Conjuntos e funções

Alguns termos e definições

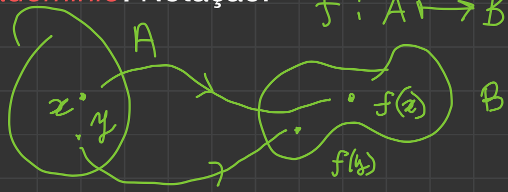
- A palavra *conjunto* é usada para designar uma coleção qq de objetos (lidaremos com conjuntos numéricos).
- Os objetos que constituem um conjunto são chamados *elementos* do conjunto.
- Usamos $x \in A$ para indicar que o elemento x 'pertence' ao conjunto A.
- Uma *propriedade* P caracteriza um conjunto A se todo o elemento de A satisfaz P. Reciprocamente, todo o elemento que satisfaz à propriedade P pertence ao conjunto. (Via de regra, um conjunto é dado através de propriedades que o caracterizam.)

Exemplo: $\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \overset{\text{tal que}}{:} x > 0 \}$

- Cada parte B de um conjunto A é chamado um *subconjunto* de A.
- $B \subset A$ se lê B 'contido em' A. $A \supset B$ se lê A 'contém' B.
- $A \cup B$ indica o conjunto dos elementos que estão em A ou em B.
- $A \cap B$ indica o conjunto dos elementos que estão simultaniamente em A e B. $A \setminus B$ indica o conjunto dos elementos que estão em A mas não em B.

Definição de função

Uma *função* f de um conjunto A em um conjunto B é uma *regra* que a cada elemento x de A associa um *único* elemento em B.
$f(x)$ é chamado o *valor* de f no elemento x. A é chamado *domínio* e B *contradomínio*. Notação: $f : A \to B$ $\quad$ $x \in A \rightsquigarrow f(x) \in B$



Exemplos:

Imagem $f = [0, +\infty) \subsetneq$ ||

1) $f(x) = x^2$ $\quad f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

$A = B = \mathbb{R}$

$0 < y = x^2$

2) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ $\quad \mathbb{R}$ $\quad \underline{x = \sqrt{y}}$

$A = B = \mathbb{R}^+$ $\quad B = \mathbb{R}$

3) $f(x) = -\sqrt{x}$ $\quad f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$

$A = \mathbb{R}^+ \quad B = \mathbb{R}$

4)
$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$$

$A = \mathbb{R} = B$

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

5)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

$A = B = \mathbb{R}$

(a função de Dirichlet)

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Recordamos que: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ números naturais

$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ números inteiros

$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z} \quad q \neq 0\}$

números racionais

$\mathbb{R}$ conj. dos números reais (a definir!).

OBS: Uma função não é necessariamente definida por uma fórmula algébrica.

Mais definições .. $f: A \mapsto B$

tal que

$$\text{Imagem de } f = \{ y \in B \,.\, \exists\, x \in A \text{ tq. } f(x) = y \}$$

existe

$$= \{ f(x) : x \in A \}$$

Veja que a imagem de f não é necessariamente igual a seu contradomínio.

Qdo Imagem $f = B$ dizemos que f é sobrejetiva, sobrejetora ou sobre.

Elementos distintos de A podem se associar ao mesmo valor em B ($f(x) = x^2$ satisfaz $f(-1) = f(1) = 1$).
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Uma função $f: A \mapsto B$ que leva elementos distintos de A em elementos distintos de B é chamada de injetiva, injetora ou 1-1.

f é 1-1 se $\forall\, x_1$ e x_2 em A distintos $\rightsquigarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se f é sobre e 1-1 dizemos que f é bijetora ou bijetiva.

Exemplos.

1) $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

não é injetiva $\quad f(-x) = f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall$ para todo

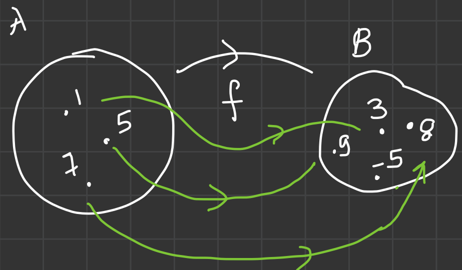
não é sobre $\quad \text{Imagem } f = [0, +\infty) \neq \mathbb{R}$

2) $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$ é injetiva e sobre

(i) $f(x_1) = f(x_2) \iff \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \iff x_1 = x_2$ já que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ $\therefore$ é 1-1

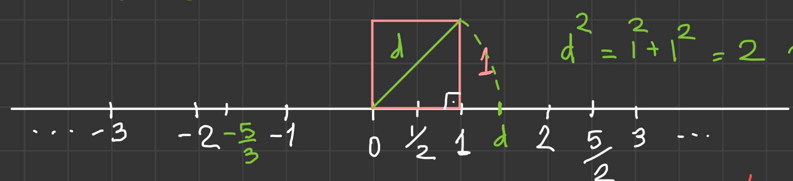
(ii) $y = \sqrt{x} \iff y^2 = x$ já que $x \in \mathbb{R}^+$. $\therefore$ é sobre

$y > 0$



$f: A \mapsto B$ é função

Interpretação geométrica nos números



$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \rightsquigarrow d = \sqrt{2}$

R $\quad \cancel{\mathbb{Q}}$

$\boxed{d \notin \mathbb{Q}}$ $\quad d \neq \frac{m}{n}$ $\quad m, n \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{ p/q : p, q \in \mathbb{Z} \;\; q \neq 0 \}$ $\quad p/q = \frac{r}{s} \iff ps = rq$

OBS: Note que existem pontos em R que não estão em $\mathbb{Q}$!
Usando o Teo. de Pitágoras vemos que $\sqrt{2} \in$ R
mas não pertence a $\mathbb{Q}$!

Com efeito. Suponha que $\exists \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ m, n primos entre si tq:

$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2$ ie $m^2 = 2n^2 \rightsquigarrow m$ é par.

$\therefore$ $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ e daí $4k^2 = 2n^2 \rightsquigarrow 2k^2 = n^2 \rightsquigarrow n$ é par

mas m e n são primos entre si!

Números Reais

Os números reais são caracterizados 10 axiomas

$\mathbb{R}$ com duas operações satisfazendo.

(i) soma $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x + y \in \mathbb{R}$

(ii) multiplicação $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \cdot y \in \mathbb{R}$

Axioma 1. $x + y = y + x$ $\quad xy = yx$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Comutativa

Axioma 2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $(xy)z = x(yz)$ $\quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

associatividade

Axioma 3 $x(y + z) = xy + xz$ $\quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

distributividade

Axioma 4 Identidade da adição e multiplicação

$\exists$ dois nº em $\mathbb{R}$ denotados por 0 e 1 tq.

$x + 0 = x \quad \forall x \qquad x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Axioma 5 Existência de negativos

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq } x + y = 0$

$\therefore y := -x$

Axioma 6 Existência de inversos multiplicativos

$\forall x \in \mathbb{R} / \{0\}, \quad \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq. } xy = 1$

$\therefore y = x^{-1} = \frac{1}{x}$

Axiomas associados às propriedades algébricas

1) Álgebra — 1-6
2) Ordem — 7-9
3) Completeza — 10

Propriedades: $a, b, c \in \mathbb{R}$

1) Se $a + b = a + c$ então $b = c$.
2) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ $\exists x \in \mathbb{R}$ tq. $a + x = b$.
3) $b - a = b + (-a)$
4) $-(-a) = a$
5) $a(b - c) = ab - ac$
6) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$