ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME Departamento de Engenharia Mecânica

PME3100 Mecânica I

Notas de aula

Estática -
Sistemas de Forças (parte 3)

Ronaldo de Breyne Salvagni
Agosto de 2021

PME3100 Mecânica I

2 – Estática

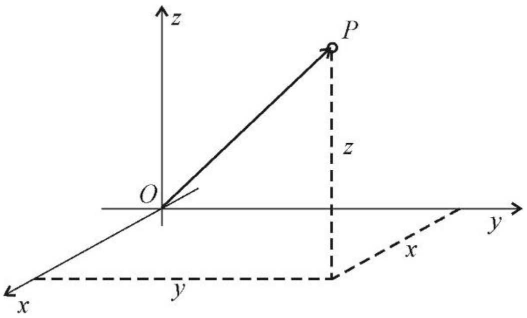
2.2 – VÍNCULOS

2.2.1 – Graus de liberdade

Vamos definir o "número de graus de liberdade de um sistema" como sendo o número de parâmetros independentes necessários para definir a posição ou configuração desse sistema.

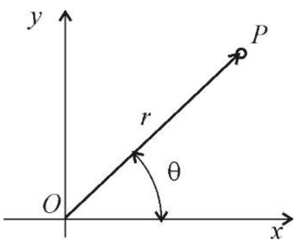
Por exemplo, se o sistema for constituído por um ponto, teremos:

NO ESPAÇO:



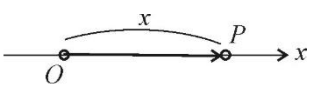
$P(x, y, z) \longrightarrow 3\ G.L.$

NO PLANO:



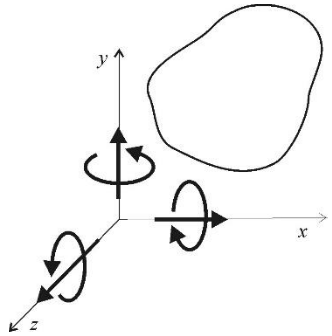
$P(x, y)$ ou $P(r, \theta) \longrightarrow 2\ G.L.$

NA RETA:

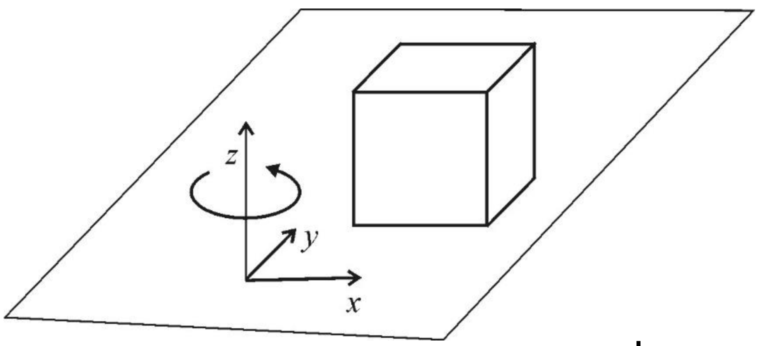


$P(x) \longrightarrow 1\ G.L.$

Para um corpo rígido, temos 6 graus de liberdade no espaço: 3 deslocamentos lineares e 3 rotações.



Para um cubo com uma face apoiada num plano, teremos:



deslocamento *x*	3 G.L.
deslocamento *y*	
rotação *z*	

2.2.2 – Vínculos – tipos de vínculos

Chamaremos de vínculos as restrições aos graus de liberdade. Por exemplo, o plano em que o cubo do exemplo anterior está apoiado é um vínculo daquele cubo, impedindo o deslocamento em *z* e rotações em torno de *x* e *y*, restringindo a 3 o número de graus de liberdade do cubo.

Em Estática, aos vínculos corresponderão forças que, conjuntamente com aquelas aplicadas, formarão um sistema equivalente a zero. As forças correspondentes aos vínculos são chamadas *forças reativas* ou *reações*; as demais, *forças ativas*.

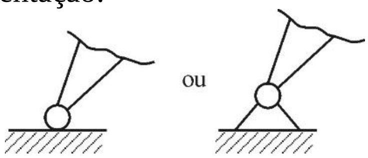
Tipos de vínculos: (são modelos físicos; sem atrito)

- ARTICULAÇÃO

Exemplos:

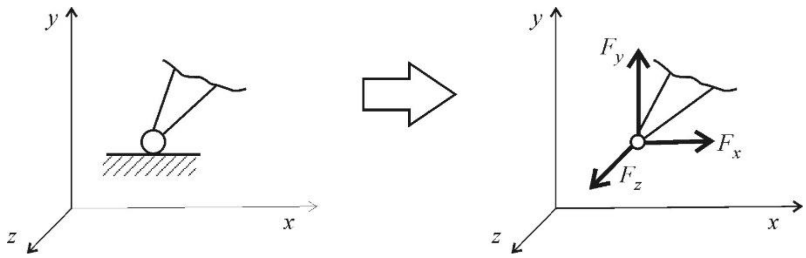
suporte de caneta   pêndulo de relógio (no plano)   antena de roteador

Representação:



Este tipo de vínculo, aplicado a um ponto, impede qualquer movimento deste, e apenas dele; o restante do corpo pode se mover.

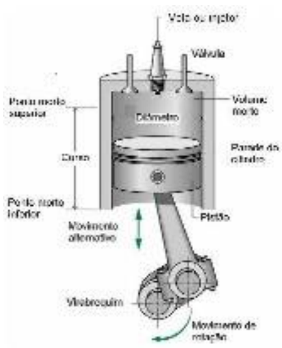
Fornece reação de qualquer intensidade, direção e sentido, correspondendo, portanto, a 3 incógnitas no espaço:



<u>- ANEL</u>

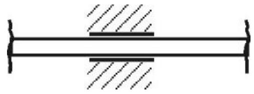
Exemplos:

- corpo de bomba para pneu de bicicleta



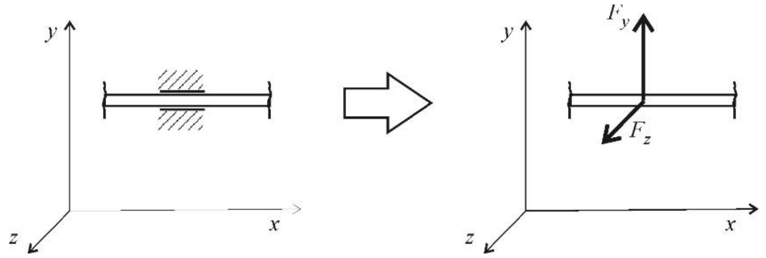
- cilindro de motor a combustão interna

Representação:



Impede movimento do ponto em qualquer direção ortogonal ao eixo.

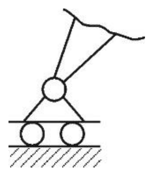
Fornece reação de qualquer intensidade e sentido em qualquer direção ortogonal ao eixo, correspondendo, portanto, a 2 incógnitas no espaço:



- APOIO SIMPLES (bilateral)

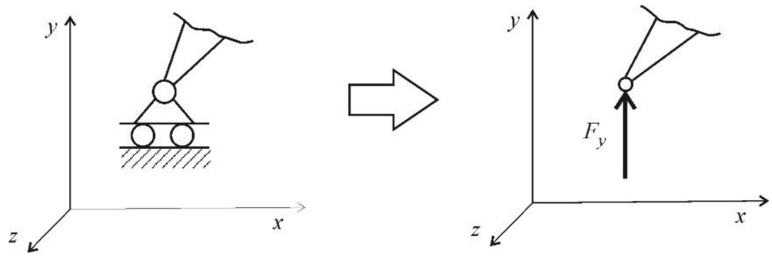
Exemplo: Pés de uma cadeira de escritório com rodinhas:

Representação:



Permite ao ponto mover-se apenas em um plano.

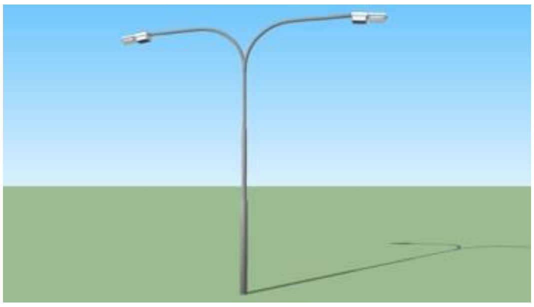
Fornece reação de qualquer intensidade e sentido na direção ortogonal ao plano, correspondendo, portanto, a 1 incógnita:



Observação: este apoio (bilateral) impede também que o ponto se "descole" do plano; existe o "apoio simples unilateral" que não tem esse efeito, ou seja, fornece reação de apenas um sentido, e tem a mesma representação gráfica que o bilateral. Assim, quando o apoio for unilateral, isso deverá ser expressamente mencionado no enunciado do problema; se nada for dito, será considerado sempre bilateral.

- <u>ENGASTAMENTO ou ENGASTE</u>

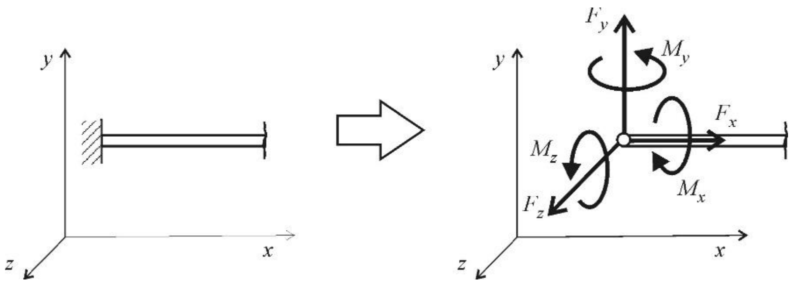
Exemplo: poste



Representação:

Impede o movimento do ponto e do sistema adjacente.

Fornece um binário e uma força, correspondendo a 6 incógnitas no espaço:



2.3 – PROBLEMAS DE ESTÁTICA

Nos problemas de Estática, normalmente é dado um sistema de corpos rígidos submetido a forças ativas, e deseja-se determinar eventuais posições de equilíbrio e/ou certo número de forças de contato (reações).

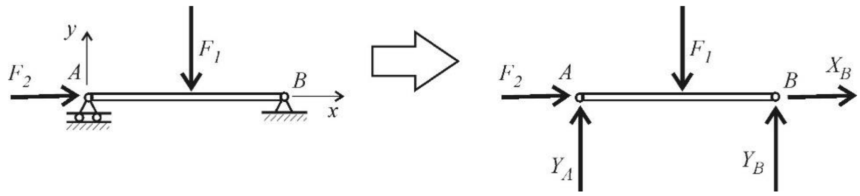
Isto é feito através da aplicação das equações universais de equilíbrio (modelo matemático):

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases}$$

Podemos classificar os problemas de Estática em três tipos:

1 – Quando as forças de contato (incógnitas) podem ser perfeitamente determinadas pelas equações de equilíbrio da Estática, diz-se que o sistema é <u>estaticamente determinado</u> ou <u>*isostático*</u>.

Exemplo 1:



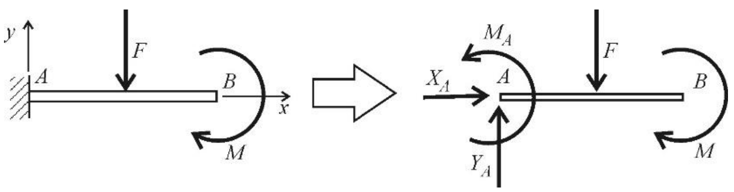
$$\text{Equações:} \begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Como a estrutura e o carregamento são planos, $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$ e $\sum M_y = 0$ são identicamente satisfeitos, e restam apenas 3 equações:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

O número de incógnitas também é 3: Y_A, Y_B e X_B.

Exemplo 2:

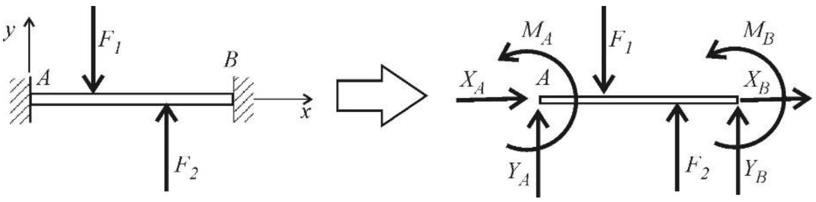


$$\text{Equações:} \begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{problema \\ plano}} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \ \underline{\text{3 equações}}$$

3 incógnitas: X_A, Y_A e M_A.

2 – Quando o número de incógnitas é maior que o número de equações, o sistema é <u>estaticamente indeterminado</u> ou *<u>hiperestático</u>* (a abordagem deve ser feita pelo estudo das deformações, assunto da Resistência dos Materiais).

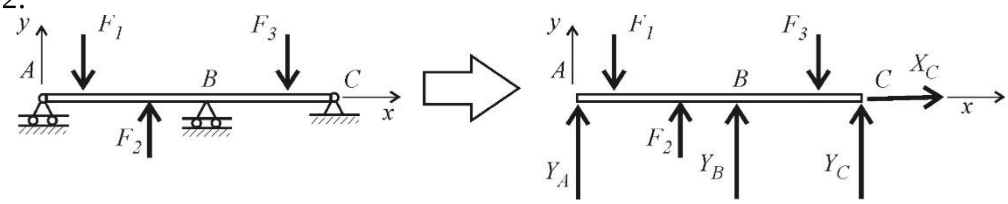
Exemplo 1:



$$\text{Equações: } \begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{problema \\ plano}} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \underline{\text{3 equações}}$$

6 incógnitas: X_A, Y_A, M_A, X_B, Y_B e M_B.

Exemplo 2:

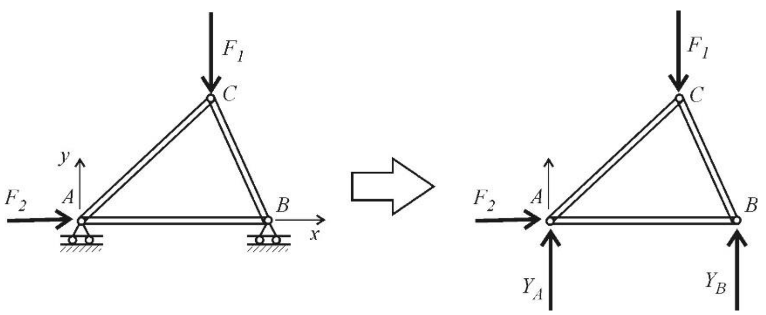


$$\text{Equações: } \begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{problema \\ plano}} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \underline{\text{3 equações}}$$

4 incógnitas: Y_A, Y_B, Y_C e X_C.

3 – Se o número de incógnitas é inferior ao de equações, o equilíbrio só é possível em determinados casos, e o sistema é *<u>hipostático</u>*.

Exemplo:



$$\text{Equações: } \begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{problema \\ plano}} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \underline{\text{3 equações}}$$

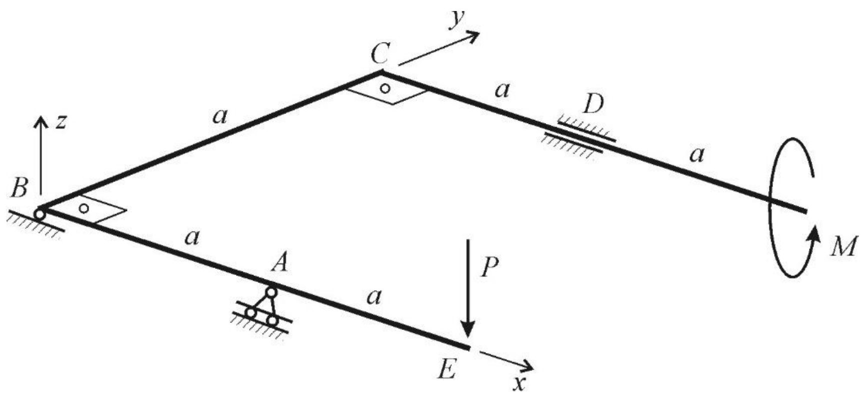
2 incógnitas: Y_A e Y_B.

No caso, o equilíbrio só é possível se $F_2 = 0$.

2.4 – ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS

Os diversos modos de resolução em vários tipos de estruturas isostáticas serão abordados através do estudo de uma série de problemas.

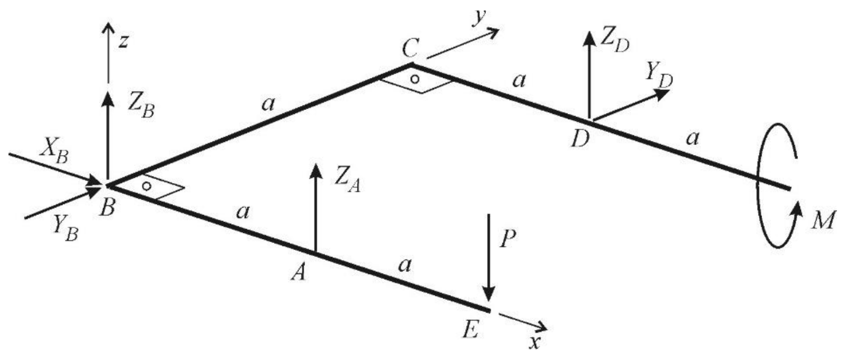
<u>Exemplo 2.4.1:</u> A barra da figura está vinculada por um anel no ponto *D*, uma articulação no ponto *B* e por um apoio simples no ponto *A*. Determine as reações externas em função do momento *M* e da força *P*.



(NÃO COLOCAR SETAS NEM SINAIS NOS NOMES DOS VETORES)

Resolução:

<u>1º PASSO</u>: substituir os vínculos pelos esforços correspondentes (fazer o *diagrama de corpo livre* ou *diagrama de forças*)



(DESENHAR NOVAMENTE **<u>SEM</u>** OS VÍNCULOS)

(SENTIDOS ARBITRÁRIOS)

6 incógnitas.

<u>2º PASSO</u>: montar as equações de equilíbrio (ver procedimento alternativo no final):

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\sum \vec{M}_O = \vec{0}$$

Cada uma das equações vetoriais acima fornece 3 equações escalares:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_B = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

Montando as equações:

$\sum F_x = 0$:

$\boxed{X_B = 0}$ .... (1)

$\sum F_y = 0$:

$Y_B + Y_D = 0$ .... (2)

$\sum F_z = 0$:

$Z_B + Z_A + Z_D + P = 0$ .... (3)

$\sum M_x = 0$:

$Z_D \cdot a + M = 0$ .... (4)

$\sum M_y = 0$:

$P \cdot 2a - Z_A \cdot a - Z_D \cdot a = 0$ .... (5)

$\sum M_z = 0$:

$Y_D \cdot a = 0$ .... (6)

Temos, assim, 6 equações envolvendo as 6 incógnitas procuradas.

<u>3º PASSO</u>: resolver o sistema de equações:

De (1): $\boxed{X_B = 0}$

De (2): $\boxed{Y_D = 0}$

Substituindo Y_D em (2): $\boxed{Y_B = 0}$

De (4): $\boxed{Z_D = -\frac{M}{a}}$ (SENTIDO CONTRÁRIO AO MOSTRADO NA FIGURA)

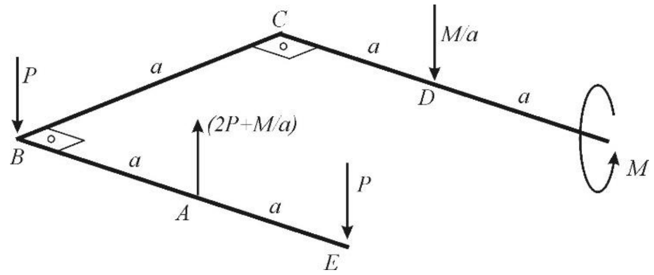
Substituindo z_D em (5):

$$2aP - aZ_A - \left(-\frac{M}{a}\right)a = 0 \Rightarrow \boxed{Z_A = 2P + \frac{M}{a}}$$

Substituindo z_A e z_D em (3):

$$Z_B + \left(2P + \frac{M}{a}\right) + \left(-\frac{M}{a}\right) - P = 0 \Rightarrow \boxed{Z_B = -P}$$

<u>4º PASSO</u>: verificar e apresentar a solução do problema:



(NÃO COLOCAR SETAS NEM SINAIS NOS NOMES DOS VETORES)

ATENÇÃO: nos desenhos feitos durante a resolução, <u>não mudar</u> os sentidos das incógnitas adotados inicialmente.

Procedimento alternativo para o <u>**2º PASSO**</u>: montagem das equações de equilíbrio

Forças:

$$\vec{R}_A = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + Z_A\vec{k};\ (\vec{R}_A, A)$$
$$\vec{R}_B = X_B\vec{\imath} + Y_B\vec{\jmath} + Z_B\vec{k};\ (\vec{R}_B, B)$$
$$\vec{R}_D = 0\vec{\imath} + Y_D\vec{\jmath} + Z_D\vec{k};\ (\vec{R}_D, D)$$
$$\vec{P} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - P\vec{k};\ (\vec{P}, E)$$

Binário: $M\vec{\imath}$

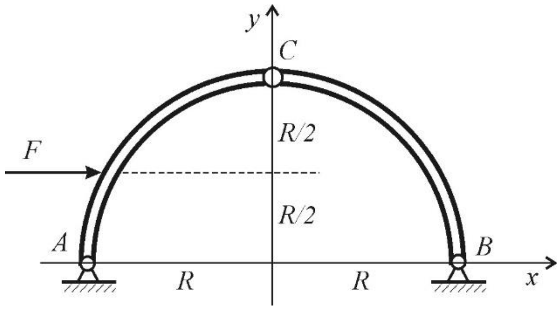
Condições de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_D + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow$$
$$X_B\vec{\imath} + (Y_B + Y_D)\vec{\jmath} + (Z_A + Z_B + Z_D - P)\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} X_B = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ Y_B + Y_D = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ Z_A + Z_B + Z_D - P = 0 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_B = \vec{0} \Rightarrow (A - B) \wedge \vec{R}_A + (B - B) \wedge \vec{R}_B + (D - B) \wedge \vec{R}_D + (E - B) \wedge \vec{P} + M\vec{\imath} = \vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & Y_D & Z_D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} + M\vec{\imath} = \vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (aZ_D + M)\vec{\imath} + (-aZ_A - aZ_D + 2aP)\vec{\jmath} + (aY_D)\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aZ_D + M = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ -aZ_A - aZ_D + 2aP = 0 \ldots\ldots\ldots (5) \\ aY_D = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6) \end{cases}$$

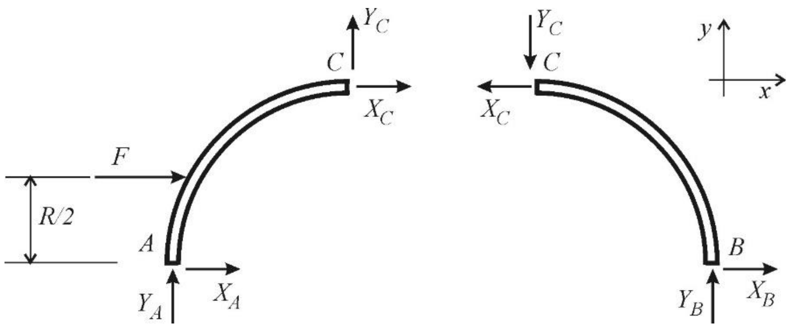
<u>Exemplo 2.4.2:</u> Determine as reações externas e as forças que atuam em cada barra do sistema de barras da figura, admitindo que as barras tenham peso desprezível.



Resolução:

- Isolando cada barra (substituindo os vínculos de cada barra pelos esforços correspondentes):

<u>ATENÇÃO AO PRINCÍPIO DA AÇÃO E REAÇÃO!</u>



Temos, assim, 6 incógnitas.

- Montando as equações de equilíbrio de cada barra:

<u>Barra AC</u>:

$\sum \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{0}$: $F + X_A + X_C = 0$ .... (1)

$\sum \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{0}$: $Y_A + Y_C = 0$ .... (2)

$\sum \boldsymbol{M_A} = \boldsymbol{0}$: $-F \cdot \frac{R}{2} - X_C \cdot R + Y_C \cdot R = 0$ .... (3)

<u>Barra BC</u>:

$\sum \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{0}$: $-X_C + X_B = 0$ .... (4)

$\sum \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{0}$: $-Y_C + Y_B = 0$ .... (5)

$\sum \boldsymbol{M_B} = \boldsymbol{0}$: $X_C \cdot R + Y_C \cdot R = 0$ .... (6)

Temos 6 equações envolvendo as 6 incógnitas.

- Resolução das equações:

De (6): $X_C = -Y_C$

Substituindo em (3): $\boxed{Y_C = F/4}$

Substituindo Y_C em (6): $\boxed{X_C = -F/4}$

Substituindo X_C em (4): $\boxed{X_B = -F/4}$

Substituindo Y_C em (5): $\boxed{Y_B = F/4}$

Substituindo X_C em (1): $\boxed{X_A = -3F/4}$

Substituindo Y_C em (2): $\boxed{Y_A = -F/4}$

- Solução: