $\exists\, \bar{n}\in P$ t.q. $\bar{n}(x-a)>y$.

i.e. $x > a + y/\bar{n}$ $\#$. ∴ $x=a$. ∎



Exercício: Mostre que $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $\exists\, y\in\mathbb{R}^+$ t.q. $0<y<x$.

Propriedades de Sup e Inf



Teo. Seja $h > 0$ e $S \subset \mathbb{R}$.

(a) Se S possui supremo, então $\exists\, x \in S$ tal que

$$\sup S \geq x > \sup S - h.$$

(b) Se S possui ínfimo, então $\exists\, x \in S$ t.q.

$$\inf S \leq x < \inf S + h.$$

Teo. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Denote

$$C = \{ a + b \in \mathbb{R} : a \in A \text{ e } b \in B \}.$$

(a) Suponha que A e B possuem supremo. Então

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

(b) Se A e B possuem ínfimo, então

$$\inf C = \inf A + \inf B.$$

Exercício: Prove (b). (Similar a (a)).

dem. (a) Seja $c \in C \rightsquigarrow c = a+b$ $a \in A$ e $b \in B$.

$\rightsquigarrow c \leq \sup A + \sup B \therefore C$ é ltdo superiormente

e pelo Axioma 10 $\exists \sup C$ com $\sup C \leq \sup A + \sup B$.

Dado $n \in P$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tal que

$$\sup A - \frac{1}{n} < a \quad e \quad \sup B - \frac{1}{n} < b$$

$$a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n} \rightsquigarrow \underbrace{a+b}_{\in C} + \frac{2}{n} > \sup A + \sup B$$

$$\sup C + \frac{2}{n} > \sup A + \sup B \geq \sup C \implies \sup A + \sup B = \sup S.$$

$\blacksquare$

Teo. Sejam $S, T \subset \mathbb{R}$ satisfazendo $\left\{ s \leq t \quad \forall s \in S, \forall t \in T \right.$

Então S possui supremo e T possui ínfimo com

$$\sup S \leq \inf T.$$

dem. $s \leq t \quad \forall s \in S$ e $t \in T \rightarrow S$ é ltdo. superiormte $\overset{\text{Axioma 10}}{\therefore} \exists \sup S$.

Analogamente temos T é ltdo inferiormente $\Rightarrow \exists \inf T$.

Qq $t \in T$ é cota superior de $S \rightsquigarrow \sup S \leq t \quad \forall t \in T$.

Logo $\sup S$ é cota inferior de $T \rightarrow \inf T \geq \sup S$. $\blacksquare$

Existência de Raízes

Axioma 10 nos permite provar que $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = a$ sempre que $a \geq 0$.

OBS: Veja que x solução $\Rightarrow$ $-x$ solução já que

$(-x)(-x) = x^2 = a$.

Além disso são as únicas soluções pois

$0 = x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$.

Teo. Todo $a \geq 0$ possui raiz quadrada $\sqrt{a}$.

(i.e. $\forall a \geq 0 \; \exists x = \sqrt{a}$ tq $x^2 = a$.)

OBS:
- $\sqrt{a} \geq 0$ por definição
- $\sqrt{a} := a^{1/2}$

dem. $a = 0 \rightarrow x = 0$. $\therefore \sqrt{0} = 0$.

Suponha $a>0$ e considere $S=\{x\in\mathbb{R}^+ : x^2\leq a\}$.

- S é ltdo superiormente. De fato $1+a$ é cota superior de S pois $(1+a)^2=(1+a)(1+a)=1+a+a+a^2=1+2a+a^2 \geq a$ $\Rightarrow$ $\exists \sup S>0$ se $S\neq\emptyset$.

- $S\neq\emptyset$ $0<a(1+a)^{-1}\in S$. Com efeito

$$a(1+a)^2=a(1+2a+a^2)=a+2a^2+a^3\geq a^2$$

$$a\geq\frac{a^2}{(1+a)^2}=\left(a(1+a)^{-1}\right)^2 \rightsquigarrow a(1+a)^{-1}\in S.$$

- $b:=\sup S$ | Af. $b^2=a$.

$b^2=a$ ou $\underset{F}{b^2>a}$ ou $\underset{F}{b^2<a}$.

Suponha $b^2>a$ e considere $c=b-\frac{(b^2-a)}{2b}=\frac{b^2+a}{2b}>0$

$$c^2=b^2-2\frac{b(b^2-a)}{2b}+\frac{(b^2-a)^2}{4b^2}=a+\frac{(b^2-a)^2}{4b^2}>a.$$

$\rightsquigarrow$ c é cota superior de S $c<b$ $\lightning$.

Suponha $b^2 < a$. $b > 0$, $\exists\ 0 < c < b$

com $0 < c < \frac{a - b^2}{3b}$. Daí

$$(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = b^2 + c(2b+c)$$

$$< b^2 + c3b < b^2 + a - b^2 = a$$

$\Rightarrow b + c \in S$ $\not\Leftarrow$.

$\blacksquare$