



**PME 3543**

**Estruturas Mecânicas e de Veículos**

**Notas de Aula**

**Prof. Leandro V. da S. Macedo**

**14**

**Análise Estrutural Não-linear**



## Condições da análise estrutural linear que são violadas exigindo uma análise não-linear

Análises lineares assumem uma reação linear entre o carregamento imposto à estrutura e a resposta desta em termos de deslocamento, tensões, deformações, etc...

Usualmente então os problemas lineares estáticos são resolvidos em uma única etapa pela inversão da matriz de rigidez.

Algumas hipóteses da análise estrutural linear:

- Tensões diretamente proporcionais às deformações;
- Comportamento elástico do material (limite de escoamento não é ultrapassado);
- Pequenos deslocamentos (caso contrário a mudança de geometria implicaria na necessidade de se recalcular a rigidez da estrutura);
- Condições de contorno não se alteram com alteração do carregamento.

Em situações que violem as hipóteses acima teremos a necessidade de uma análise não linear onde a matriz de rigidez da estrutura precisa ser atualizada conforme a evolução do carregamento.



# Análise Estrutural Não-Linear

- **A não linearidade pode aparecer na análise de estruturas por diversos fatores:**
  - quando a rigidez do sistema varia com os deslocamentos da estrutura;
  - quando o carregamento sobre a estrutura também é afetado pelos deslocamentos da mesma;
  - quando as condições de contorno são afetadas pelos deslocamentos.
- O Problema não linear é resolvido utilizando-se um esquema de solução numérica iterativo.

Vamos classificar as causas principais de não-linearidades da seguinte forma:

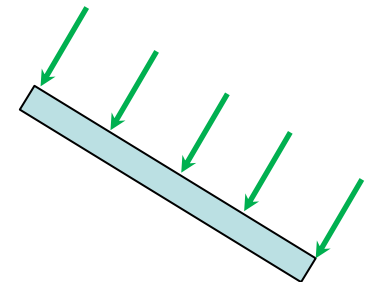
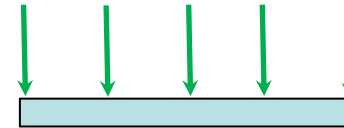
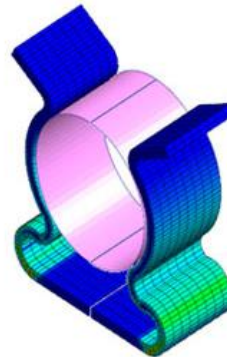
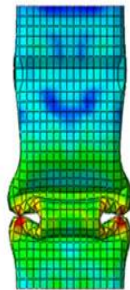
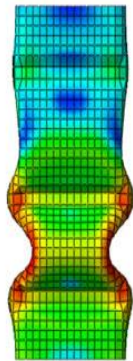
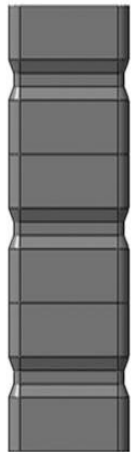
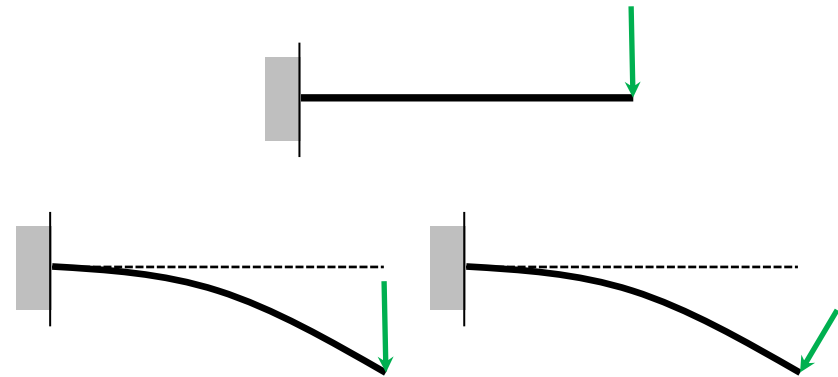
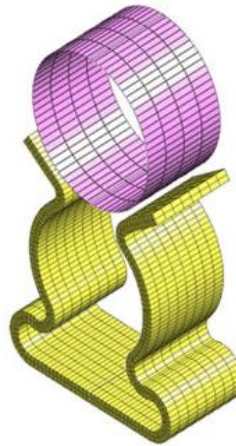
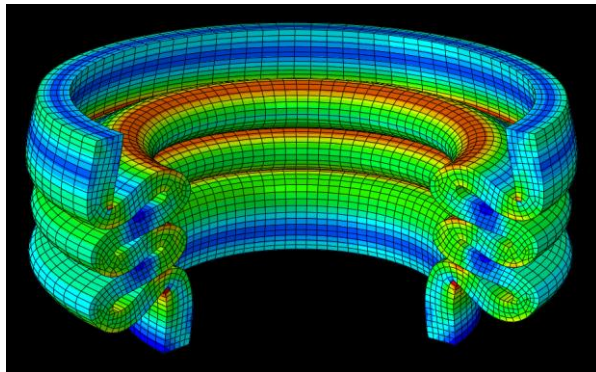
- **Não-linearidade de material** (plasticidade, hiperelasticidade... e.g.)
- **Não-linearidade geométrica** (grandes deslocamentos; forças seguidoras; pressões... e.g.)
- **Não linearidade de condições de contorno** (contatos abrindo e fechando; auto-contato... e.g.)

Com frequência estas 3 causas de não linearidade atuam simultaneamente em uma estrutura.



Com frequência as 3 causas de não linearidade atuam simultaneamente em uma estrutura.

- **Não-linearidade de material** (plasticidade, elasticidade não-linear, hiperelasticidade... e.g.)
- **Não-linearidade geométrica** (grandes deslocamentos; forças seguidoras; stress stiffening, pressões... e.g.)
- **Não linearidade de condições de contorno** (contatos abrindo e fechando; auto-contato... e.g.)





## Não-linearidade de material

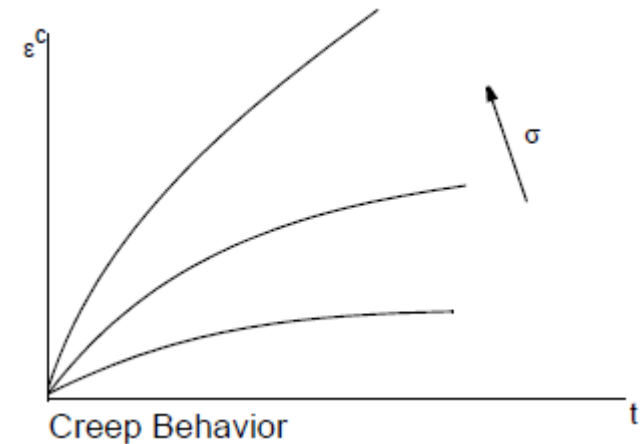
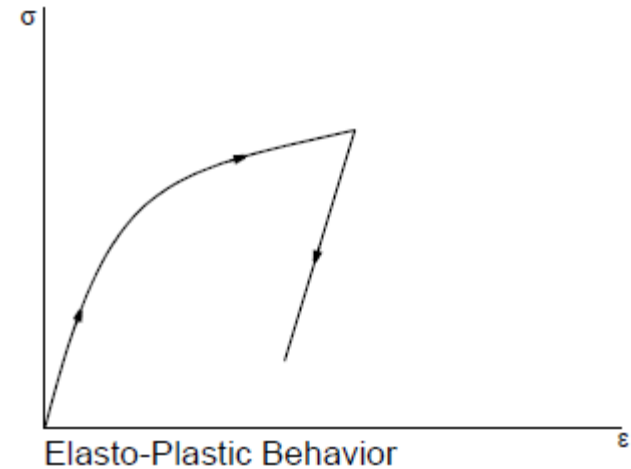
### Não linearidade de material:

Carregamento é tal que o material entra no regime plástico.

Ou então, material já tem comportamento não linear (borracha e.g.).

Anisotropia (compósitos, fibras de carbono, fibras de vidro, pneus); Elastoplasticidade; Hiperelasticidade (borracha); Viscoelasticidade...

Fluência.





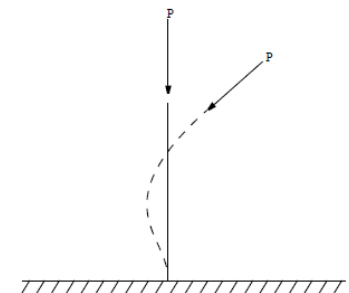
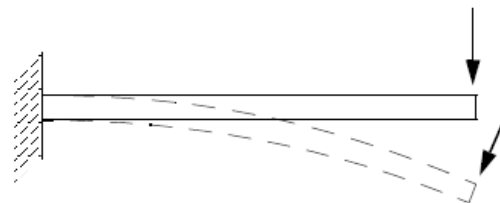
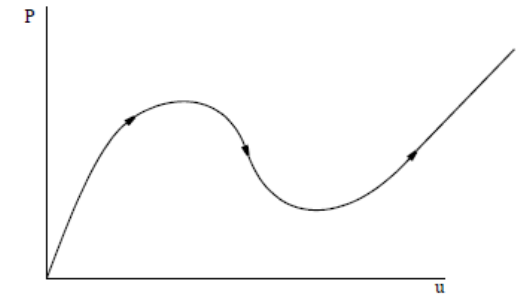
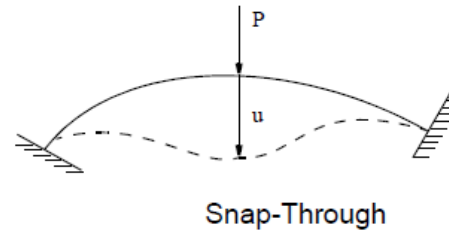
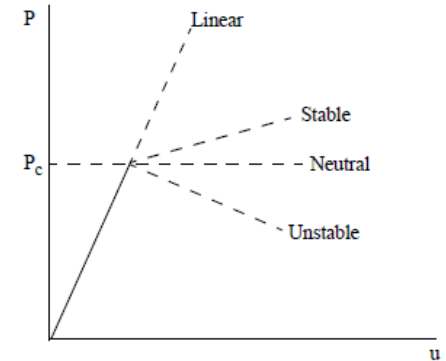
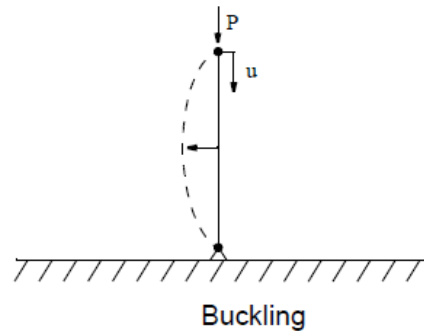
## Não-linearidade geométrica

### Não linearidade geométrica:

Carregamento é tal que os deslocamentos são tão grandes que pela mudança de geometria da estrutura há uma mudança na rigidez da mesma.

Fenômenos de flambagem (“*buckling*”) e de “*snap-through*” se enquadram como não linearidades geométricas.

Carregamento cuja direção acompanhe a forma deformada da estrutura também se enquadra como não-linearidade geométrica.

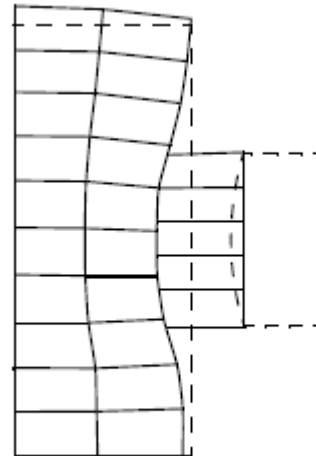




## Não-linearidade de contato

### Não linearidade de contato:

Conforme a estrutura se desloca ela fecha ou abre contatos alterando assim suas condições de contorno.

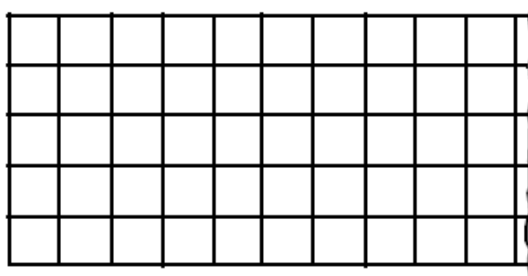


Contact and Friction Problem

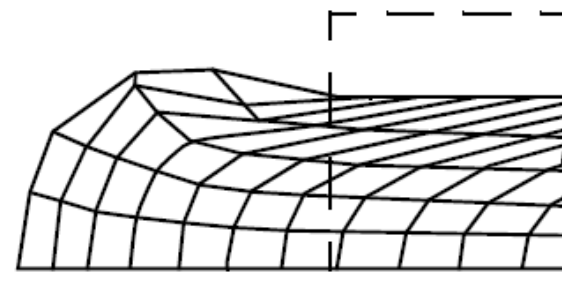


**Elementos Finitos: Formulação Lagrangeana → A malha de elementos finitos é solidária ao material e se deforma junto com ele.**

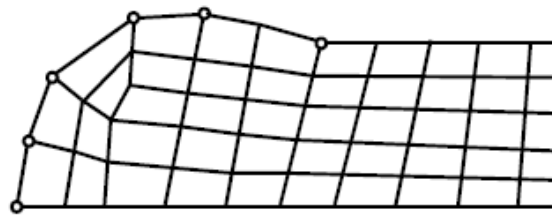
A distorção da malha pode então ficar muito severa, prejudicando a qualidade da resposta  
→ Pode-se adotar técnicas de rezoneamento da malha e malha adaptativa com a evolução do carregamento.



(a) Original  
(Undeformed Mesh)



(b) Deformed Mesh  
Before Rezoning



(c) Deformed Mesh  
After Rezoning





## Análises não-lineares – Um esquema de solução:

### **A análise não linear requer uma solução iterativa.**

Para facilitar a convergência do processo iterativo a carga total pode ser aplicada gradualmente em etapas (“load-steps”).

Para cada etapa de carregamento a solução é obtida num processo iterativo.

A solução precisa aproximar o valor correto de rigidez em cada posição da matriz de rigidez da estrutura.

A quantidade de iterações em cada etapa de carregamento dependerá do “grau” de não linearidade do problema naquela instância de carregamento.

Para um modelo “pouco” não linear a convergência é alcançada em poucas iterações.

Para um modelo com comportamento mais complexo, fortemente não linear, muitas iterações podem vir a ser necessárias.

Caso a convergência não seja alcançada em um número pré-determinado de iterações, a etapa de carregamento pode ser sub-dividida para se facilitar a convergência.

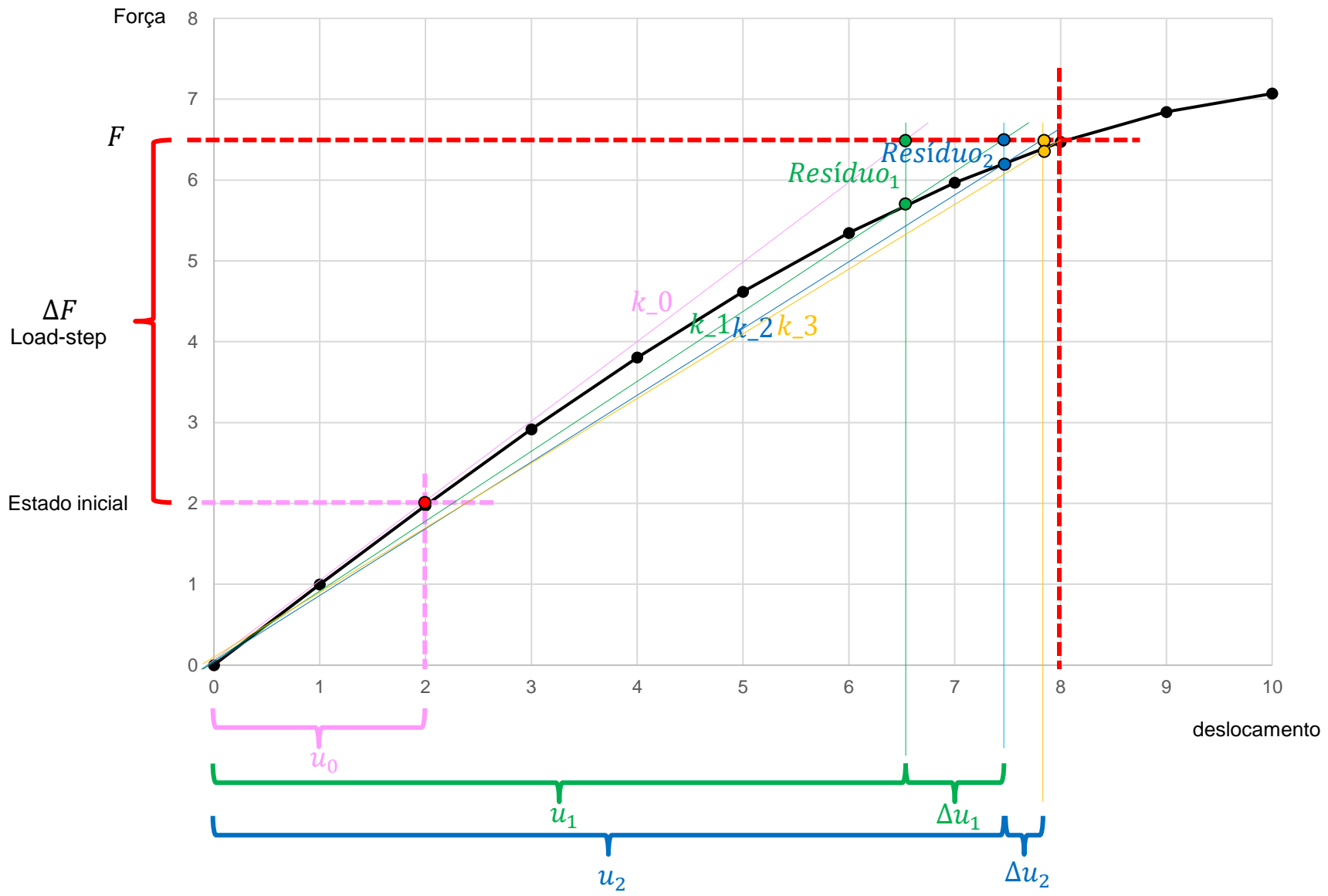
O processo iterativo vai até que a convergência nesta etapa de carregamento seja atingida.

Então a nova etapa de carregamento é aplicada.

O processo se repete até que a carga total seja alcançada.



# Método de Newton-Raphson





## Método de Newton-Raphson

Dado o carregamento  $F$ ,  
determinar o deslocamento  $u$ .

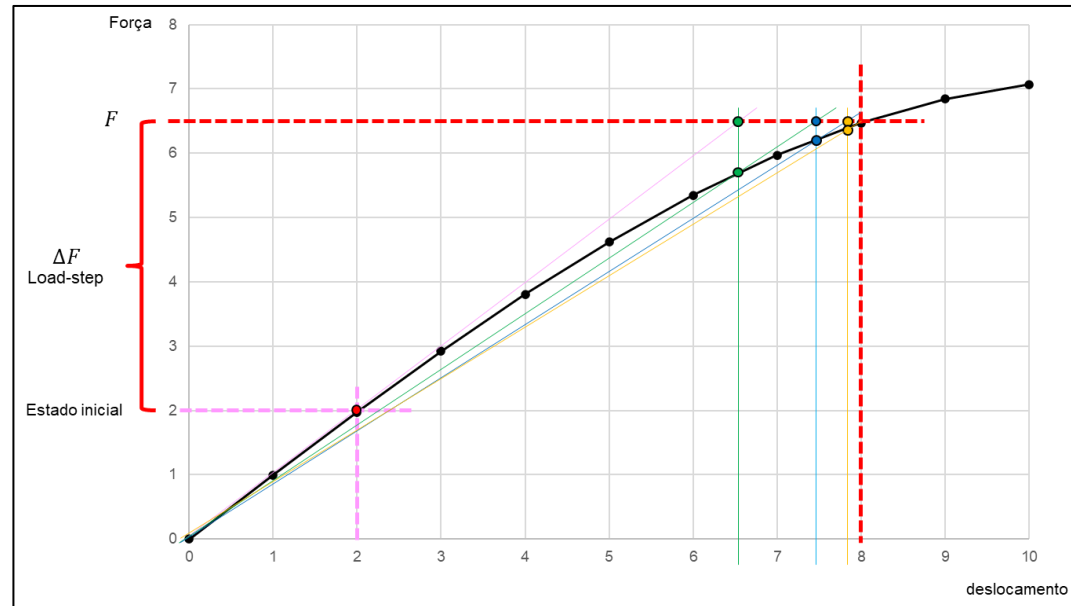
Estado inicial:

$$F_0 \quad u_0 \rightarrow k_0$$

$$\Delta F = F - F_0 \quad (\text{incremento de carga})$$

Início do processo iterativo:

$$u_1 = u_0 + \frac{\Delta F}{k_0}$$



$$u_1 \rightarrow k_1$$

$$u_2 \rightarrow k_2$$

$$u_3 \rightarrow k_3$$

$$u_i \rightarrow k_i$$

$$F_{int1} = k_1 u_1$$

$$F_{int2} = k_2 u_2$$

$$F_{int3} = k_3 u_3$$

$$F_{inti} = k_i u_i$$

$$Resíduo_1 = F - F_1$$

$$Resíduo_2 = F - F_2$$

$$Resíduo_3 = F - F_3$$

$$Resíduo_i = F - F_i$$

$$\Delta u_1 = \frac{Resíduo_1}{k_1}$$

$$\Delta u_2 = \frac{Resíduo_2}{k_2}$$

$$\Delta u_3 = \frac{Resíduo_3}{k_3}$$

$$\Delta u_i = \frac{Resíduo_i}{k_i}$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1$$

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2$$

$$u_4 = u_3 + \Delta u_3$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$$

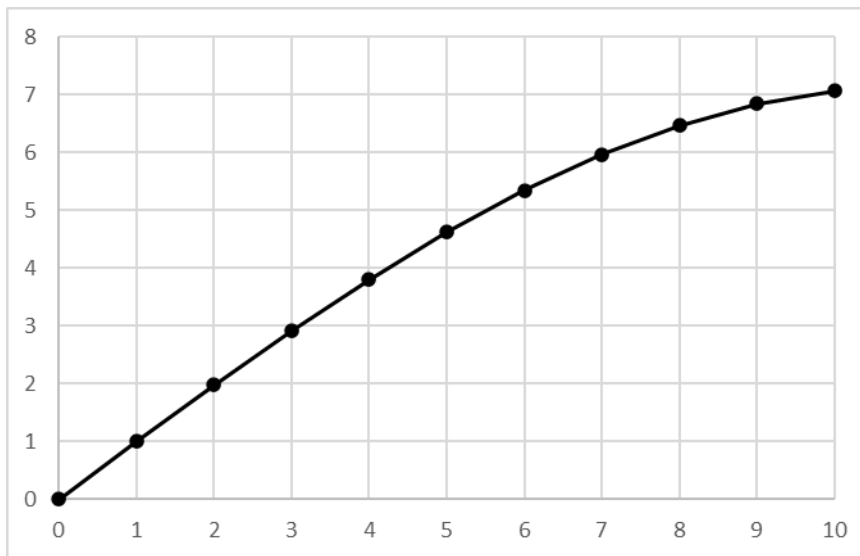


# Exemplo #1

$$F = ku$$

$$k = \cos\left(\frac{\pi u}{40}\right)$$

$$F = \cos\left(\frac{\pi u}{40}\right) u$$



u	F(u)	K(u)
0	0	1
1	0,996917	0,996917
2	1,975377	0,987688
3	2,91711	0,97237
4	3,804226	0,951057
5	4,619398	0,92388
6	5,346039	0,891007
7	5,968481	0,85264
8	6,472136	0,809017
9	6,843654	0,760406
10	7,071068	0,707107
11	7,143929	0,649448
12	7,053423	0,587785
13	6,792481	0,522499
14	6,355867	0,45399
15	5,740251	0,382683
16	4,944272	0,309017
17	3,968571	0,233445
18	2,81582	0,156434
19	1,490723	0,078459
20	1,23E-15	6,13E-17
8,063846	6,499939	0,8061



# Exemplo #1

F inicial	1,999997	desl. Inicial	2,025576108
k inicial	0,987372		
F objetivo	6,500143	desl. Exato	8,06432027

i	$\Delta F$	k (i-1)	$\Delta u$ (i-1)	u (i)	k (i)	Fint (i)	Resíduo (i)	Resíduo [%]	$\Delta u$ (i)	u (i+1)
1	4,500146	0,987372	4,5577	6,58328	0,869282	5,722721	0,7774	11,96%	0,89433	5,4520
2			5,4520	7,47760	0,832446	6,224698	0,2754	4,24%	0,33089	5,7829
3			5,7829	7,80849	0,817766	6,385519	0,1146	1,76%	0,14017	5,9231
4			5,9231	7,94866	0,811381	6,449387	0,0508	0,78%	0,06256	5,9856
5			5,9856	8,01121	0,808499	6,477059	0,0231	0,36%	0,02855	6,0142
6			6,0142	8,03977	0,807177	6,489517	0,0106	0,16%	0,01317	6,0274
7			6,0274	8,05293	0,806566	6,495225	0,0049	0,08%	0,00610	6,0335
8			6,0335	8,05903	0,806283	6,497861	0,0023	0,04%	0,00283	6,0363
9			6,0363	8,06186	0,806152	6,499083	0,0011	0,02%	0,00132	6,0376
10			6,0376	8,06318	0,806091	6,499651	0,0005	0,01%	0,00061	6,0382
11			6,0382	8,06379	0,806062	6,499914	0,0002	0,00%	0,00028	6,0385
12			6,0385	8,06407	0,806049	6,500037	0,0001	0,00%	0,00013	6,0386
13			6,0386	8,06421	0,806043	6,500094	0,0000	0,00%	0,00006	6,0387
14			6,0387	8,06427	0,80604	6,50012	0,0000	0,00%	0,00003	6,0387
15			6,0387	8,06430	0,806039	6,500133	0,0000	0,00%	0,00001	6,0387
16			6,0387	8,06431	0,806038	6,500138	0,0000	0,00%	0,00001	6,0387
17			6,0387	8,06431	0,806038	6,500141	0,0000	0,00%	0,00000	6,0387
18			6,0387	8,06432	0,806037	6,500142	0,0000	0,00%	0,00000	6,0387
19			6,0387	8,06432	0,806037	6,500143	0,0000	0,00%	0,00000	6,0387
20			6,0387	8,06432	0,806037	6,500143	0,0000	0,00%	0,00000	6,0387

Resíduo < 0,1%



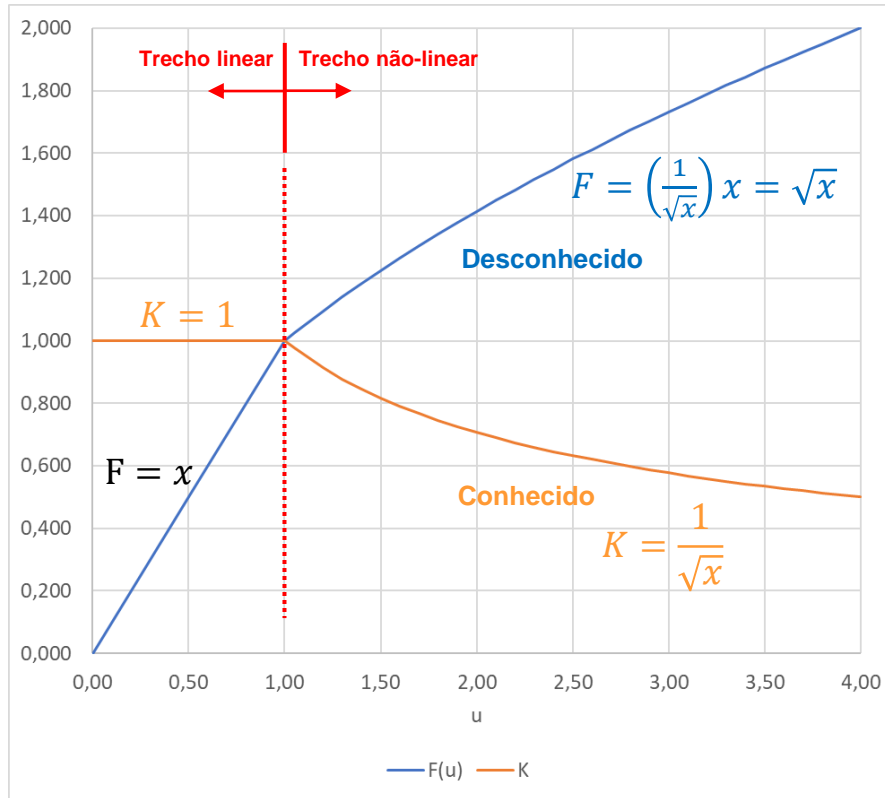
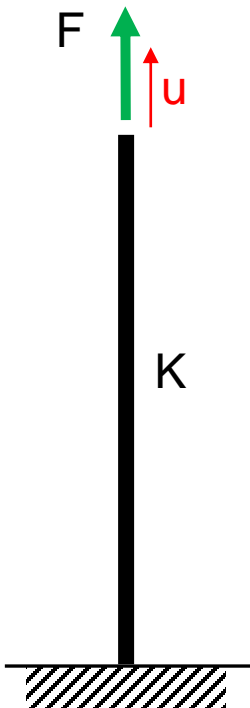
# Exemplo #2

Pede-se o deslocamento da extremidade da barra para  $F = 2$ .

$u(F=2) \rightarrow$  a ser determinado!

Admite-se conhecido  $K(u)$ .

Obs: Resultado esperado:  $u(F=2) = 4$ .



u	F(u)	K(u)
0,00	0,000	1,000
0,50	0,500	1,000
1,00	1,000	1,000
1,05	1,025	0,976
1,20	1,095	0,913
1,30	1,140	0,877
1,40	1,183	0,845
1,50	1,225	0,816
1,60	1,265	0,791
1,70	1,304	0,767
1,80	1,342	0,745
1,90	1,378	0,725
2,00	1,414	0,707
2,10	1,449	0,690
2,20	1,483	0,674
2,30	1,517	0,659
2,40	1,549	0,645
2,50	1,581	0,632
2,60	1,612	0,620
2,70	1,643	0,609
2,80	1,673	0,598
2,90	1,703	0,587
3,00	1,732	0,577
3,10	1,761	0,568
3,20	1,789	0,559
3,30	1,817	0,550
3,40	1,844	0,542
3,50	1,871	0,535
3,60	1,897	0,527
3,70	1,924	0,520
3,80	1,949	0,513
3,90	1,975	0,506
4,00	2,000	0,500



## Exemplo #2

F inicial	0	desl. Inicial	0
k inicial	1		
<b>F objetivo</b>	<b>2</b>	desl. Exato	4

i	$\Delta F$	k (i-1)	$\Delta u (i-1)$	u (i)	k (i)	Fint (i)	Resíduo (i)	Resíduo [%]	$\Delta u (i)$	u (i+1)
1	2	1	2,0000	2,00000	0,707107	1,414214	0,58579	29,29%	0,82843	2,8284
2			2,8284	2,82843	0,594604	1,681793	0,31821	15,91%	0,53516	3,3636
3			3,3636	3,36359	0,545254	1,834008	0,16599	8,30%	0,30443	3,6680
4			3,6680	3,66802	0,522137	1,915207	0,08479	4,24%	0,16240	3,8304
5			3,8304	3,83041	0,510949	1,957144	0,04286	2,14%	0,08388	3,9143
6			3,9143	3,91429	0,505445	1,978456	0,02154	1,08%	0,04262	3,9569
7			3,9569	3,95691	0,502715	1,989199	0,01080	0,54%	0,02149	3,9784
8			3,9784	3,97840	0,501356	1,994592	0,00541	0,27%	0,01079	3,9892
9			3,9892	3,98918	0,500677	1,997294	0,00271	0,14%	0,00540	3,9946
10			3,9946	3,99459	0,500339	1,998647	0,00135	0,07%	0,00270	3,9973
11			3,9973	3,99729	0,500169	1,999323	0,00068	0,03%	0,00135	3,9986
12			3,9986	3,99865	0,500085	1,999662	0,00034	0,02%	0,00068	3,9993
13			3,9993	3,99932	0,500042	1,999831	0,00017	0,01%	0,00034	3,9997
14			3,9997	3,99966	0,500021	1,999915	0,00008	0,00%	0,00017	3,9998
15			3,9998	3,99983	0,500011	1,999958	0,00004	0,00%	0,00008	3,9999
16			3,9999	3,99992	0,500005	1,999979	0,00002	0,00%	0,00004	4,0000
17			4,0000	3,99996	0,500003	1,999989	0,00001	0,00%	0,00002	4,0000
18			4,0000	3,99998	0,500001	1,999995	0,00001	0,00%	0,00001	4,0000
19			4,0000	3,99999	0,500001	1,999997	0,00000	0,00%	0,00001	4,0000
20			4,0000	3,99999	0,5	1,999999	0,00000	0,00%	0,00000	4,0000

Resíduo < 0,1%



# FIM 14