Exercícios - Aproximações Lineares e Diferenciais

1- Comparar os valores de Δy e dy se $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e x variar

a) de 2 para 2,05

b) de 2 para 2,01

a) $2{,}05 - 2 = 0{,}05$

$f(x + \Delta x) = f(2{,}05)$

$f(2) = 9$

Então $f(x+\Delta x) = f(2{,}05) = (2{,}05)^3 + (2{,}05)^2 - 2 \cdot 2{,}05 + 1 = 9{,}717625$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = 9{,}717625 - 9$

$\boxed{\Delta y = 0{,}717625}$ → variação real

- Variação aproximada

$dy = f'(x)\,dx$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$

$dy = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$

$\Delta x = dx = 0{,}05$

$f'(2) = 14$

$dy = 14 \cdot 0{,}05$

$\boxed{dy = 0{,}7}$ → variação aproximada

b) $2{,}01 - 2 = 0{,}01$

$f(x + \Delta x) = f(2{,}01)$

$f(x) = f(2) = 9$

$f(x+\Delta x) = f(2{,}01) = (2{,}01)^3 + (2{,}01)^2 - 2.(2{,}01) + 1 = 9{,}1407$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$\Delta y = 9{,}1407 - 9$

$\Delta y = 0{,}1407$ -> variação real

- Variação aproximada

$dy = f'(x)dx$

$\Delta x = dx = 0{,}01$

$f'(2) = 14$

$dy = 14 . 0{,}01$

$dy = 0{,}14$ -> variação aproximada

2) 15-18 a) Encontre a diferencial dy

b) Avalie dy para os valores dados de x e dx.

16) $y = \cos \pi x$, $x = \frac{1}{3}$, $dx = -0{,}02$

$dy = f'(x)\,dx$

$dy = -\,\text{sen}\,\pi x . \pi . dx$

$dy = -\,\text{sen}\,\pi . \frac{1}{3} . \pi . (-0{,}02)$

$dy = -\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} . \pi . (-0{,}02)$

$dy = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi . (-0{,}02)$

$dy = 0{,}0544$

17) $y = \sqrt{3 + x^2}$, $x = 1$, $dx = -0{,}1$

$y = (3 + x^2)^{1/2}$

$dy = \frac{1}{2}(3 + x^2)^{-1/2} \cdot 2x \cdot dx$

$dy = \frac{x}{(3 + x^2)^{1/2}} \cdot dx$

$dy = \frac{1}{2} \cdot (-0{,}1)$

$dy = -0{,}05$

3) 23 - 28 Use a aproximação celular (ou diferencial) para estimar o número dado:

23) $(1{,}999)^4$

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$, $a = 2$

$f(2) = 2^4 = 16$

$f'(2) = 4 \cdot (2)^3 = 32$

$L(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$

$(1{,}999)^4 \approx 16 + 32(x - 2)$

$(1{,}999)^4 \approx 16 + 32(1{,}999 - 2)$

$(1{,}999)^4 \approx 16 - 0{,}032 = 15{,}968$

24) $e^{-0{,}015}$

$f(x) = e^{x}$

$f'(x) = e^{x}$, $a = 0$

$f(0) = 1$

$f'(x) = 1$

$L(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$

$L(x) \approx 1 + 1\,(x-0)$

$e^{-0{,}015} \approx 1 + 1\,(-0{,}015)$

$0{,}9851 \approx 0{,}9850$

Exemplo:

sen $60^\circ 1'$

$y = \operatorname{sen} x$; sen $60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$1^\circ \longrightarrow 60\,\text{min}$

$t \longrightarrow 1\,\text{min}$

$t = \frac{1^\circ}{60}$

$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 90^\circ$

$x \longleftarrow \frac{1^\circ}{60}$

$x = \dfrac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{60}}{90}$

$x = \dfrac{\frac{\pi}{120}}{90}$

$x = \dfrac{\pi}{10.800}$

$\boxed{x = 0{,}00029088}$

$\Updownarrow$

$dx = 0{,}00029088$

$y = \operatorname{sen} x$

$y' = \cos x$

$dy = f'(x)\,dx$

$dy = \cos 60 \,.\, 0{,}00029088$

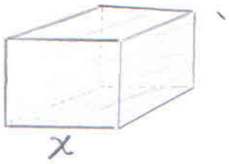
$0{,}5 \,.\, 0{,}00029088$

$\boxed{dy = 0{,}000104441}$

4) A aresta de um cubo tem 10 cm, com possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível no cálculo.

a) volume do cubo

b) da área da superfície do cubo



– Erro absoluto = |valor real – valor aproximado|

– Erro relativo $= \dfrac{\text{erro absoluto}}{\text{valor medido}} = \dfrac{E.a.}{V.M.}$

– Erro percentual = erro relativo × 100

Como a aresta do cubo foi medida e possui um erro de 0,1 cm, não foi informada a medida da aresta e será considerada igual a x. Como $V(x)=x^3$ é o volume do cubo da aresta x, então o erro no cálculo do volume é dado por:

Ea = |valor real – $= |V(x) - V(x_0)| = \underbrace{|V(x) - V(10)|}_{= \Delta V}$

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

a)

$$\Delta V \approx dV$$

$$dV = V'(10) \cdot dx$$

Como o erro possível em x é $dx = 0{,}1$ cm

$$Ea \approx V'(10) \cdot 0{,}1 = 3(10)^2\, 0{,}1 = 30\ cm^3$$

Logo o erro absoluto será $Ea = 30\ cm^3$

O erro relativo será,

$$\mathcal{E}_{rel} = \frac{\mathcal{E}_a}{VM} = \frac{30}{V(10)} = \frac{3\cancel{0}}{100\cancel{0}} = 0{,}03$$

e o erro percentual

$$\mathcal{E}_p = 0{,}03 \times 100 = 3\%$$

b) $S = 6x^2$

$dS = 12x\,dx$, quando $x = 10$

$dS = 12 \cdot 10 \cdot 0{,}1$

$dS = 12$ erro máximo na superfície da área do cubo

Então,

$$\mathcal{E}_{rel} = \frac{\Delta S}{S} \approx \frac{dS}{S} = \frac{12\cancel{x}\,dx}{6x^{\cancel{2}}} = \frac{2 \cdot 0{,}1}{10} = 0{,}02$$

$$\mathcal{E}_p = 0{,}02 \times 100 = 2\%$$

34) O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.

a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada do disco.

b) Qual o erro relativo? Qual o erro percentual?

$r = 24$ cm $\quad e = 0{,}2$ cm

$dr = 0{,}2$ cm

a) $A = \pi r^2$

$dA = A' \cdot dr$

$dA = 2\pi r \cdot dr$

$dA = 2\pi \cdot 24 \cdot 0{,}2$

$dA = 9{,}6\pi$

O máximo erro possível calculado na área do disco é $9{,}6\pi \approx 30\ cm^2$

b) Erro relativo $\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{dA}{A} = \frac{2\cancel{\pi}\cancel{r}\,dr}{\cancel{\pi}\,r^{\cancel{2}}} = \frac{2dr}{r}$

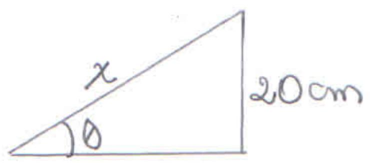
$= \frac{2 \cdot 0{,}2}{24} = 0{,}0167$

Erro percentual $= 0{,}0167 \times 100 = 1{,}67\%$

38) Sabe-se que um lado de um triângulo retângulo mede 20 cm de comprimento e o ângulo oposto foi medido como 30°, com um erro possível de $\pm 1^\circ$.

a) Use diferenciais para estimar o erro no cálculo da hipotenusa

b) Qual o erro percentual?



a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 20 \operatorname{cossec}\theta$

$dx = f'(\theta)\,d\theta$

$dx = -20 \operatorname{cossec}\theta \cdot \operatorname{cotg}\theta \cdot d\theta$

$dx = -20 \operatorname{cossec}\theta \cdot \operatorname{cotg}\theta \cdot (\pm 1^\circ)$

$dx = -20 \operatorname{cossec} 30^\circ \cdot \operatorname{cotg} 30^\circ \cdot \left(\frac{\pm\pi}{180}\right)$

$dx = -20 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\pm\pi}{180}\right)$

$dx = \frac{\pm 2\sqrt{3}\pi}{9} \approx 1{,}21\ cm$

$e = \pm 1^\circ$

$d\theta = \pm 1^\circ$

180° —— π

1° —— y

$y = \frac{\pi}{180}$

O erro será de 1,21 cm

b) Erro relativo $\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{dx}{x} = \frac{\frac{\pm 2\sqrt{3}\pi}{9}}{20(2)} = \frac{\pm\sqrt{3}\pi}{180}$

$E_{rel} = 0{,}0302$

Erro percentual $= 0{,}0302 \times 100 = \pm 3{,}02\%$