

COMO OBTER MÉTODOS P/ APROXIMAR RAÍZES

APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $\bar{x}$: raiz de f em $[a, b]$

- x_0 : APROXIMAÇÃO INICIAL
- "RECEITA ϕ ": $x_k = \phi(x_{k-1})$, $k \geq 1$
- A ESCOLHA DE ϕ DEVE SER TAL QUE $|x_{k+1} - \bar{x}| < |x_k - \bar{x}|$

$\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ SEJA PLO MENOS CONTÍNUA

$$\phi([a, b]) \subset [a, b]$$

SUPONHA QUE $x_k = \phi(x_{k-1})$, $k \geq 1$, CONVERJA PARA UM VALOR α .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_{k-1}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CONTINUIDADE}}}{=} \phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k-1}\right) = \phi(\alpha)$$

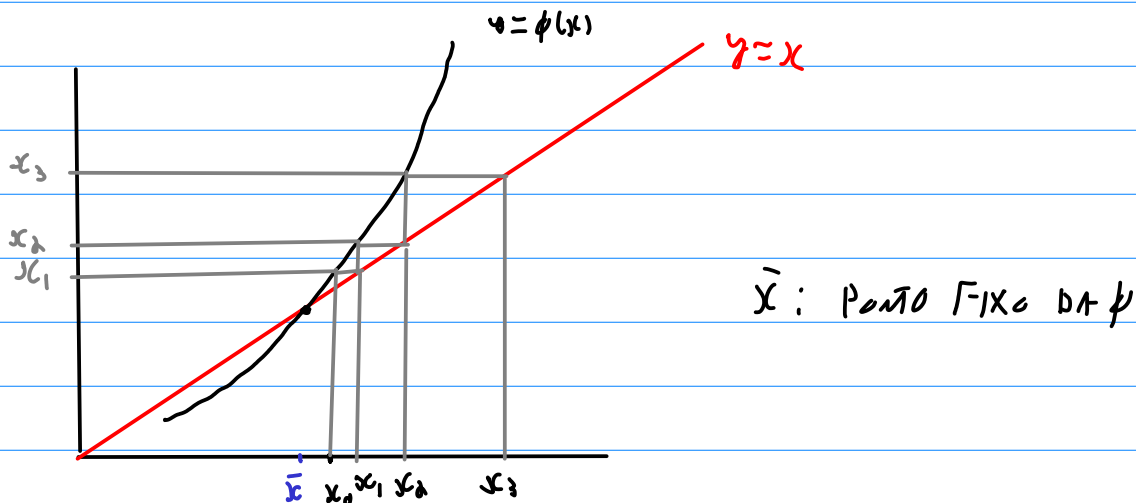
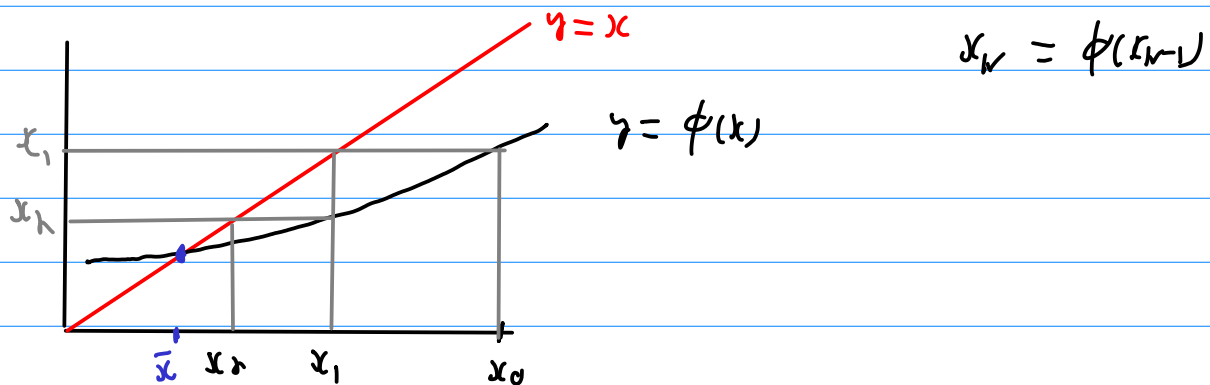
SE A SEQUÊNCIA $x_k \rightarrow \alpha$, ENTÃO $\alpha = \phi(\alpha)$, OU SEJA, α É UM PONTO FIXO DE ϕ . COMO QUEREMOS APROXIMAR $\bar{x}$, É ESSENCIAL ESCOLHER ϕ TAL QUE $\bar{x}$ É UM PONTO FIXO DE ϕ ($\bar{x} = \phi(\bar{x})$)

OBS HÁ UMA INFINIDADE DE MANEIRAS DE ESCOLHER ϕ DE MODO QUE A RAÍZ $\bar{x}$ DE f SEJA PONTO FIXO DE ϕ

- (i) $\phi(x) = \bar{x} + C \cdot f(x)$ (C : CONSTANTE)
- (ii) $\phi(x) = x + G(x) \cdot f(x)$ ($G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTÍNUA)
- (iii) MANIPULAÇÕES ALGÉBRICAS EM f

ESCOLHER UMA FUNÇÃO ϕ QUE TENHA A RAÍZ $\bar{x}$ DE f COMO PONTO FIXO NÃO É PROBLEMA. O PROBLEMA É GARANTIR QUE AS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS CALCULADAS COM UMA TAL ϕ CONVIRTAM PARA $\bar{x}$, DE PREFERÊNCIA MAIS RÁPIDO DO QUE A DICOTOMIA.

COMO GARANTIR QUE AS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS CONVIRTAM P/ UM PONTO FIXO DE ϕ ? GEOMETRICAMENTE, AS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS PODEM SER INTERPRETADAS COMO:



HIPÓTESE: SUPONHA QUE ϕ É DIFERENCIÁVEL NO INTERVALO $[a, b]$.
ENTÃO

$$x_k - \bar{x} = \underbrace{\phi(x_{k-1}) - \phi(\bar{x})}_{\text{TEOR. VALOR MÉDIO}} = \phi'(t_{k-1}) \cdot (x_{k-1} - \bar{x})$$

$$|x_n - \bar{x}| = |\phi'(t_{n-1})| |x_{n-1} - \bar{x}|$$

Logo, se $|\phi'(t_{n-1})| < 1$, x_n estará mais próximo de $\bar{x}$ do que x_{n-1}

• t_{n-1} é um ponto entre x_{n-1} e x_n , descometido

Escolha ϕ tal que $|\phi'(x)| \leq L < 1$ em $[a, b]$.

com essa hipótese, temos, para todos x, y em $[a, b]$,

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(t)| |x - y| \leq L |x - y| < |x - y|$$

A principal desigualdade nos diz que ϕ é uma função LIPSCHITZIANA, com constante de LIPSCHITZ L

Como $L < 1$, ϕ é uma CONTRAÇÃO

PROBLEMAS DE PONTO FIXO E APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

TEOREMA DO PONTO FIXO: SEJA $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ TAL QUE

(i) $\phi([a, b]) \subset [a, b]$

(ii) ϕ É LIPSCHITZIANA COM CONSTANTE DE LIPSCHITZ $L < 1$
 $(|\phi(x) - \phi(y)| \leq L \cdot |x - y|, \forall x, y \in [a, b]. \text{ E } L < 1)$ OBS: $L > 0$

ENTÃO, ϕ TEM UM ÚNICO PONTO FIXO α EM $[a, b]$ E A SEQUÊNCIA DE APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS $x_k = \phi(x_{k-1})$, $k \geq 1$, CONVERGE PARA α QUALQUER QUE SEJA $x_0 \in [a, b]$.

Def.

(a) UNICIDADE

SUPONHA QUE α E β SEJAM PONTOS FIXOS DE ϕ EM $[a, b]$. ENTÃO,

$$|\alpha - \beta| = |\phi(\alpha) - \phi(\beta)| \leq L |\alpha - \beta| \Rightarrow$$

$(1-L)|\alpha - \beta| \leq 0$. COMO $0 < L < 1$, NÃO PODEMOS TER $\alpha \neq \beta$

(b) EXISTÊNCIA: ESCOLHA $x_0 \in [a, b]$ E CONSIDERE A SEQUÊNCIA $\{x_n\}_{n \geq 0}$ DEFINIDA POR $x_n = \phi(x_{n-1})$, $n \geq 1$. COMO $\phi([a, b]) \subset [a, b]$, A SEQUÊNCIA $\{x_n\}$ ESTÁ CONTIDA EM $[a, b]$. LOGO, ELA ADMITE UMA SUBSEQUÊNCIA $\{x_{n_k}\}$ CONVERGENTE:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha \in [a, b]$$

COMO ϕ É CONTÍNUA (POIS É LIPSCHITZIANA), CONCLUIMOS QUE

OUTRO ARGUMENTO: ESCOLHA $x_0 \in [a, b]$ E CONSIDERE A SEQUÊNCIA $\{x_n\}_{n \geq 0}$, DEFINIDA POR

$$x_n = \phi(x_{n-1}), \quad n \geq 1$$

DA HIPÓTESE (ii), SEGUIMOS QUE

$$|x_{k+1} - x_{k+1}| = |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| \leq L |x_{k+1} - x_k|$$

$$|x_{k+2} - x_{k+2}| = |\phi(x_{k+2}) - \phi(x_{k+1})| \leq L |x_{k+2} - x_{k+1}| \leq L^2 |x_{k+1} - x_k|$$

$\vdots$

POR INDUÇÃO, PODEMOS MOSTRAR QUE

$$|x_{k+m+1} - x_{k+m}| \leq L^m |x_{k+1} - x_k| \quad \forall m \geq 1, k \geq 0$$

DA DESIGUALDADE ACIMA PODEMOS PROVAR QUE A SEQUÊNCIA $\{x_n\}$ É UMA SEQUÊNCIA DE CAUCHY! (EXERCÍCIO)

DE FATO,

$$\begin{aligned} |x_{k+m+1} - x_k| &= \left| \sum_{l=0}^m (x_{k+l+1} - x_{k+l}) \right| \\ &\leq \sum_{l=0}^m |x_{k+l+1} - x_{k+l}| \leq \sum_{l=0}^m L^l \cdot |x_{k+1} - x_k| \\ &= \frac{1-L^{m+1}}{1-L} \cdot |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{1-L^{m+1}}{1-L} \cdot L^k \cdot |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

$\{x_n\}$ sendo uma seq. de CAUCHY CONTÍNUA EM $[a, b]$
IMPLICA QUE EXISTE $\alpha \in [a, b]$ TAL QUE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

COMO ϕ É CONTÍNUA (POIS É LIPSCHITZIANA), CONCLUIMOS QUE

$$\phi(\alpha) = \phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \alpha$$

PTO. FIXO!