

Eletrromagnetismo 1

Aula 2

- ⚡ Equações de Laplace e Poisson
- ⚡ Técnicas de aproximação: método variacional e método do relaxamento
- ⚡ Separação de variáveis
- ⚡ Exemplos em coordenadas Cartesianas



A Equação de Laplace

- A versão homogênea da Lei de Gauss (ou Equação de Poisson para o potencial) é a **Equação de Laplace**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \phi = 0$$

- Além do interesse próprio, as soluções da Equação de Laplace podem ser somadas às soluções da Equação de Poisson, de modo a encontrar uma solução particular que satisfaça as condições de contorno:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \phi_1$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_2$$

$$\implies (\phi_1 + \phi_2)_S = \Phi_S, \quad \text{onde } \Phi_S \text{ expressa o potencial numa superfície } S.$$

Aqui entra também um fato básico, fundamental, do Eletromagnetismo: o fato de que essa teoria é **linear**. Ou seja, qualquer **combinação linear de duas soluções** das equações do EM **também é uma solução!**

- Mais adiante veremos como essa linearidade pode ser usada para construir uma técnica extremamente poderosa — o método da **Função de Green**, que permite calcular uma **solução geral** para a equação de Poisson (inhomogênea)!
- Vamos agora revisar alguns dos métodos básicos que nos permitem encontrar soluções para a Equação de Laplace.

A Equação de Laplace

- A equação de Laplace admite dois tipos de C.C.:

ϕ_S C.C. de Dirichlet; e

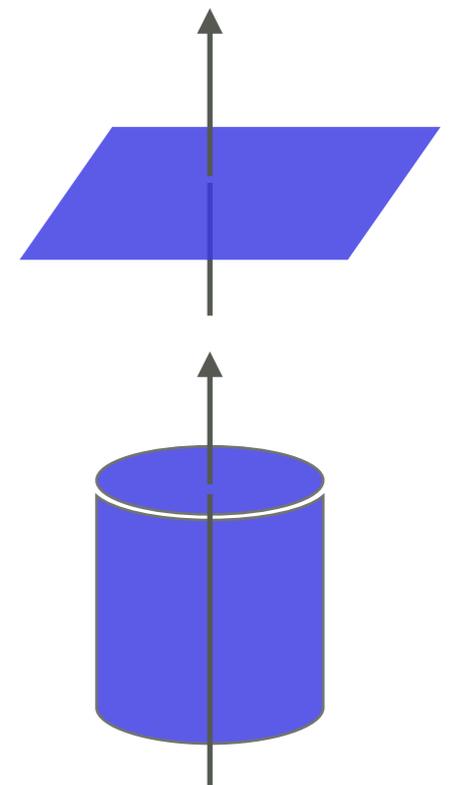
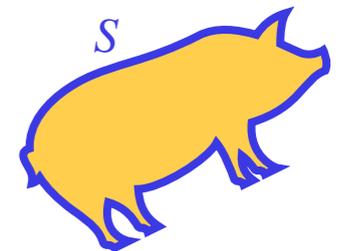
$(\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi)_S$ C.C. de Neumann.

- É interessante pensar no **significado físico** da Eq. de Laplace: mesmo quando não temos fontes (cargas) explicitamente identificadas, a equação de Laplace **propaga as condições de contorno** da superfície (onde as C.C. são definidas) para o volume.
- Em uma dimensão, com **simetria planar** (isto é, com simetria no plano $x - y$), a solução geral da Eq. de Laplace é dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = c + \alpha z \quad (\text{verifique!})$$

- Em uma dimensão, com **simetria axial**, a Eq. de Laplace em coordenadas cilíndricas tem a seguinte solução geral:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) \Rightarrow \phi \rightarrow c + \alpha \log \rho \quad (\text{verifique!})$$



Equações de Poisson, Laplace e do Calor

- As equações de Poisson e Laplace são, respectivamente:

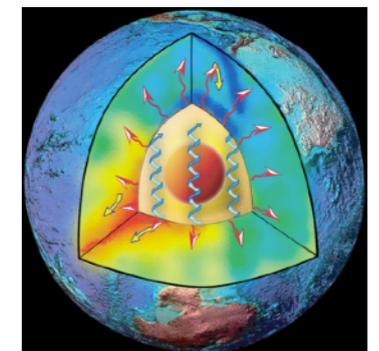
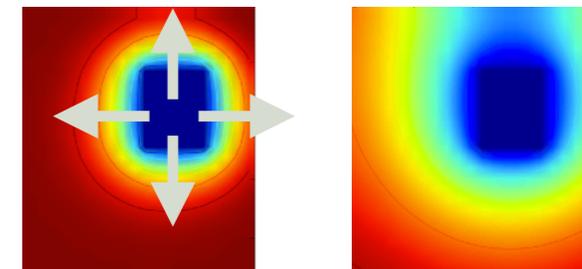
$$\nabla^2 \phi = f(\vec{x})$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

- Essas equações têm uma conexão interessante com a equação que descreve a **difusão do calor**. Digamos que a temperatura num meio é dada pela função $T(t; \vec{x})$. A equação que nos diz como a temperatura se difunde por esse meio é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = q \nabla^2 T \quad , \quad \text{onde } q \text{ é o coeficiente de difusão térmica desse meio}$$

- No estado estacionário, $\partial T / \partial t = 0 \Rightarrow \nabla^2 T = 0$
- Um problema típico é encontrar $T(\vec{x})$ dada a **temperatura numa superfície** — o que pode ser resolvido no estado estacionário, ou mesmo como função do tempo, a partir de certas condições iniciais. Esse é um problema de **condições de contorno de Dirichlet**.
- Outro problema típico é encontrar $T(\vec{x})$ quando damos o **fluxo de calor**, $\vec{Q} = -\vec{\nabla} T$, numa superfície. Nesse caso, temos **condições de contorno de Neumann**.
- Mas a interpretação aqui é interessante: as equações de Poisson e de Laplace descrevem como as condições de contorno se “difundem” pelo espaço. Em outras palavras, o operador Laplaciano (∇^2) faz o papel de **propagar** os campos desde essas superfícies para todo o volume.



Técnicas variacionais

- Da Mecânica Clássica e da Ótica sabemos que o Princípio de Fermat, ou de um modo mais geral as Lagrangeanas, são princípios fundamentais da Física. Na Mecânica, a idéia é que, dada uma partícula qualquer que se move no espaço, existe uma função:

$$L(q, \dot{q}) = K - U$$

tal que a energia cinética da partícula é $K \rightarrow \frac{m}{2} \dot{q}^2$ e a energia potencial é $U \rightarrow U(q)$.

- A ação é então definida como a integral dessa Lagrangeana no tempo:

$$S = \int_A^B dt L$$

- As equações dinâmicas, que determinam o movimento da partícula entre dois pontos (A e B), são então encontradas por meio da minimização da ação, mantendo os dois pontos fixos. O resultado dessa minimização chama-se **Equações de Euler-Lagrange**, ou seja:

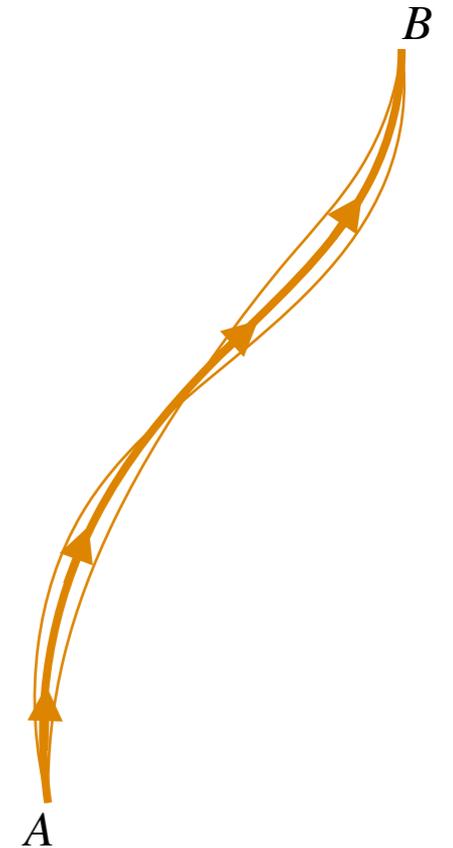
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m \dot{q}) + \frac{dU}{dq} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \ddot{q} = - \frac{dU}{dq} = F_q$$

- A idéia do Princípio Variacional é que, de algum modo, o potencial elétrico também vai encontrar uma configuração de "mínima energia". Vamos tentar associar uma "energia cinética" e uma "energia potencial" ao campo do potencial elétrico:

$$K \rightarrow \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 \quad \text{e} \quad U \rightarrow \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \phi(\vec{x}) \quad (\text{aqui o } \epsilon_0 \text{ foi introduzido de modo que } K \text{ e } U \text{ tenham as mesmas unidades.)}$$

- Portanto, o nosso "chute" nesse momento é que existe algum tipo de função (um *funcional*) do potencial elétrico que é dado por:

$$\mathcal{L}[\phi, \vec{\nabla} \phi] = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{\rho}{\epsilon_0} \phi$$



Técnicas variacionais

- Vamos agora minimizar essa "ação" com a "Lagrangiana" que tentamos adivinhar acima:

$$\mathcal{S} = \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{\rho}{\epsilon_0} \phi \right]$$

- A variação dessa ação com respeito ao campo, $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} + \delta\mathcal{S}$, é:

$$\delta\mathcal{S} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \times 2 \vec{\nabla} \phi \cdot \delta(\vec{\nabla} \phi) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \delta\phi \right] = \int d^3x \left[\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla}(\delta\phi) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \delta\phi \right]$$

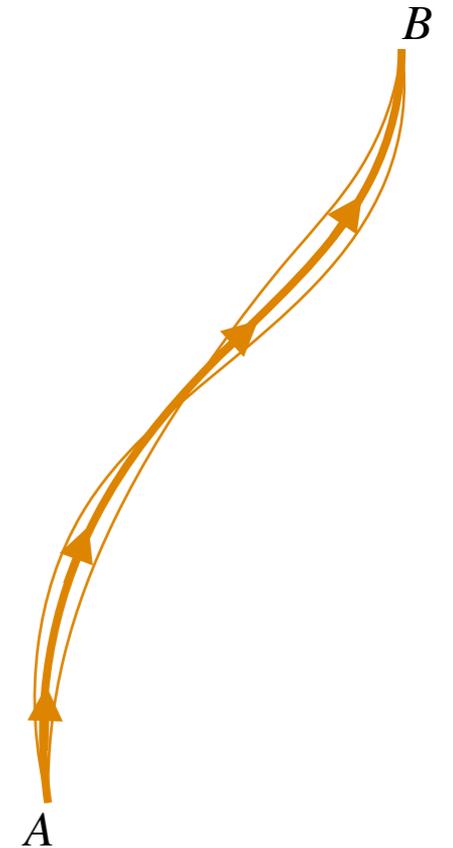
- Agora integramos por partes o primeiro termo, obtendo:

$$\delta\mathcal{S} = \int d^3x \left[\vec{\nabla} [(\vec{\nabla} \phi) \delta\phi] - (\vec{\nabla}^2 \phi) \delta\phi - \frac{\rho}{\epsilon_0} \delta\phi \right]$$

- Porém, se supormos que vale a Equação de Poisson, então $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$, e os dois últimos termos se cancelam, resultando em:

$$\delta\mathcal{S} = \oint d\vec{S} \cdot [\delta\phi \vec{\nabla} \phi]$$

- Mas, assim como em Lagrangeanas, a variação nos extremos é zero! Ou seja, devemos fixar a variação do campo nas "bordas" — em outras palavras, devemos ter condições de contorno bem definidas — e então temos que $\delta\phi \rightarrow 0$ na superfície S , e assim $\delta\mathcal{S} = 0$.
- Ou seja, ao minimizar a ação acima somos levados à Equação de Poisson!



Técnicas variacionais

- OK, re-derivamos a Eq. de Poisson. Porém, ao fazer isso, encontramos uma “ação” e uma “Lagrangeana” que nos permitem ir muito além de calcular soluções analíticas, e permitindo um poderoso método de aproximação. Considere então a ação:

$$\mathcal{S} = \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{\rho}{\epsilon_0} \phi \right]$$

- A idéia agora é que, dada uma função $\rho = \rho(\vec{x})$, nós começamos “adivinhando” uma forma funcional tal como $\phi(\vec{x}) = \sum_i c_i f_i(\vec{x} | \alpha_i, \beta_i, \dots)$, com parâmetros $\theta_i = \{c_i, \alpha_i, \beta_i, \dots\}$, e funções f_i que podem ser “facilmente” integradas no domínio:

$$\int d^3x \nabla f_i \cdot \nabla f_j = F_{ij}(\alpha_i, \beta_i, \dots; \alpha_j, \beta_j, \dots) \quad , \quad e$$

$$\int d^3x \rho f_i = G_i(\alpha_i, \beta_i, \dots)$$

- Então, minimizando a ação com respeito aos parâmetros nos permite reduzir as equações a um conjunto de equações algébricas:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_i c_j F_{ij} - \sum_i c_i G_i \right) = 0$$

- Para mais detalhes, veja o livro do Jackson (Seção de “Variational Principle”)

Técnicas variacionais

- A “ação” acima é muito próxima de algo que podemos chamar da “ação do campo eletromagnético”
- De fato, a Lagrangeana do campo elétrico é basicamente essa que derivamos — a única diferença é que temos de “consertar” as dimensões:

$$\mathcal{L} \rightarrow \epsilon_0 \mathcal{L} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\vec{\nabla} \phi \right)^2 - \rho \phi = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \rho \phi$$

- Na verdade, talvez a gente tenha tempo de ver nesta disciplina que a Lagrangeana **completa** do Eletromagnetismo é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2) - (\rho \phi - \vec{J} \cdot \vec{A})$$

O método do relaxamento

- Vamos agora discutir uma técnica muito simples de resolver a Eq. de Laplace, que segue do princípio variacional.
- O Laplaciano nos diz que, em um ponto qualquer do espaço, a soma das segundas derivadas se cancela:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

- Vamos agora pensar nisso em 2D, em termos de um "grid" de pontos, espaçados por "células" de lado ℓ :

$$\phi(x_i, y_j) \equiv \phi_{i,j}$$

- A derivada num ponto x_i ao longo da direção x pode ser aproximada por:

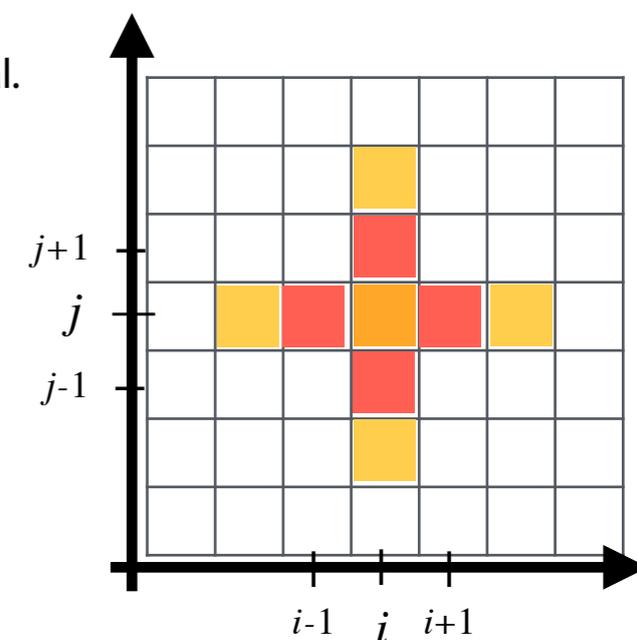
$$\phi_{i,j}^x = \frac{1}{2\ell} (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})$$

- A derivada nos pontos x_{i+1} e x_{i-1} ao longo de x é, portanto:

$$\phi_{i+1,j}^x = \frac{1}{2\ell} (\phi_{i+2,j} - \phi_{i,j}) \quad , \quad \text{e} \quad \phi_{i-1,j}^x = \frac{1}{2\ell} (\phi_{i,j} - \phi_{i-2,j})$$

- De modo análogo, as derivadas ao longo de y nos pontos y_{j+1} e y_{j-1} são:

$$\phi_{i,j+1}^y = \frac{1}{2\ell} (\phi_{i,j+2} - \phi_{i,j}) \quad , \quad \text{and} \quad \phi_{i,j-1}^y = \frac{1}{2\ell} (\phi_{i,j} - \phi_{i,j-2})$$



O método do relaxamento

- Ou seja, a *segunda derivada* ao longo de x no ponto $\{x_i, y_j\}$ é dada por:

$$\phi_{i,j}^{xx} = \frac{1}{2\ell} \left(\phi_{i+1,j}^x - \phi_{i-1,j}^x \right) = \frac{1}{(2\ell)^2} \left(\phi_{i+2,j} + \phi_{i-2,j} - 2\phi_{i,j} \right)$$

- Já a segunda derivada ao longo de y nesse mesmo ponto i, j é:

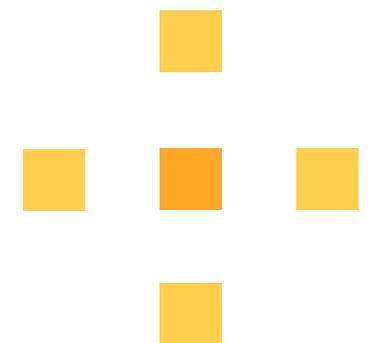
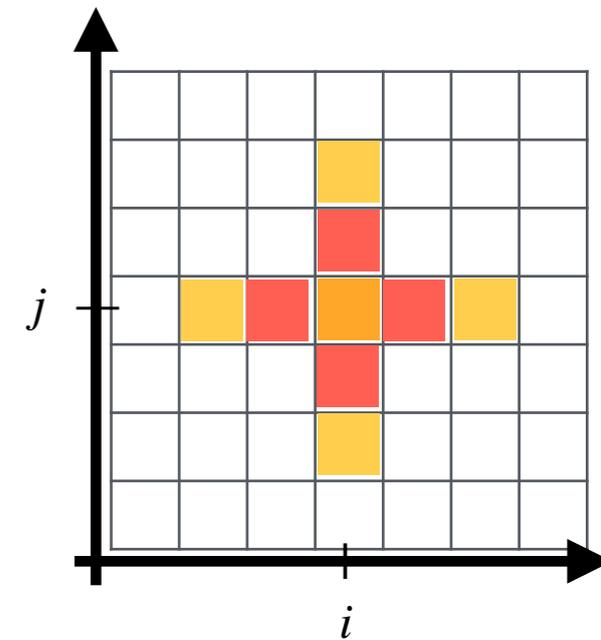
$$\phi_{i,j}^{yy} = \frac{1}{2\ell} \left(\phi_{i,j+1}^y - \phi_{i,j-1}^y \right) = \frac{1}{(2\ell)^2} \left(\phi_{i,j+2} + \phi_{i,j-2} - 2\phi_{i,j} \right)$$

- Portanto, a Eq. de Laplace na célula $\{x_i, y_j\}$ corresponde à equação:

$$\phi_{i,j}^{xx} + \phi_{i,j}^{yy} = \frac{1}{(2\ell)^2} \left(\phi_{i+2,j} + \phi_{i-2,j} + \phi_{i,j+2} + \phi_{i,j-2} - 4\phi_{i,j} \right) = 0$$

- Agora, note que essa equação pode ser escrita como uma **média**:

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4} \left(\phi_{i+2,j} + \phi_{i-2,j} + \phi_{i,j+2} + \phi_{i,j-2} \right) = \langle \phi \rangle$$



O método do relaxamento

- Ou seja, a Eq. de Laplace expressa que o campo é igual à sua **média no espaço**:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi(\vec{x}) = \langle \phi \rangle_{\text{perto de } \vec{x}}$$

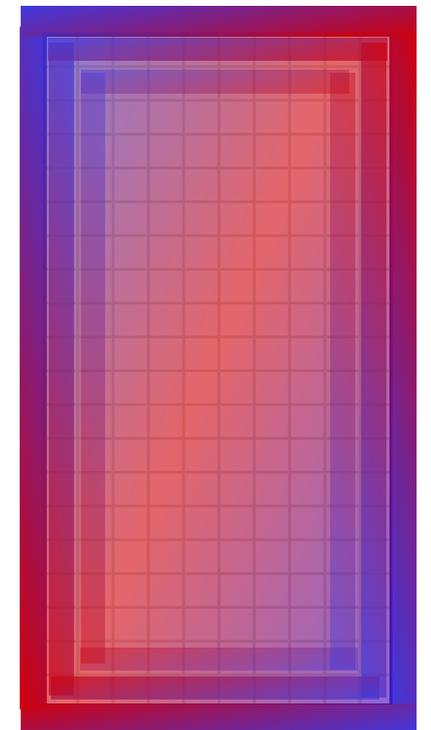
- Isso nos sugere um método muito interessante para resolver a Eq. de Laplace. Digamos que o potencial elétrico é dado numa superfície — por simplicidade, pense num volume fechado envolto por uma borda onde especificamos o campo (ou suas derivadas).
- Podemos começar supondo qualquer valor para o campo **dentro** desse volume — por exemplo, podemos tomar $\phi \rightarrow \phi_{i,j}^{(0)} = 0$.
- O primeiro passo é “propagar” a informação das bordas para as células adjacentes, ao lado das bordas:

$$\phi^{(0)} \rightarrow \phi_{i,j}^{(1)} = \langle \phi^{(0)} \rangle_{i,j}.$$

- Agora basta iterar esse processo: a cada iteração, o valor do campo é atualizado, e o valor na borda se propaga para mais uma camada de células dentro do volume. Da iteração n para a iteração $n+1$ temos:

$$\phi^{(n)} \rightarrow \phi_{i,j}^{(n+1)} = \langle \phi^{(n)} \rangle_{i,j}$$

- Depois de muitas iterações o potencial converge para o “valor médio”, e portanto ele satisfaz a Eq. de Laplace — e, claro, as condições de contorno! Vamos dar uma olhada em um exemplo numérico, em “tempo real”. [—> Mathematica & Python]



Separação de variáveis

- Vamos agora introduzir um método bastante geral para resolver equações tais como a Eq. de Laplace: a **separação de variáveis**.
- Suponha que no plano $z = 0$ temos uma densidade de carga tal que o campo elétrico normal a essa superfície é dado por:

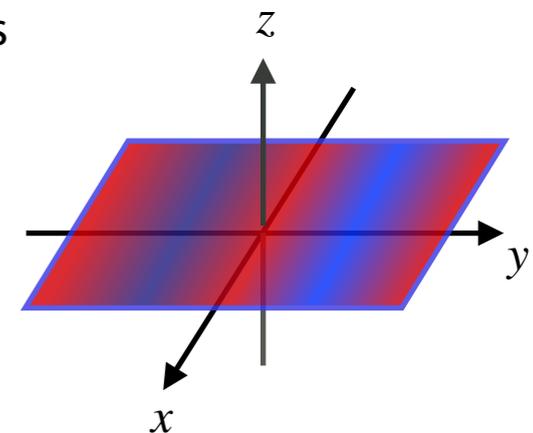
$$\vec{E}_{\perp} = E_0 \hat{z} \cos ky \quad [\text{Exercício: verifique que a densidade superficial de carga é } \sigma = \epsilon_0 E_0 \cos ky]$$

- Esse é um **problema de condições de contorno**, com um dos "contornos" sendo o plano $z = 0$, e os outros "contornos" os "planos" $z \rightarrow \pm \infty$. E note que em todo o volume (exceto $z = 0$) **não há densidade de cargas**, $\rho = 0$, e assim temos que o potencial obedece a Eq. de Laplace.
- No plano $z = 0$ temos, portanto, com $\hat{n} \rightarrow \hat{z}$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi = -E_0 \cos ky$$

- Evidentemente, nada neste problema depende da direção x , portanto a Equação de Laplace fica:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$



Separação de variáveis

- Vamos então resolver a equação:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{usando a técnica de } \mathbf{separação\ de\ variáveis}.$$

- Suponha que o potencial pode ser escrito como:

$$\phi(y, z) = \sum_n Y_n(y) Z_n(z),$$

onde $\{Y_n(y), Z_n(z)\}$ são pares de soluções, e a soma sobre n expressa o fato de que a Eq. de Laplace é *linear*.

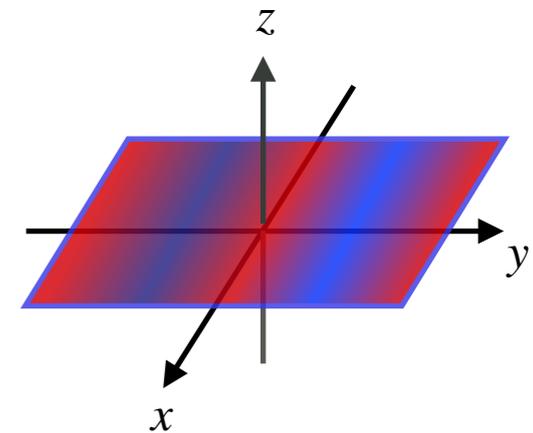
- Temos então, tentando a solução acima:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \sum_n \left[Z_n(z) \frac{\partial^2 Y_n(y)}{\partial y^2} + Y_n(y) \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} \right] = 0$$

- Note que cada par é uma solução, e portanto cada um desses termos é zero. Agora, divida por $Y_n Z_n$ para obter:

$$\frac{1}{Y_n(y)} \frac{\partial^2 Y_n(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z_n(z)} \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} = 0, \quad \text{portanto} \quad \frac{1}{Y_n(y)} \frac{\partial^2 Y_n(y)}{\partial y^2} = - \frac{1}{Z_n(z)} \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} = -k_n^2$$

onde k_n podem até mesmo serem **complexos**: basta, ao final, tomar os **campos** como reais!



Separação de variáveis



- Ou seja, aplicando a técnica da separação de variáveis resulta em equações muito mais simples — no caso de Y_n temos:

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} + k_n^2 Y_n = 0 \quad ,$$

cuja solução é meio óbvia: $Y_n \rightarrow \exp[\pm i(k_n y + \varphi_n)]$, onde φ_i são fases — ou seja, senos e cossenos!

- Para a outra função-base temos uma equação parecida, mas não idêntica: o **sinal** da constante muda,

$$\frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} - k_n^2 Z_n = 0 \quad ,$$

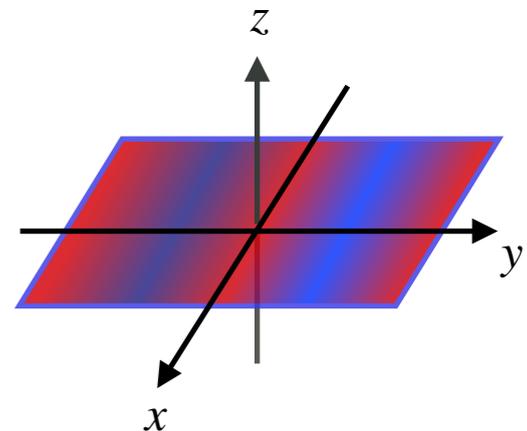
e agora a solução é $Z_n \rightarrow \exp(\pm k_n z + \alpha_n)$, onde α_i também são "fases".

- Não é difícil ver o que está acontecendo. A grandes distâncias do plano $z = 0$, um observador enxerga uma carga que, na média, é nula: as cargas positivas e negativas se cancelam e como resultado o campo elétrico acaba sendo nulo.
- A solução que satisfaz todas as C.C. é proporcional a $\exp(-kz)$ para $z \rightarrow \infty$, e $\exp(+kz)$ para $z \rightarrow -\infty$, ou seja:

$$\phi(y, z) = \frac{E_0}{k} e^{-k|z|} \cos(ky) \quad [\text{Exercício: verifique que isso satisfaz a condição em } z = 0!]$$

- Esse tipo de solução funciona tanto para C.C. de Dirichlet quanto Neumann. De fato, se tivéssemos especificado, por exemplo, $\phi(z = 0) = \phi_0 \cos(ky)$, então é fácil de ver que a solução ficaria:

$$\phi(y, z) = \phi_0 e^{-k|z|} \cos(ky)$$



Separação de variáveis

- A solução acima nos permite pensar em problemas mais “ambiciosos”. Digamos que temos condições de contorno:

$$\phi(z = 0) = f(y) \quad , \quad \text{tal que a média espacial dessa função se anula } \langle f \rangle_{z=0} \rightarrow 0$$

- Digamos que essa função é uma superposição de modos de funções oscilatórias, uma **série de Fourier**:

$$f(y) = \sum_n f_n \cos(k_n y + \varphi_n)$$

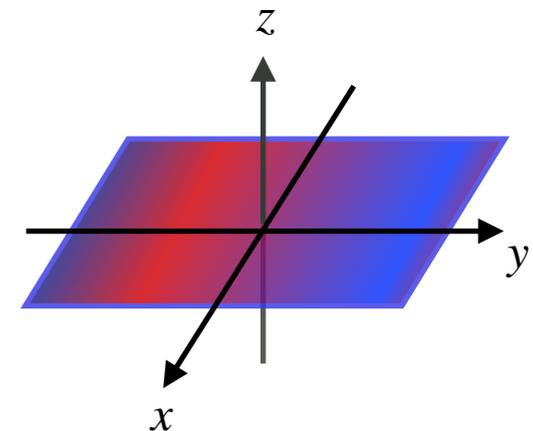
- A linearidade das equações nos permite pensar em cada uma das “fontes” acima como tendo a *sua* solução; e a solução para *soma dessas fontes* é a *soma das soluções*!
- Ou seja, se cada modo for uma solução da Equação de Laplace,

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_n(y, z) = f_n e^{-k_n |z|} \cos(k_n y + \varphi_n)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(y, z) = \sum_n \phi_n(y, z)$$

E, claro, por construção essa solução obedece a condição de contorno $\phi(y, z = 0) = f(y)$!

Isso não é estritamente necessário: caso tenhamos uma densidade média de carga não-nula, teríamos, além das soluções exponenciais, uma solução tipo $E_z = \pm \sigma_0 / \epsilon_0 \hat{z}$, que de fato é o limite $k \rightarrow 0$ das soluções acima!!



Exemplo: planos paralelos

- Agora vamos tornar o problema ainda mais interessante: suponha que damos o potencial não apenas em $z = 0$, como feito logo antes, mas em **duas superfícies** de z constante:

$$\phi(z = +h/2) = f^+(y) \quad , \quad e$$

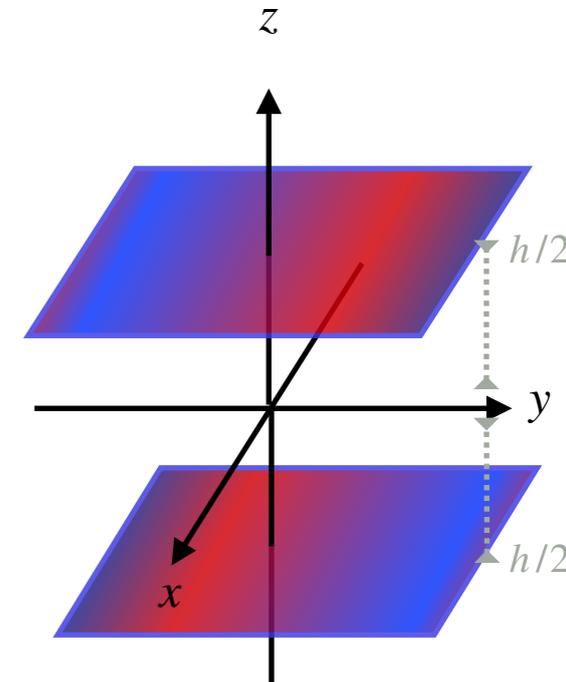
$$\phi(z = -h/2) = f^-(y)$$

- Vamos supor que ambas essas funções sejam dadas por somas (**séries de Fourier**):

$$f^+(y) = \sum_n f_n^+ \cos(k_n y + \varphi_n^+) \quad , \quad e$$

$$f^-(y) = \sum_n f_n^- \cos(k_n y + \varphi_n^-) \quad , \quad \text{onde a série é sobre os } \mathbf{mesmos\ valores} \text{ de } k_n .$$

- A pergunta é: qual o potencial em todo espaço — em particular, dentro da região $-h/2 < z < h/2$?
- Em primeiro lugar, acima do plano superior ($z > h/2$) e abaixo do inferior ($z < -h/2$) a solução é obtida exatamente do jeito que vimos anteriormente: a única condição de contorno relevante para a região $z > h/2$ é $\phi(z = +h/2)$, e idem para a região $z < -h/2$!



Exemplo: planos paralelos

- Mas, e na região **entre** os dois planos? Como podemos encontrar uma solução que satisfaça **ao mesmo tempo** as duas condições de contorno acima e abaixo, ou seja:

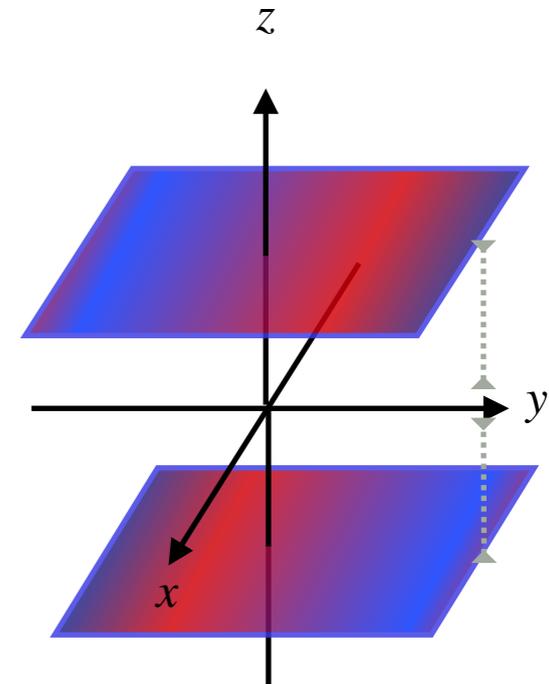
$$\phi(z = -h/2) = f^-(y) \quad , \quad \text{e} \quad \phi(z = +h/2) = f^+(y) \quad ?$$

- Claramente, a solução tem que ser do tipo:

$$\phi(y, z) = \sum_n \phi_n(y, z) \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} = 0$$

- A dependência em y ainda deve ser como antes, e usando a separação de variáveis temos:

$$\phi_n(y, z) = Z_n^-(z) \cos(k_n y + \varphi_n^-) + Z_n^+(z) \cos(k_n y + \varphi_n^+)$$



Exemplo: planos paralelos

- Nosso "ansatz" para cada modo n da solução é, portanto:

$$\phi_n(y, z) = Z_n^-(z) \cos(k_n y + \varphi_n^-) + Z_n^+(z) \cos(k_n y + \varphi_n^+)$$

- Vamos agora nos concentrar na dependência com a coordenada z . Temos:

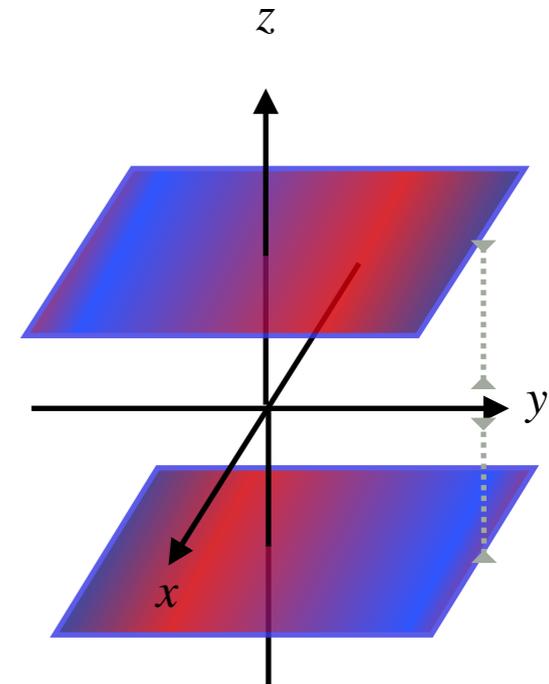
$$\frac{\partial^2 Z_n^{+,-}}{\partial z^2} - k_n^2 Z_n^{+,-} = 0$$

- Vamos supor que **cada um** desses termos pode ser ajustado de forma que:

$$Z_n^-(z = -h/2) = 1 \quad \text{e} \quad Z_n^-(z = +h/2) = 0$$

$$Z_n^+(z = -h/2) = 0 \quad \text{e} \quad Z_n^+(z = +h/2) = 1$$

- Isso garantiria que as condições de contorno seriam satisfeitas nos **dois planos!**



Exemplo: planos paralelos

- Vamos tentar então, para a solução em $z = -h/2$:

$$Z_n^-(z) = Ae^{k_n z} + Be^{-k_n z} \quad , \quad \text{onde}$$

$$Z_n^-(z = -h/2) = 1 \quad \Rightarrow \quad Ae^{-k_n h/2} + Be^{+k_n h/2} = 1$$

$$Z_n^-(z = +h/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ae^{k_n h/2} + Be^{-k_n h/2} = 0$$

Da segunda equação temos $B = -Ae^{+k_n h}$, e daí substituindo isso na primeira temos :

$$Ae^{-k_n h/2} + (-Ae^{k_n h})e^{+k_n h/2} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{e^{-k_n h/2}}{e^{k_n h} - e^{-k_n h}} \quad , \quad B = -\frac{e^{k_n h/2}}{e^{k_n h} - e^{-k_n h}}$$

- De modo análogo, em $z = +h/2$ temos:

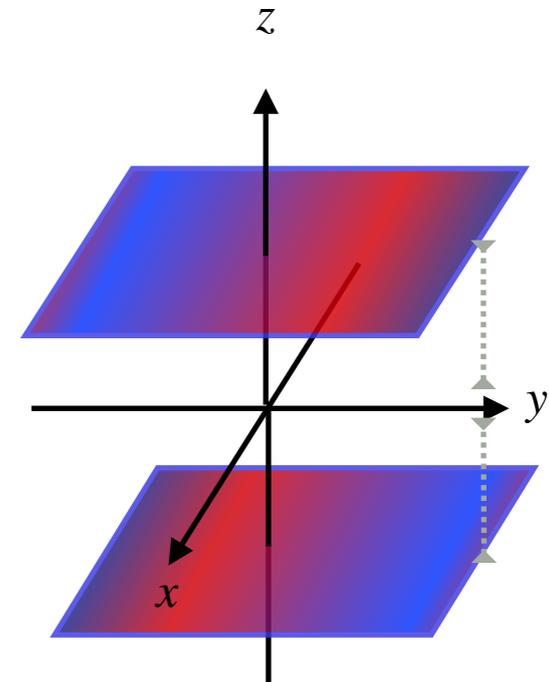
$$Z_n^+(z) = Ce^{k_n z} + De^{-k_n z} \quad , \quad \text{onde}$$

$$Z_n^+(z = -h/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ce^{-k_n h/2} + De^{+k_n h/2} = 0$$

$$Z_n^+(z = +h/2) = 1 \quad \Rightarrow \quad Ce^{k_n h/2} + De^{-k_n h/2} = 1$$

Agora basta olhar para a solução acima e perceber que as equações são **idênticas**, trocando $\{A, B\} \rightarrow \{C, D\}$ e $h \rightarrow -h$:

$$C = \frac{e^{k_n h/2}}{e^{-k_n h} - e^{k_n h}} \quad , \quad D = -\frac{e^{-k_n h/2}}{e^{-k_n h} - e^{k_n h}}$$



Exemplo: planos paralelos

- Coletando as duas partes acima, temos a solução na região $-h/2 \leq z \leq h/2$:

$$\phi = \sum_n \left[f_n^+ \frac{\sinh[k_n(z + h/2)]}{\sinh[k_n h]} \cos(k_n y + \varphi_n^+) - f_n^- \frac{\sinh[k_n(z - h/2)]}{\sinh[k_n h]} \cos(k_n y + \varphi_n^-) \right]$$

- Vocês podem (devem!) verificar que essa solução satisfaz todas as condições de contorno, no sentido que:

$$\phi(z = +h/2) = f^+(y) = \sum_n f_n^+ \cos(k_n y + \varphi_n^+) \quad , \quad e$$

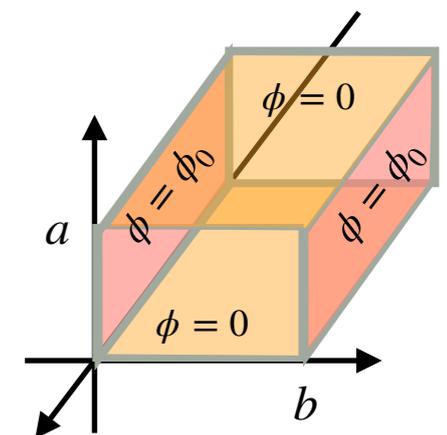
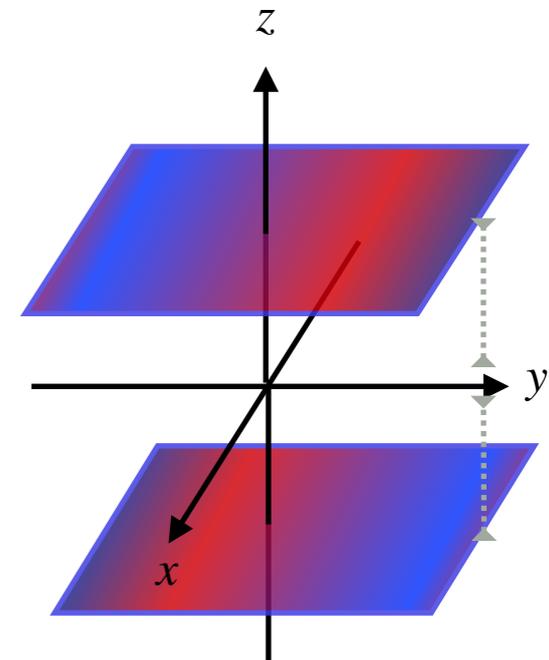
$$\phi(z = -h/2) = f^-(y) = \sum_n f_n^- \cos(k_n y + \varphi_n^-) \quad .$$

- Por sinal, da solução acima, na região **entre** os planos, vocês já podem "adivinhar" as soluções acima do plano superior e abaixo do plano inferior:

$$\phi(y, z \geq +h/2) = \sum_n f_n^+ e^{-k_n(z-h/2)} \cos(k_n y + \varphi_n^+) \quad , \quad e$$

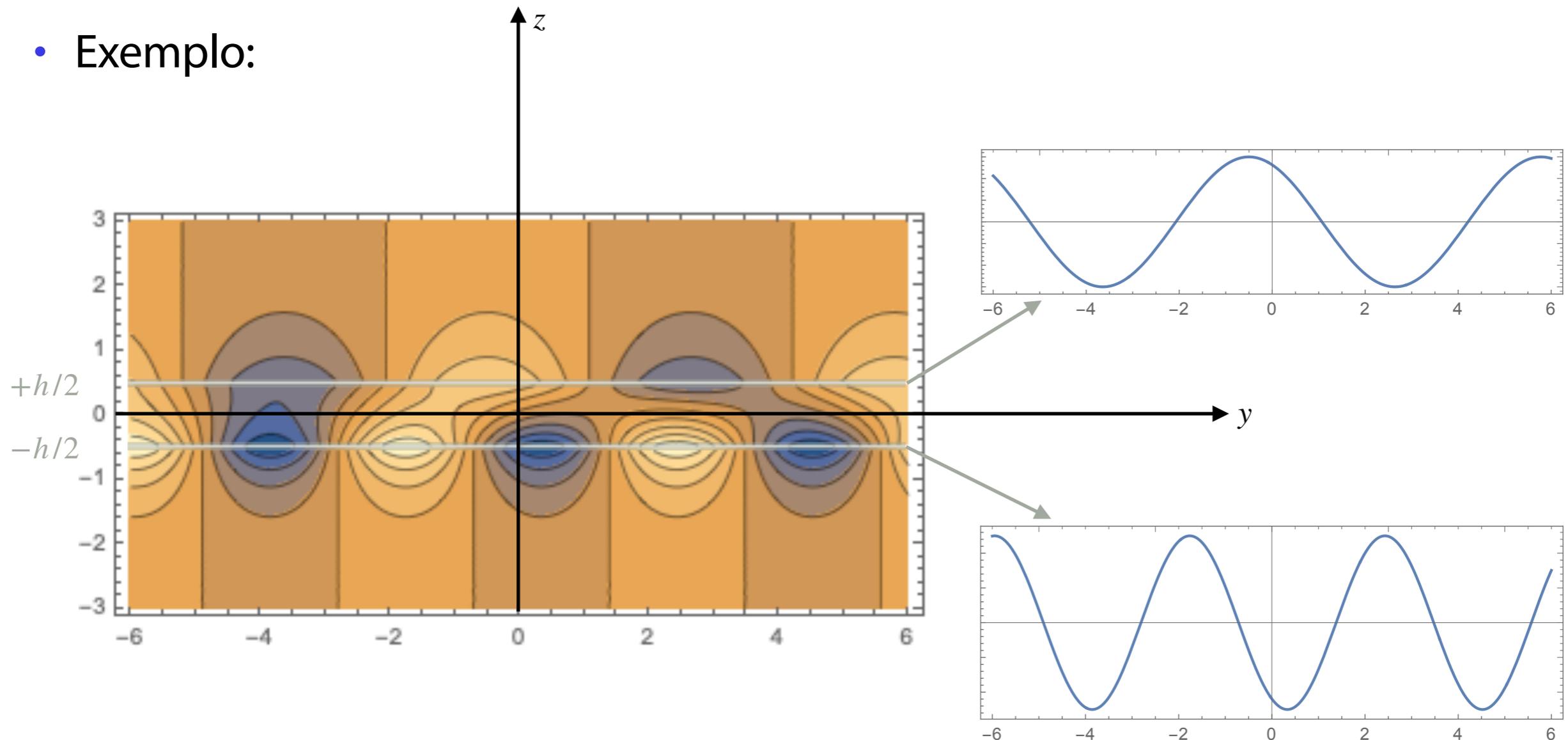
$$\phi(y, z \leq -h/2) = \sum_n f_n^- e^{+k_n(z+h/2)} \cos(k_n y + \varphi_n^-)$$

- Há muitos outros exemplos que podemos fazer — veja também, por exemplo, o Ex. 3.4 do Griffiths



Exemplo: planos paralelos

- Exemplo:



Separação de variáveis e série de Fourier

- Num problema mais geral formulado em coordenadas Cartesianas temos algo como:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(x, y, z) = \sum_n X_n(x) Y_n(y) Z_n(z)$$

- Substituindo na equação de Laplace temos:

$$\frac{1}{X_n} \frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} + \frac{1}{Y_n} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} + \frac{1}{Z_n} \frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} = 0$$

- Como cada termo é função de uma variável diferente, os três têm que ser constantes — vamos chamá-las de $-k_{n,x}^2$, $-k_{n,y}^2$ e $-k_{n,z}^2$ — mas não se engane: os k 's podem ser reais, imaginários ou até mesmo complexos!
- Com isso, chegamos a uma equação algébrica que expressa a Eq. de Laplace:

$$k_{x,n}^2 + k_{y,n}^2 + k_{z,n}^2 = 0$$

- E isso nos leva imediatamente à **solução geral**:

$$\phi = \sum_n A_n e^{i(k_{n,x}x + k_{n,y}y + k_{n,z}z)} = \sum_n A_n e^{i \vec{k}_n \cdot \vec{x}} \quad , \quad \text{com } \vec{k}_n = \{k_{n,x}, k_{n,y}, k_{n,z}\} \quad \text{e} \quad \vec{k}_n \cdot \vec{k}_n = 0$$

Separação de variáveis e série de Fourier

- Vimos nos exemplos acima como podemos expressar as condições de contorno em termos de séries de Fourier. Em 1D temos algo como:

$$f(x) \rightarrow \sum_n f_n \cos(k_n x + \varphi_n^+) = \sum_n [a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)]$$

- Agora queremos fazer uma afirmação mais rigorosa. Digamos que temos uma **função periódica**, de periodicidade L . Então temos que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)] \quad , \quad \text{com } k_n = n 2\pi/L$$

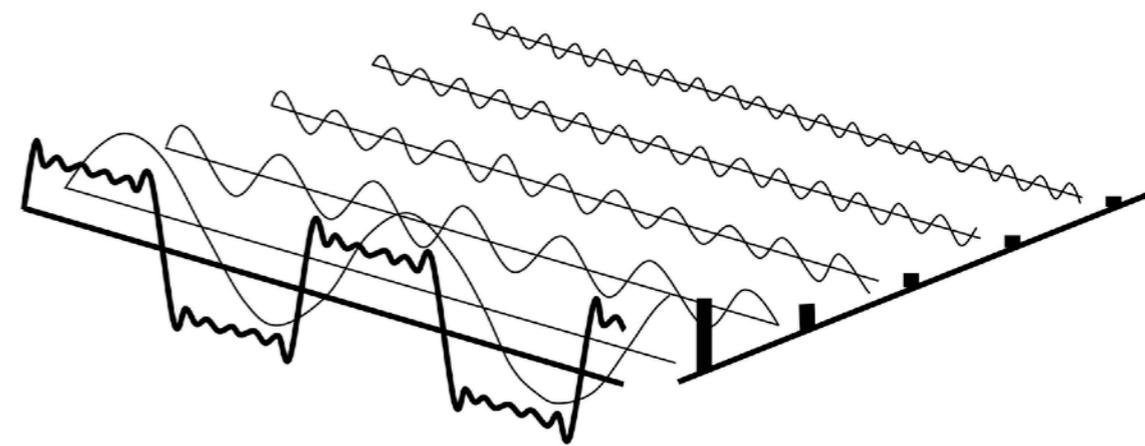
Note que $n 2\pi(x + L)/L = n 2\pi + n 2\pi x/L$, portanto $\cos[k_n(x + L)] = \cos[k_n x]$ e $\sin[k_n(x + L)] = \sin[k_n x]$, o que garante a periodicidade.

- Podemos encontrar quem são esses coeficientes (a_n e b_n) usando as **condições de ortogonalidade**:

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{n 2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m 2\pi x}{L}\right) = \frac{L}{2} \delta_{mn} \quad ,$$

$$\int_0^L dx \cos\left(\frac{n 2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m 2\pi x}{L}\right) = \frac{L}{2} \delta_{mn} \quad , \quad \text{e}$$

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{n 2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m 2\pi x}{L}\right) = 0 \quad .$$



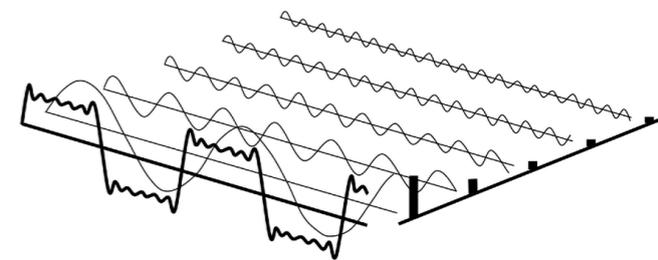
Separação de variáveis e série de Fourier

- Usando as ortogonalidades acima, podemos integrar a nossa função:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)]$$

$$\int_0^L dx f(x) \cos(m 2\pi x/L) = a_m \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L dx f(x) \sin(m 2\pi x/L) = b_m \frac{L}{2}$$

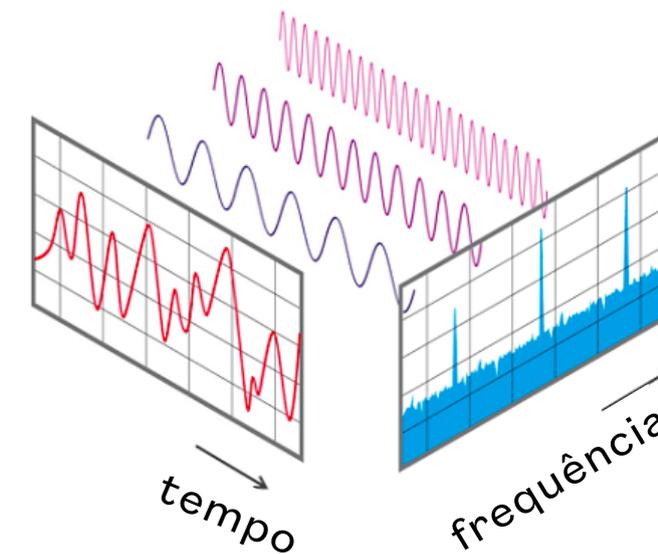


- Mas e para funções contínuas em \mathbb{R} , porém não necessariamente periódicas? Nesse caso podemos usar o conceito da **transformada de Fourier**:

$$f(x) \rightarrow \tilde{f}(k) = \int dx e^{ikx} f(x) \quad ,$$

$$\tilde{f}(k) \rightarrow f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \tilde{f}(k) \quad , \text{ com}$$

$$\int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-x')} = \delta(x-x') \quad \text{e} \quad \int dx e^{i(k-k')x} = 2\pi \delta(k-k')$$



Próxima aula:

- Mais sobre separação de variáveis
- Solução formal pelo método da Função de Green
- O método das imagens

- Leitura:

Griffiths, Cap. 3

Jackson, Cap. 1.10 , 2.1 e 2.2