

Observações da Fórmula de Taylor

Considere como exemplo a função $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ e $x_0 = 4$

$$f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$f(x) = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0), \text{ como } y = f(x)$$

$$y = \frac{1}{4} (x - 4) + 2$$

$$\boxed{y = \frac{x - 4}{4} + 2}$$

Então $y = \frac{x - 4}{4} + 2$ é uma aproximação de grau 1 de $f(x) = \sqrt{x}$, numa vizinhança de $x_0 = 4$. Observa-se que em $x = 4$ é permitido fazer o cálculo da função usando a reta tangente para a aproximação.

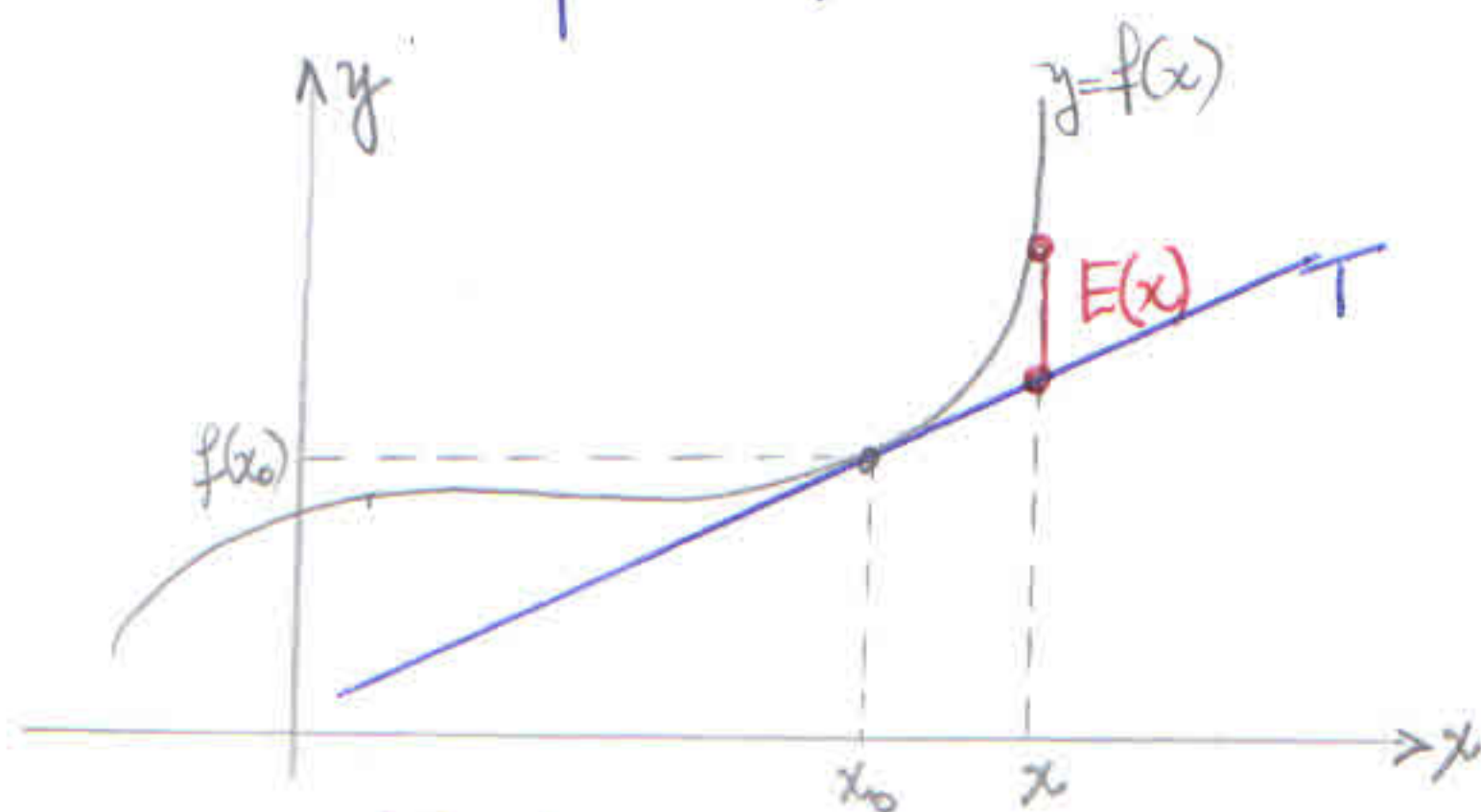
$y = \frac{x - 4}{4} + 2$ é a aproximação de grau 1 de $f(x) = \sqrt{x}$, numa vizinhança de $x_0 = 4$. Assim $\sqrt{4,3} \approx 2,073644...$

e a reta tangente fornece $2 + \frac{0,3}{4} = 2,075$

correspondente a uma aproximação satisfatória

Parte complementar do Polinômio de Taylor

Seja f derivável no ponto x_0



Então a eq. da reta tg,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ onde}$$

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$E(x) = f(x) - T(x)$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow x_0} E(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0}$$

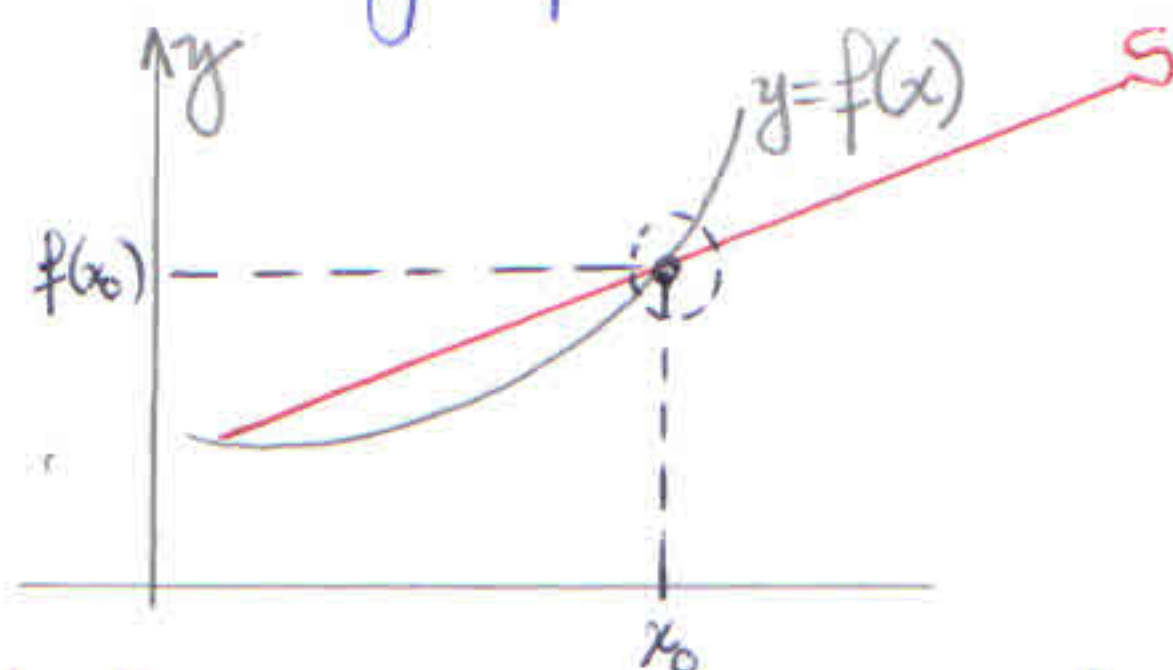
$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{definição } f'(x_0)} - \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right]$$

$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0}$$

Parte complementar do Polinômio de Taylor

Considere o seguinte gráfico:



Seja $S(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ e calculemos o

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - S(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0}$$

então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right] = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = f'(x)}$$

Ou seja, nenhuma outra reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ tem essa propriedade, é somente a reta tangente no contexto apresentado.

Exercício

1) Calcular o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta de x_0 dado

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x-x_0)^3$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2.$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad f''(x) = -\frac{-2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'(2) = -\frac{1}{4}$$

$$f''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = -3 \cdot 2 \cdot x^{-4}$$

$$f'''(x) = -6 x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

$$f'''(2) = \frac{-6}{(2)^4} = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$P(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{3}{48}(x-2)^3$$

2) Calcular um valor aproximado para $\sqrt{9,03}$.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 9$$

$$f(x_0) = \sqrt{9} = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \quad ; \quad f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)$$

$$P(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9)$$

$$P(x) = 3 + \frac{x-9}{6}$$

Como $f(x) \approx T(x)$ para $x = 9,03$

$$\sqrt{9,03} \approx 3 + \frac{1}{6} (9,03 - 9) = 3 + \frac{1}{6} (0,03) = 3,005$$

3) Encontre o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x) = \ln x$ em torno de $x_0 = 1$.

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$x_0 = 1 ; f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(1) = -\frac{1}{1} = -1$$

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$P(x) = 0 + 1(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

Polinômio de Taylor de ordem 2

4) Encontrar uma aproximação para $\ln(1,2)$.

Obs.: Será aproximado o $\ln(1,2) \approx P(1,2)$ usando o $P(x)$ anterior

Teorema: Se f for derivável até a ordem 3 em I , e se x e $x_0 \in I$ então,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \underbrace{\frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3}_{E_2(x)}$$

Então,

$$\begin{aligned} \ln(1,2) &\approx P(1,2) = (1,2-1) - \frac{1}{2} (1,2-1)^2 \\ &= 0,2 - \frac{1}{2} (0,04) \\ &= 0,2 - 0,02 \\ &= 0,18 \end{aligned}$$

Vamos analisar qual a estimativa do erro
 $\ln(1,2) \approx 0,18$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \quad \underbrace{0,2}_3$$

$$E_2(1,2) = \frac{2}{(\bar{x})^3} \cdot \frac{1}{3!} (1,2-1)^3$$

$$1 < \bar{x} < 1,2$$

$$E_2(1,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(\bar{x})^3} \cdot 2^3 \cdot (10^{-1})^3$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{(\bar{x})^3} \cdot 10^{-3} < \frac{8}{3} \cdot 10^{-3} = 0,00266\bar{6} < 10^{-2}$$

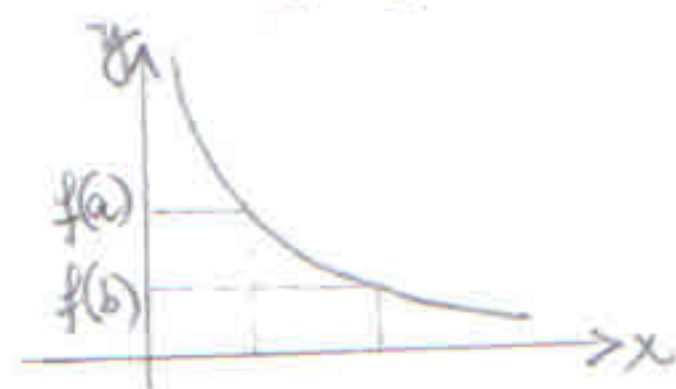
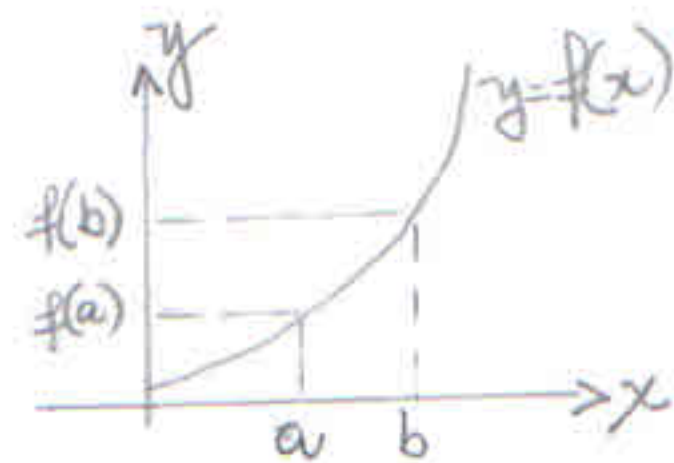
$\downarrow$
 $\bar{x}=1$

$$1 < \bar{x} < 1,2$$

$$(1)^3 < (\bar{x})^3 < (1,2)^3$$

$$\boxed{1 > \frac{1}{\bar{x}^3}} > \frac{1}{(1,2)^3}$$

$\underbrace{0,5787}$



Analisando a estimativa, o erro será correspondente 10^{-2} .

5) Avaliar e , com um erro $< 10^{-5}$.

a) Polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$, em torno de $x_0 = 0$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x_0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = e^0 = 1$$

$$f^{(k)} = e^x, \forall k$$

$$f^{(n)}(x_0) = 1$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3$$

$$P_n(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

Teorema: se f for diferenciável até ordem $n+1$ e se $x, x_0 \in I$ então:

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{E(n)}$$

A função é correspondente a $f(x) = e^x$
 $f^{(n+1)}(\bar{x}) = e^{\bar{x}}$

Para $x_0 = 0$ e $x = 1$

$$E_n(1) = \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} \cdot 1$$

$$0 < \bar{x} < 1$$

$$\underbrace{e^0}_{=1} < e^{\bar{x}} < e^1 < 3$$

Portanto,

$$E_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

Estaremos procurando quando $\frac{3}{(n+1)!}$ ficará $< 10^{-5}$

b) Avaliar (e) com erro $< 10^{-5}$

Considerando

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000000}$$

$$(n+1)! > \underline{300.000}$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5040$$

$$8! = 40320$$

$$9! = 362880$$

$$n+1 = 9$$

$n = 8 \rightarrow$ corresponde a uma aproximação para e , com erro $< 10^{-5}$, então

$$P_n(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n$$

$$P(x) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} (\approx e)$$