Números Reais

Os números reais são caracterizados 10 axiomas

$\mathbb{R}$ com duas operações satisfazendo.

conjunto

(i) soma $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $x+y \in \mathbb{R}$

(ii) multiplicação $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $x \cdot y \in \mathbb{R}$

Axioma 1. $x+y = y+x$ $\qquad xy = yx$ $\qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$

Comutativa

Axioma 2. $x+(y+z) = (x+y)+z$ $\qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$

assoaciatividade

e $(xy)z = x(yz)$

Axioma 3 $x(y+z) = xy + xz$ $\qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$

distributividade

Axioma 4 identidade da adição e multiplicação

$\exists$ dois nº em $\mathbb{R}$ denotados por 0 e 1 t.q.

$x+0 = x \quad \forall x$ $\qquad x.1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Axioma 5 Existência de negativos

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists\, y \in \mathbb{R}$ t.q. $x+y=0$

$\therefore\ y := -x$

Axioma 6 Existência de inversos multiplicativos

$$\forall x \in \mathbb{R}/\{0\}, \quad \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq. } xy = 1$$

$\therefore y := x^{-1}$

Axiomas 1-6 associados às propriedades algébricas

Propriedades: $a, b, c \in \mathbb{R}$

1) Se $a+b = a+c$ então $b = c$.
2) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ $\exists x \in \mathbb{R}$ tq. $a + x = b$. $x := b - a$
3) $b - a = b + (-a)$
4) $-(-a) = a$
5) $a(b-c) = ab - ac$
6) $0 . a = a . 0 = 0$

1) dem. $a + b = a + c$ pelo Axioma 5 $\exists -a$.
Somando-se $-a$ em ambos os lados

$a + b + (-a) = a + c + (-a)$. Daí pelos Axiomas 1 e 2 temos

$a + (-a) + b = a + (-a) + c \rightarrow b = c$. $\blacksquare$

2) $\exists -a \in \mathbb{R}$ tq. $a + (-a) = 0$. Soma-se b em ambos os lados $a + \underbrace{(-a) + b}_{x} = 0 + b = b$ Axioma 4

Então $x := -a + b = b + (-a)$ satisfaz
$a + x = b$.

3) $b-a = b+(-a)$ $b-a$ satisfaz $a+\underbrace{b+(-a)}_{x} = b$

$$\left.\begin{aligned} a+x&=b \\ a+z&=b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a+x = a+z \Rightarrow x = z$$

Prop 1.

6) $0.a + 1.a = (0+1).a = 1.a = a$ somando $-a$ dos dois lados

$0.a + a + (-a) = a + (-a) \Leftrightarrow 0.a = 0$

Analogamente $a.0 = 0$.

7) Se $\begin{cases} ab = ac \\ e\ a \neq 0 \end{cases}$ então $b = c$.

8) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ tq. $ax = b$.

$x := \frac{b}{a}$ existe único

9) Se $a \neq 0$ $\frac{b}{a} = b a^{-1}$.

10) Se $a \neq 0$ $(a^{-1})^{-1} = a$.

11) Se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

dem. Se ambos são zero.

Suponha que $a \neq 0$ Então $\exists\ a^{-1}$, multiplicando por ambos os lados $a^{-1}ab = a^{-1}0 \to 1b = 0 \therefore b = 0$.

12) $(-a)b = -(ab)$ ✓ e $(-a)(-b) = ab$?

$0 = 0.b = (-a+a)b = (-a)b + ab \to -(ab) = (-a)b$

13) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + cb}{bd}$ se b e $d \neq 0$

(Sugestão. Veja antes que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$)

14) $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ac}{bd}$ $\quad b, d \neq 0$

15) $\dfrac{a}{b} \Big/ \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$ $\quad b, c$ e $d \neq 0$

Axiomas de ordem

Assumimos que existe $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ chamado o conj. dos números positivos que satisfazem os seguintes axiomas:

Axioma 7 Se $x, y \in \mathbb{R}^+$ então $x+y \in \mathbb{R}^+$ e $xy \in \mathbb{R}^+$.

Axioma 8 $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, temos $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Axioma 9 $0 \notin \mathbb{R}^+$ não pertence

Definimos

$x < y$ se $y - x \in \mathbb{R}^+$.

$x > y$ se $x - y \in \mathbb{R}^+$ ou se $y < x$.

$x \leq y$ se $x < y$ ou $x = y$.

$x \geq y$ se $x > y$ ou $x = y$.

Note. $x > 0 \rightsquigarrow x \in \mathbb{R}^+$

* Se $x<0$ $\rightsquigarrow$ dizemos x é negativos
* Se $x\geq 0$ $\rightsquigarrow$ dizemos que x é não negativo
* Se $x\leq 0$ $\rightsquigarrow$ dizemos que x é não positivo

Propriedades

16) (Tricotomia) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ então exatamente uma das três relações ocorre.

$$a<b \text{ ou } a>b \text{ ou } a=b.$$

dem Tome $b-a \in \mathbb{R}$. Se $b-a=0 \Rightarrow b=a$.
Se $b-a \neq 0$ temos pelo Axioma 8 que $b-a \in \mathbb{R}^+$
i.e. $b>a$ ou $-(b-a) = -b+a \in \mathbb{R}^+$ i.e. $a>b$.

17) Se $a<b$ e $b<c$ então $a<c$

18) Se $a<b$ então $a+c<b+c$ $\forall c \in \mathbb{R}$.

dem. $b+c-(a+c) = b+c-a-c = b-a>0 \rightsquigarrow b+c>a+c$.
i.e. $a+c<b+c$.

19) Se $a<b$ e $c>0$ então $ac<bc$.

20) Se $a\neq 0$ então $a^2>0$.

dem Axioma 8 $\Rightarrow a\in\mathbb{R}^+$ ou $-a\in\mathbb{R}^+$
Se $a\in\mathbb{R}^+$, pelo Axioma 7 $a\,a = a^2 \in \mathbb{R}^+$.

Se $-a\in\mathbb{R}^+$ $(-a)(-a)\in\mathbb{R}^+$ pelo Axioma 7.
Por outro lado $(-a)(-a) = aa = a^2$. $\therefore$ $a^2>0$.

21) $1>0$. (Segue de 20 usando que $1\cdot 1 = 1^2 = 1$).

22) Se $a<b$ e $c<0$ então $ac>bc$.

23) Se $a<b$ então $-a>-b$.

24) Se $ab>0$ então a e $b>0$ ou a e $b<0$

25) Se $a<c$ e $b<d$ então $a+b<c+d$.