ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Estática - Forças distribuídas - Baricentro

Ronaldo de Breyne Salvagni

Agosto de 2021

PME3100 Mecânica I

2 – Estática

2.5 – SISTEMAS DE FORÇAS DISTRIBUIDAS

2.5.1 – Forças paralelas – baricentro

2.5.1.1 – Forças paralelas: são as representadas pelos vetores aplicados $(\vec{F}_i, P_i)$, tais que:

$\vec{F}_i = h_i\vec{u}$

onde:

$h_i =$ escalares

$\vec{u} =$ versor que define a direção do sistema de forças paralelas

Exemplos:
- pesos de várias partes de um sistema material pequeno
- forças de pressão de um líquido sobre uma superfície plana

2.5.1.2 – Redução do sistema de forças paralelas para a forma mais simples

- Momento do sistema em relação a um polo *O* qualquer:

$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n}(P_i - O) \wedge \vec{F}_i = [\sum_{i=1}^{n}(P_i - O)h_i] \wedge \vec{u}$

-Resultante:

$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = [\sum_{i=1}^{n} h_i]\vec{u} \perp \vec{M}_O$

Portanto, $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$ e, se $\vec{R} \neq 0$, o sistema é equivalente a uma única força – a resultante, aplicada em qualquer ponto do eixo central. Como já foi visto, esse eixo é uma reta, formada pelos pontos *E* tais que:

$(E - O) = \frac{\sum(P_i - O)h_i}{\sum h_i} + \lambda\vec{u},$

com λ sendo um parâmetro real arbitrário.

Entre todos os pontos *E* que satisfazem a relação acima, existe um ponto, que chamaremos de *C*, para o qual $\lambda = 0$, o que faz com que seja independente de $\vec{u}$, ou seja, da direção do sistema de forças. Esse ponto será chamado de centro das forças paralelas e definido por:

$$(C - O) = \frac{\sum(P_i - O)h_i}{\sum h_i}$$

2.5.1.3 – Baricentro

No caso das forças paralelas serem os pesos, o ponto C é chamado centro de gravidade ou baricentro *G*, e os h_i são as massas m_i:

$$(G - O) = \frac{\sum m_i(P_i - O)}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i(P_i - O)}{m}$$

onde *m* é a massa total do sistema.

- Coordenadas de *G*:

sistema *Oxyz*:

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{m}$$

Se tivermos corpos contínuos homogêneos de densidade ρ, a massa contida num volume ΔV será $\Delta m = \rho \Delta V$, e teremos:

$$(G - O) = \frac{\sum (P_i - O)\rho \Delta V_i}{\rho V} = \frac{\sum (P_i - O)\Delta V_i}{V}$$

o que significa que a posição do baricentro não depende da densidade de massa, mas apenas da forma geométrica, neste caso.

2.5.1.4 – Propriedades

- *Propriedade associativa*

Seja (h_i, P_i), divididos em dois grupos:

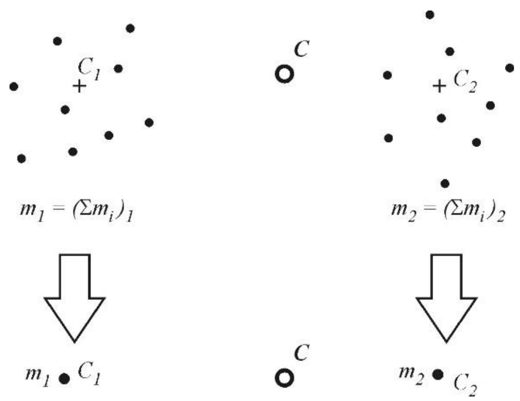
$(h_i, P_i)_1$, baricentro C_1

$(h_i, P_i)_2$, baricentro C_2

C pode ser obtido a partir de C_1 e C_2, como se tivéssemos apenas um par de pontos:

$((\sum h_i)_1, C_1)$ e $((\sum h_i)_2, C_2)$

Exemplo:

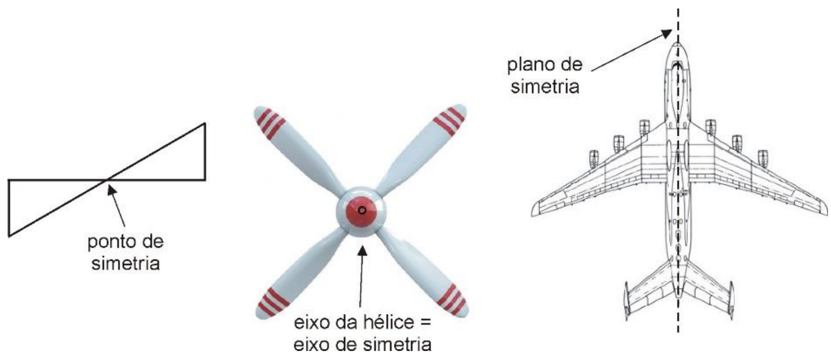


$$(C - O) = \frac{m_1(C_1 - O) + m_2(C_2 - O)}{m_1 + m_2}$$

- *Propriedade de simetria (geométrica)*

Se o sistema material homogêneo tem um elemento de simetria (ponto, eixo ou plano), o seu baricentro pertence necessariamente a esse elemento.

Exemplos:



- *Propriedade de corpos convexos*

Se todo plano tangente à superfície de um corpo deixar este corpo em um único semi-espaço definido pelo plano, o corpo é convexo. Neste caso, o baricentro é certamente interno à superfície do corpo.

Exemplos:

Não convexos:

vaso

ferradura

Convexos:

bola

tijolo

- *Teorema de Pappus*

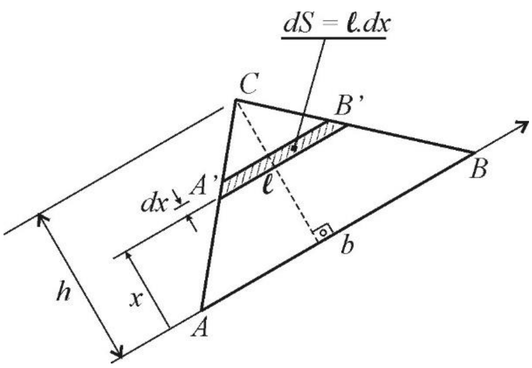
(ver livro texto)

2.5.2 – Cálculo do centroide ou baricentro de figuras geométricas

Veremos este tópico através de exercícios. Os dois primeiros correspondem à aplicação da definição das coordenadas do baricentro, no caso contínuo. Nos demais, o baricentro do conjunto será obtido pela composição dos baricentros das partes do sistema.

Exemplo 2.5.2.1

Baricentro de um triângulo homogêneo – altura *h*, lado *AB* de comprimento *b*.



Determinemos a distância x_G do baricentro ao lado *AB*. Pela definição, sendo $S = bh/2$ a área do triângulo. temos:

$$x_G = \frac{\int_0^h xdS}{S}$$

onde dS é a área elementar hachurada, com $dS = ldx$. Por semelhança de triângulos vem:

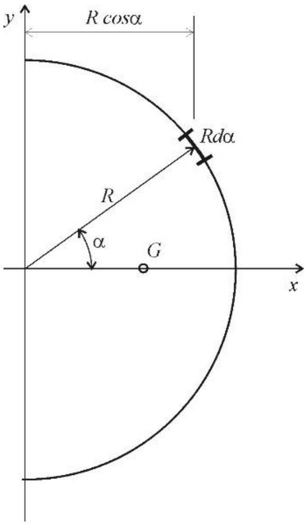
$$\frac{l}{b} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow l = \frac{b}{h}(h-x)$$

Assim: $\boxed{x_G = \frac{1}{S}\int_0^h x\,\frac{b}{h}(h-x)dx = \frac{h}{3}}$

Procedendo analogamente para os outros lados, vemos que a distância do baricentro a um lado é igual a 1/3 da altura relativa a esse lado, ou seja, o baricentro é o ponto de interseção das medianas.

Exemplo 2.5.2.2

Baricentro de uma semi-circunferência de raio R (não é semi-círculo!)

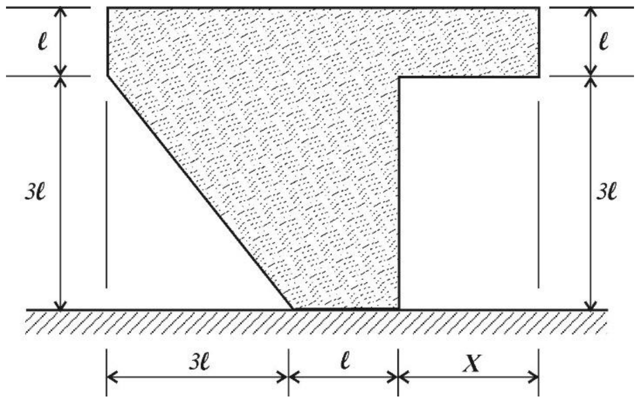


Por simetria: $\boxed{y_G = 0}$

Para x_G, temos:

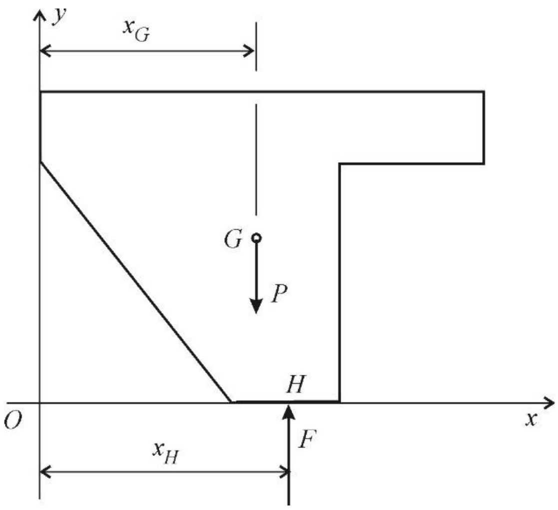
$$x_G = \frac{1}{\pi R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos\alpha\,(Rd\alpha) = \frac{R}{\pi}|\sin\alpha|_{-\pi/2}^{\pi/2} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{2R}{\pi}}$$

Exemplo 2.5.2.3: Ache os valores limites de X tais que a placa da figura não tombe. A placa tem espessura constante, é homogênea e está apoiada em uma superfície lisa.



Resolução:

Isolando a placa:



F é a resultante das forças de pressão; é vertical por não haver atrito (superfície lisa).

Para a placa não tombar, as equações de equilíbrio devem ser satisfeitas:

$\sum \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{0}$: $0 = 0$

$\sum \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{0}$: $-P + F = 0 \Rightarrow F = P$

$\sum \boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{0}$: $-P \cdot x_G + F \cdot x_H = 0 \Rightarrow x_G = x_H$

Como H é um ponto da base da placa, temos:

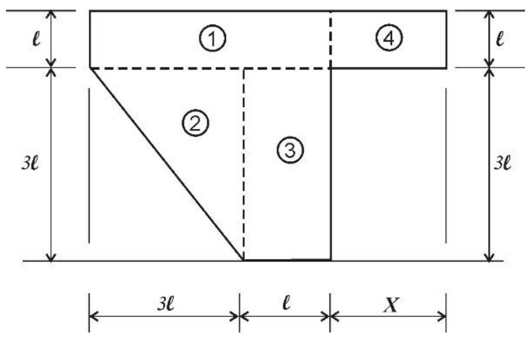
$$3l \leq x_H \leq 4l$$

Portanto, como $x_G = x_H$, a condição a ser imposta para que o equilíbrio seja possível é:

$$3l \leq x_G \leq 4l$$

Determinemos x_G em função de X, usando a propriedade associativa do baricentro. Temos:

$$x_G = \frac{m_1 \cdot x_{G1} + m_2 \cdot x_{G2} + m_3 \cdot x_{G3} + m_4 \cdot x_{G4}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$



Como a placa é homogênea de densidade ρ e de espessura constante h, a massa da região de área A_i será $m_i = \rho h A_i$, e podemos eliminar ρ e h da expressão de x_G, ficando com:

$$x_G = \frac{A_1 \cdot x_{G1} + A_2 \cdot x_{G2} + A_3 \cdot x_{G3} + A_4 \cdot x_{G4}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} \qquad (1)$$

Calculando:

$$A_1 = 4l \cdot l = 4l^2;\ \ x_{G1} = \frac{4l}{2} = 2l$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(3l \cdot 3l) = \frac{9l^2}{2};\ x_{G2} = \frac{2}{3}(3l) = 2l$$

$$A_3 = 3l \cdot l = 3l^2;\ x_{G3} = 3l + \frac{l}{2} = \frac{7l}{2}$$

$$A_4 = X \cdot l;\ x_{G4} = 3L + l + \frac{X}{2} = \frac{8l+X}{2}$$

Substituindo em (1):

$$x_G = \frac{X^2+8lX+55l^2}{2X+23l}$$

Impondo:

$$3l \le x_G \le 4l \Rightarrow 3l \le \frac{X^2+8lX+55l^2}{2X+23l} \le 4l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{X^2+2lX-14l^2}{2X+23l} \ge 0 \\ \dfrac{X^2-37l^2}{2X+23l} \le 0 \end{cases}$$

Variação de sinal dos polinômios:

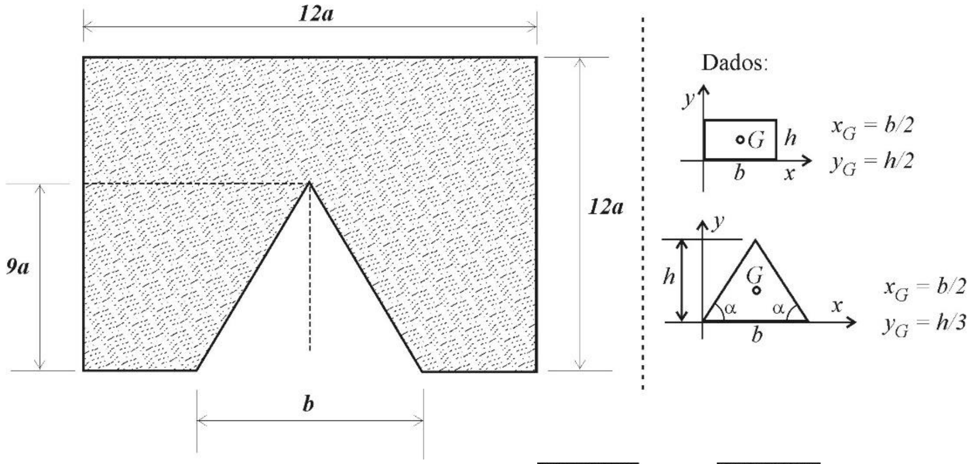
	X		$-11{,}5l$	$-\sqrt{37}l$	$\left(-1-\sqrt{15}\right)l$	$\left(-1+\sqrt{15}\right)l$	$\sqrt{37}l$
(1)	$2X + 23l$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
(2)	$X^2 + 2lX - 14l^2$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
(3)	$X^2 - 37l^2$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
	(2)/(1)	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
	(3)/(1)	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Solução: $-\sqrt{37}l \le X \le \left(-1-\sqrt{15}\right)l$ ou $\left(-1+\sqrt{15}\right)l \le X \le \sqrt{37}l$

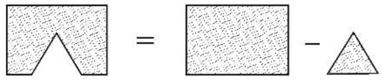
Não tem significado físico a solução para $X < -4l$ (massa negativa!); portanto, a solução será:

$$\boxed{\left(-1+\sqrt{15}\right)l \le X \le \sqrt{37}l}$$

Exemplo 2.5.2.4: Calcular a dimensão $\underline{b}$ que posicionará o baricentro da peça da figura a uma distância *7a* acima da base.



Resolução:



$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \Rightarrow x_G \sum m_i = \sum m_i \, x_i$$

$$7a\left(12a \cdot 12a - \frac{9a \cdot b}{2}\right) = (12a \cdot 12a) \cdot \frac{12a}{2} - \left(\frac{9a \cdot b}{2} \cdot \frac{9a}{3}\right) \Rightarrow \boxed{b = 8a}$$