



Revisão de Alguns Conceitos Básicos da Física Experimental

Marcelo Gameiro Munhoz

munhoz@if.usp.br

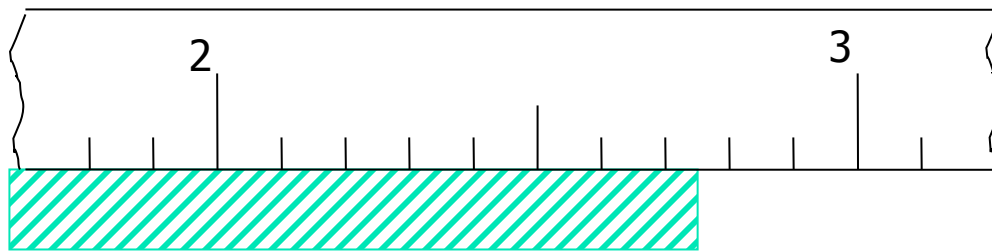
Lab. Pelletron, sala 245, r. 6940



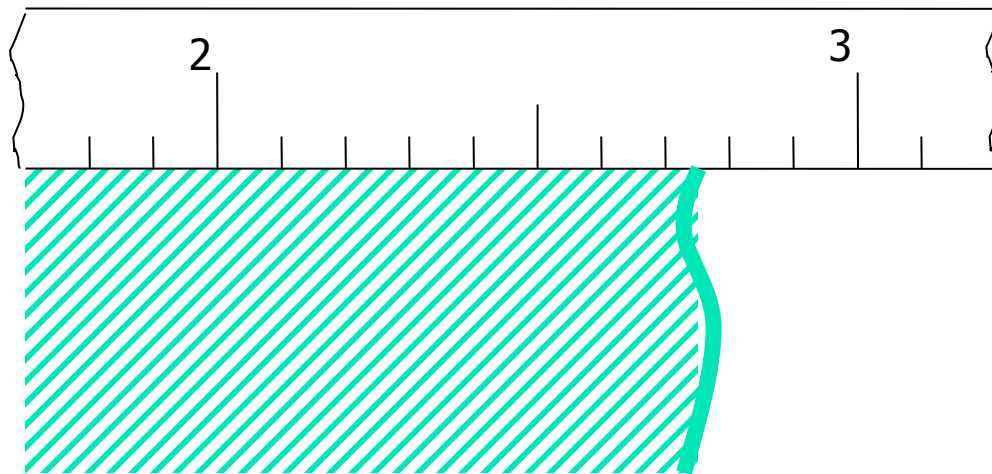
O que é uma medida?

- Medir significa quantificar uma grandeza com relação a algum padrão tomado como unidade;
- Por exemplo, ao medir o tamanho de um objeto com uma régua, estamos comparando a marcação **calibrada** da régua com o objeto sendo medido.

Uma medida pode ser feita sem deixar dúvidas?



Por exemplo,
medida da
largura da folha
de sulfite



Por exemplo,
medida da
espessura da
mesa



O que isso significa?

- A cada medida repetida, ou cada experimentador diferente que realizar a medida ou cada instrumento diferente que usarmos, o resultado da medida pode ser **diferente** !
- Mas, o que isso significa?



Conceitos envolvidos em uma medida experimental

- Supondo que existe um **valor verdadeiro** associado à grandeza que está sendo medida, **nunca** iremos obter esse valor em nossas medições.
- Isso ocorre devido a características da própria grandeza sendo medida ou limitações intrínsecas e inevitáveis dos nossos instrumentos e técnicas de medida.



Conceitos envolvidos em uma medida experimental

Definindo:

- **Erro** = *valor verdadeiro - valor medido*
pode-se afirmar que **toda medida experimental apresenta um erro**, que precisa ser estimado e compreendido.
- **Incerteza** = *estimativa estatística do valor do erro*
- Portanto:

Uma medida **sempre** terá uma **incerteza.**



Como representar uma medida?

- Toda medida deve ser representada com sua incerteza:

(Valor \pm incerteza)

onde:

- a incerteza terá apenas um ou dois algarismos significativos. **Por que?**
- a incerteza determina o número de algarismos significativos do valor medido da grandeza. **Como?**

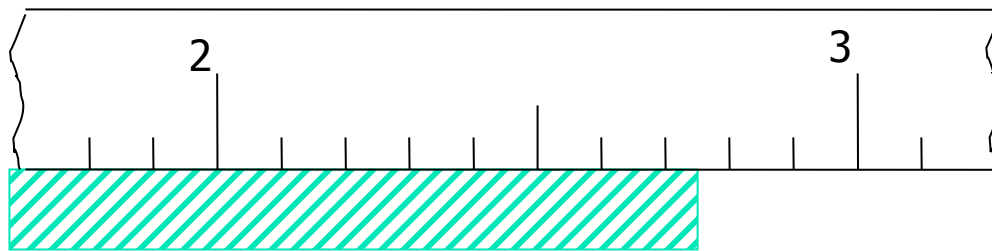


Algarismos significativos

- Regra geral:
 - Só faz sentido colocar **um ou dois algarismos significativos** na incerteza.
 - E a incerteza **é que determina** o número de algarismos significativos da medida.
 - Forma correta: $(2,74 \pm 0,05)$ cm



Por que temos dúvidas sobre o valor desta medida?



- Se eu repetir várias vezes esta medida, devo encontrar valores diferentes?
- Provavelmente, NÃO.
- Porém, quanto podemos confiar na marcação da régua? Ela é "perfeita"? Qual seria uma boa estimativa para sua "imperfeição"?



Incerteza instrumental

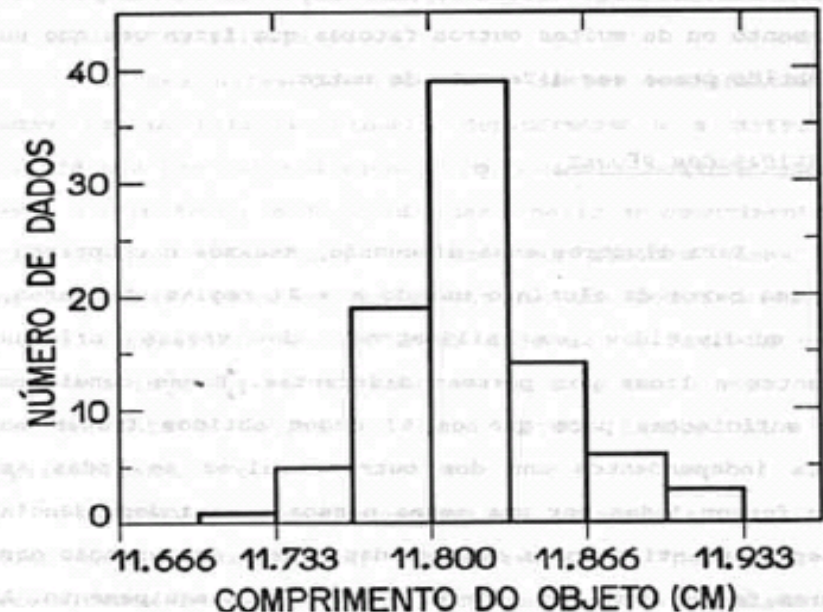
- Quando a menor divisão do meu equipamento de medida é muito maior do que a definição da grandeza que estou medindo (por exemplo, largura e espessura da folha sulfite), a incerteza da medida reside na incerteza do equipamento.
- Qual é uma boa **estimativa** para a incerteza do equipamento?

Incerteza = Metade da menor divisão

- Por que usar essa fórmula? Quais os fatores que determinam a incerteza instrumental?

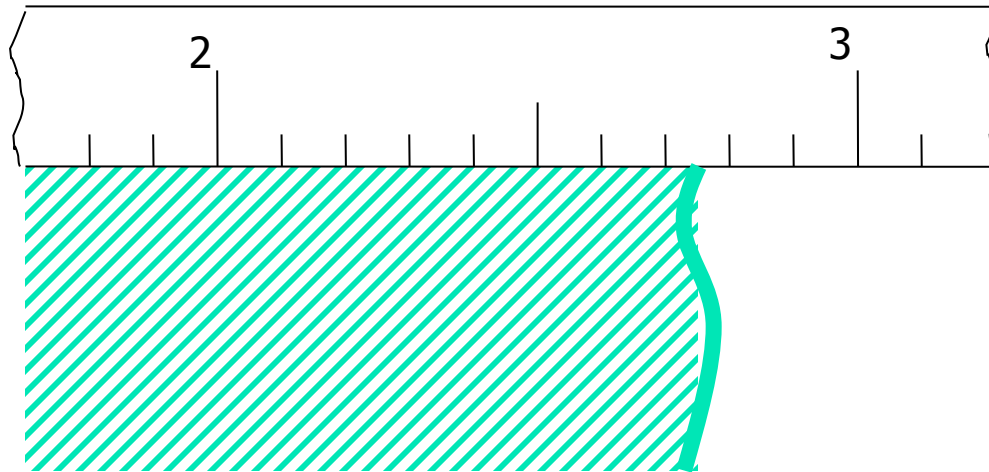
Incerteza instrumental

- A incerteza instrumental tem origem na fabricação e qualidade do instrumento.
- Sua avaliação também é **estatística**.



Média = 11,814 cm
Desvio padrão = 0,039 cm

Por que temos dúvidas sobre o valor desta medida?



- Se eu repetir várias vezes esta medida, devo encontrar valores diferentes?
- Provavelmente, SIM.
- Como estimar a incerteza neste caso?



Incerteza Estatística

- Quando a menor divisão do equipamento é muito menor que variações na medida devido a dificuldade de se definir a própria grandeza que estamos medindo (por exemplo, altura da mesa) ou limitações no procedimento experimental, a incerteza deve ser determinada a partir de várias medidas da grandeza.
- A variação nas medidas deve refletir a incerteza intrínseca da própria grandeza e/ou do procedimento experimental usado.



Incerteza Estatística

- **Erros Estatísticos ou Aleatórios:**
 - Resultam de variações aleatórias no resultado da medição devido a fatores que não podem ser controlados;
 - A estimativa desse erro é chamada de **incerteza estatística**;
 - Essa incerteza é obtida por métodos estatísticos, como o desvio padrão da média.



Incerteza Estatística

- Se o resultado experimental varia a cada nova medida, como representá-lo?
- **Quantitativamente**, precisamos:
 - do valor que representa o resultado da medida e
 - da incerteza da medida.
- Como calcular esses valores a partir de um conjunto de medidas?



Incerteza Estatística

- Se o resultado experimental varia a cada nova medida, como representá-lo?
- Quantitativamente:
 - Resultado da medida → Média:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

onde N medidas x_i foram realizadas



Incerteza Estatística

- Quantitativamente:
 - Incerteza → Flutuação dos dados

Desvio Padrão:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

onde N medidas x_i foram realizadas

- Representa a “média” do módulo da diferença entre as medidas e a média das medidas.



Incerteza Estatística

- Mas, ao aumentar o número de medidas, nosso resultado não deveria ser melhor? Será que o desvio padrão é a incerteza da medida?

- Incerteza da média – **Desvio Padrão da Média:**

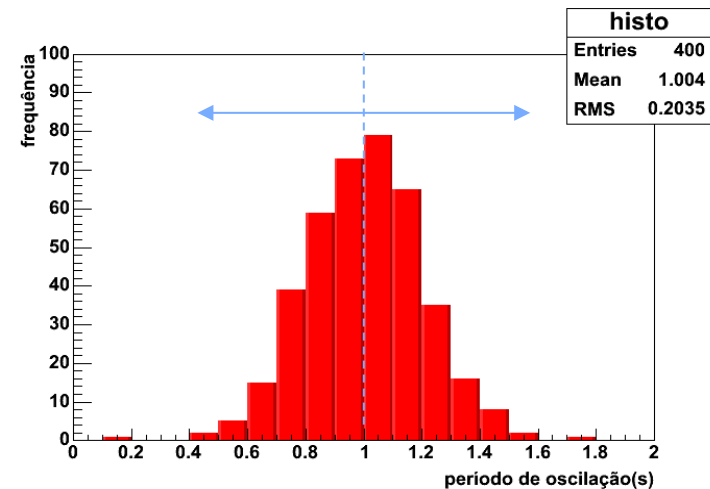
$$S_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

onde N medidas x_i foram realizadas

Erros Estatísticos ou Aleatórios

- Inicialmente, que características devemos esperar para a **distribuição** dos dados obtidos?

- Simétrica em torno de um certo valor, e decresce ao se afastar desse valor.





Incerteza Instrumental e Estatística

- Medida do período de oscilação do pêndulo usando um relógio analógico;
- Neste caso, todas as medidas (ou quase todas) resultaram no mesmo valor. Por quê?
- Isso ocorre pois a precisão do equipamento de medida (1 s) é maior que as flutuações dos dados ($\sim 0,2\text{ s}$).
- Portanto, neste caso, devemos usar a incerteza instrumental ($0,5\text{ s}$).



Incertezas Instrumental e Estatística

- E se as incertezas instrumental e estatística tiverem valores próximos, qual das duas devemos considerar?
- Por exemplo, na medida do período de oscilação do pêndulo com o relógio analógico:
incerteza relógio ($s_{instrumental}$) = 0,5 s ;
incerteza estatística ($s_{estatístico}$) .
- Nesse caso, combinamos as duas com uma soma quadrática:

$$s = \sqrt{(s_{estatístico})^2 + (s_{instrumental})^2}$$

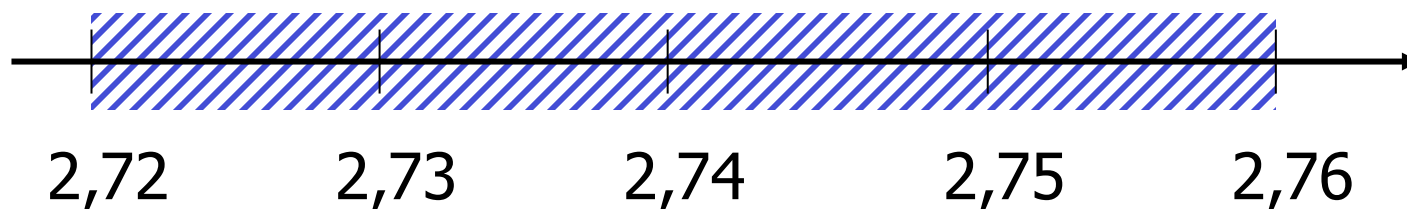


Incertezas Sistemáticas

- Incertezas sistemáticas são aquelas que, ao invés de causar uma flutuação nos dados, elas alteram os dados **sempre para a mesma direção;**
- Por exemplo, se o zero do micrômetro estiver deslocado de 0,5 mm, todas as suas medidas estarão 0,5 mm maior;
- Incertezas sistemáticas, quando encontradas, podem ser usadas para corrigir os dados.

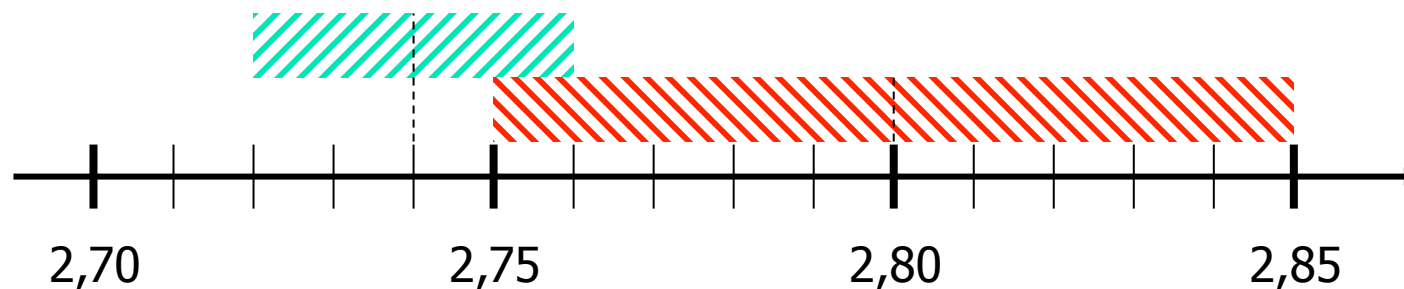
Como interpretar o significado da incerteza?

- O que significa dizer que minha medida, é $2,74 \pm 0,02$ mm?
- Eu tenho **confiança** que o valor verdadeiro da grandeza medida está entre $(2,74 - 0,02)$ e $(2,74 + 0,02)$:

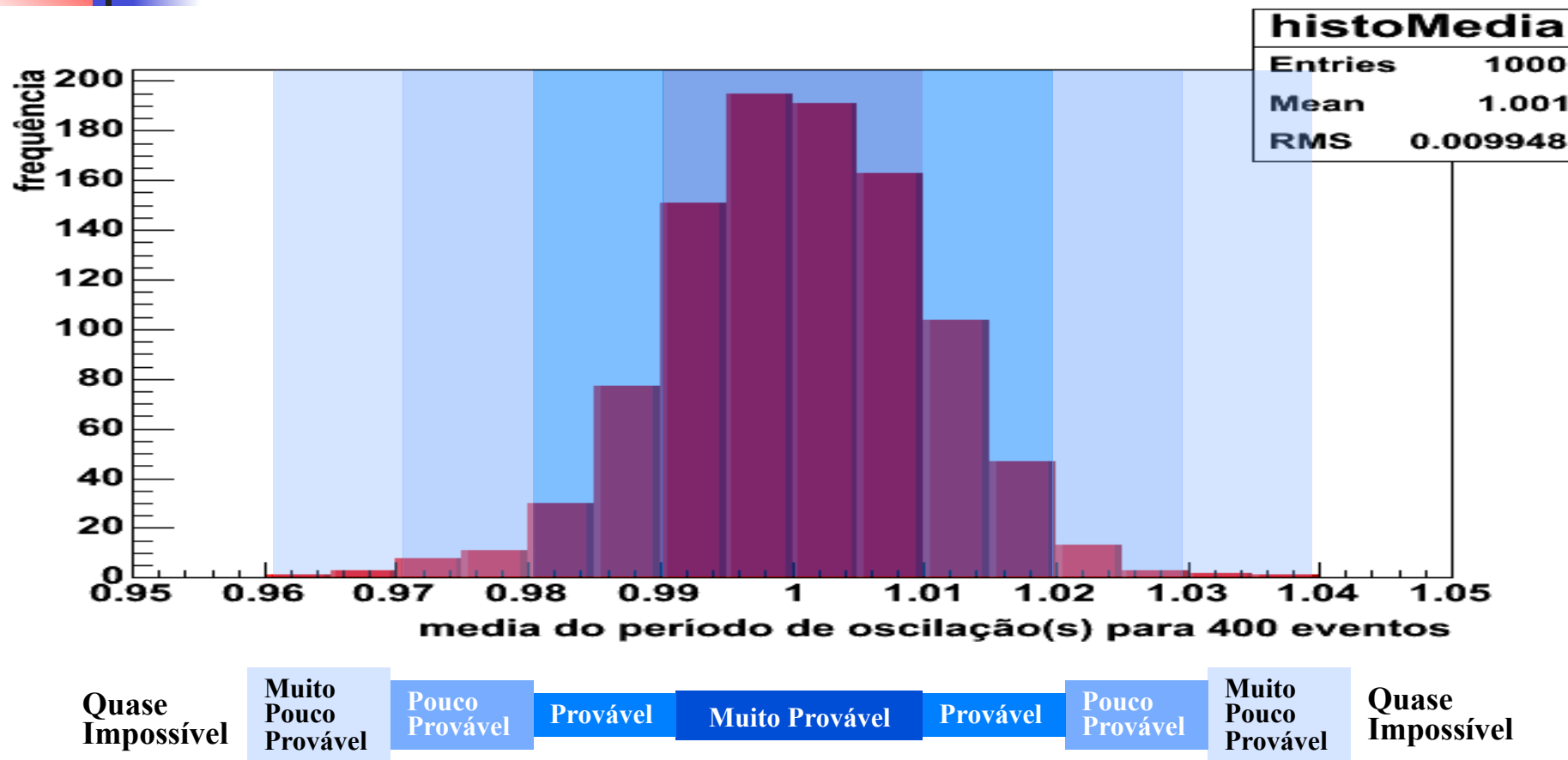


Como comparar os resultados de duas medidas?

- É preciso se levar em consideração **sempre** a incerteza de medida.
- Como devemos considerar a incerteza, nos perguntamos se as medidas são **compatíveis** ao invés de "iguais";
- Por exemplo, $2,74 \pm 0,02 \text{ mm}$ é compatível com $2,80 \pm 0,05 \text{ mm}$?



Média (Valor da Medida) e Desvio Padrão da Média (Incerteza)

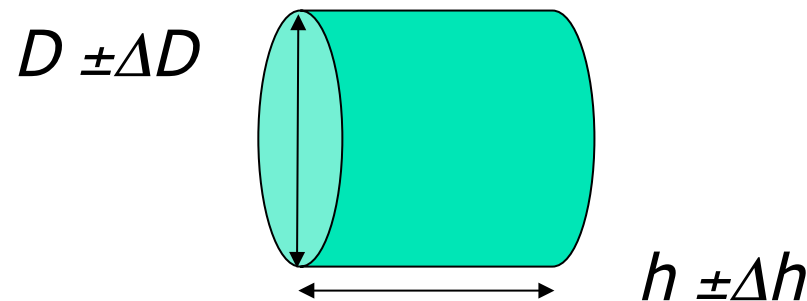


Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

- SIM !!!
- A incerteza de uma medida (neste caso, a incerteza na aresta do cubo) se **propaga** para as medidas obtidas da mesma (o volume do cubo).
- O volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi (D/2)^2 h$$

onde, D é o diâmetro do cilindro e h a sua altura.



Propagação de incerteza

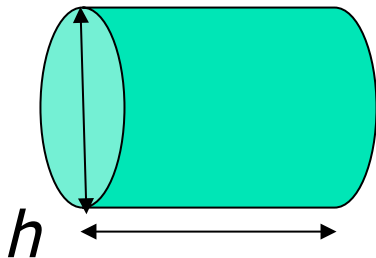
- Neste caso iremos calcular a incerteza no volume **devido** a incerteza no raio e a incerteza no volume **devido** a incerteza na altura e depois **combinar** as duas incertezas.
- Incerteza no volume devido a incerteza no raio:

$$V_{max} \text{ (devido a } \Delta D) = \pi[(D+\Delta D)/2]^2 h$$

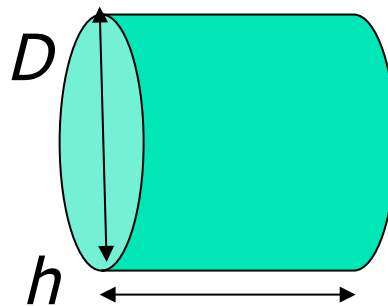
$$V_{min} \text{ (devido a } \Delta D) = \pi[(D-\Delta D)/2]^2 h$$

$$\Delta V \text{ devido a } \Delta D = (V_{max} - V_{min})/2$$

$D-\Delta D$

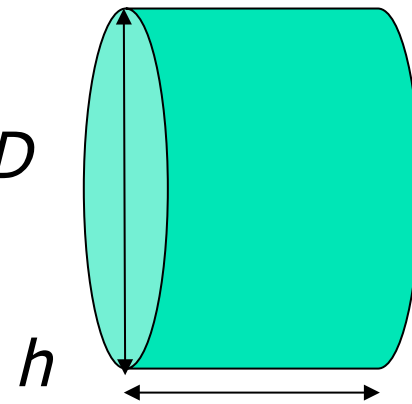


26-02-2013



Revisão

$D+\Delta D$



27

Propagação de incertezas

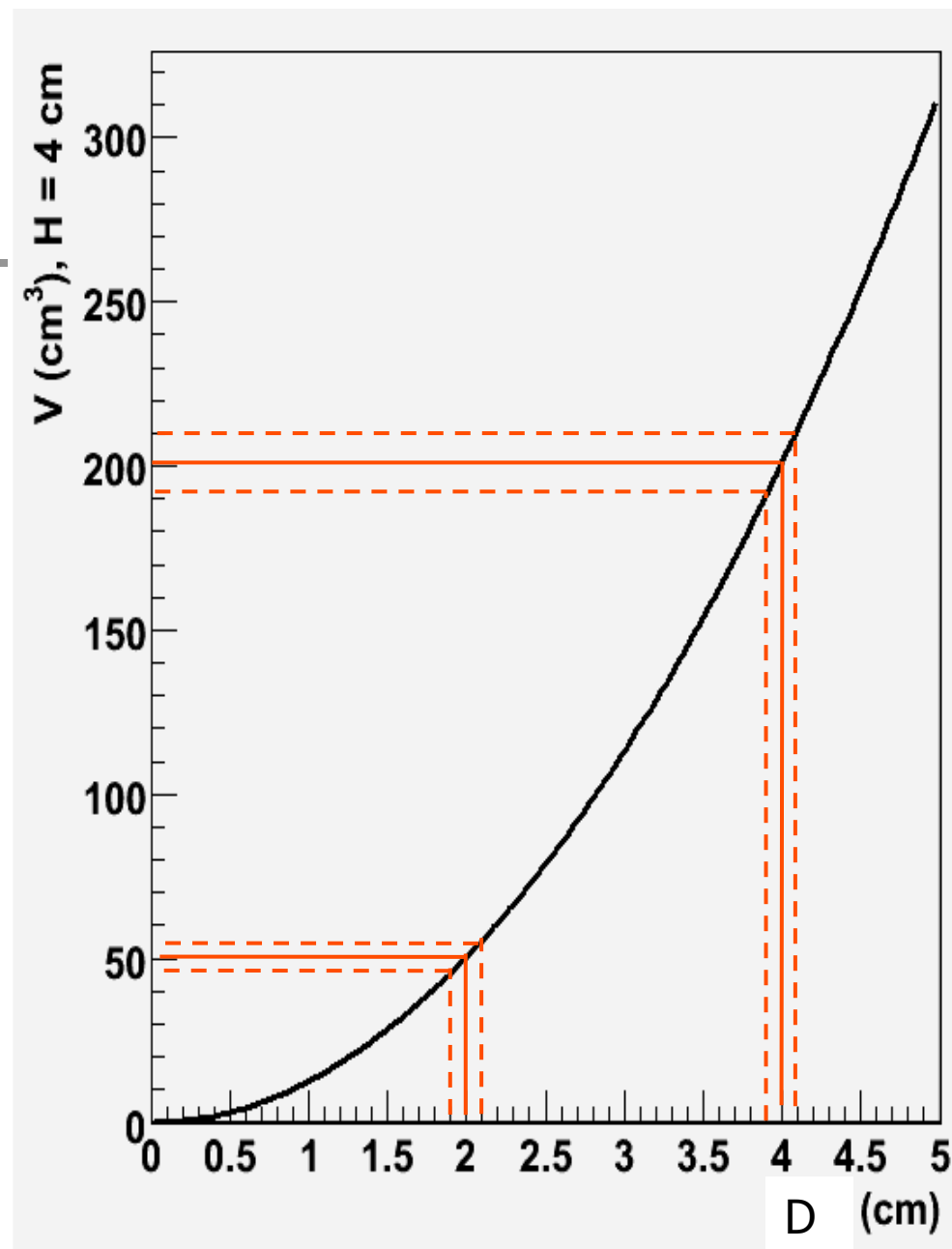
- Partindo da dependência do volume de um cilindro com o diâmetro:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h$$

é fácil perceber que:

$$s_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \cdot s_D$$

26-02-2013





Propagação de incerteza

Alguma semelhança entre as duas expressões abaixo?

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x') - f(x - \Delta x')}{2 \cdot \Delta x'} \right)$$

$$s_V^D = \left[\frac{V(D + s_D) - V(D - s_D)}{2} \right] \cdot \frac{s_D}{s_D}$$

$$s_V^D = \left[\frac{V(D + s_D) - V(D - s_D)}{2 \cdot s_D} \right] \cdot s_D \Rightarrow s_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \cdot s_D$$

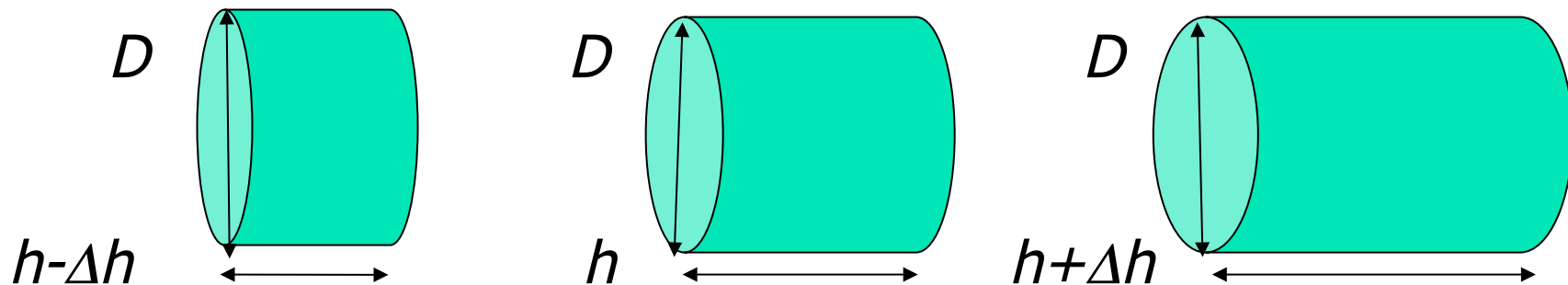
Propagação de incerteza

- Neste caso iremos calcular a incerteza no volume **devido** a incerteza no raio e a incerteza no volume **devido** a incerteza na altura e depois **combinar** as duas incertezas.
- Incerteza no volume devido a incerteza na altura:

$$V_{max} \text{ (devido a } \Delta h) = \pi(D/2)^2(h+\Delta h)$$

$$V_{min} \text{ (devido a } \Delta h) = \pi(D/2)^2(h-\Delta h)$$

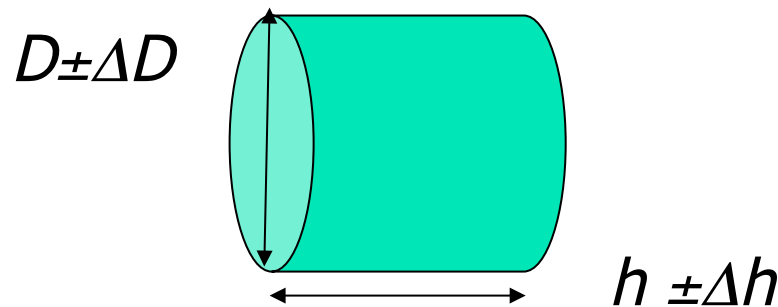
$$\Delta V_{\text{ devido a } \Delta h} = (V_{max} - V_{min})/2$$



Propagação de incerteza

- E combinamos as duas incertezas **com uma soma quadrática**. Fazemos isso pois assumimos que a incerteza devido ao diâmetro é **independente** da incerteza devido à altura:

$$\Delta V^2 = (\Delta V_{\text{devido a } \Delta D})^2 + (\Delta V_{\text{devido a } \Delta h})^2$$





Propagação de incerteza

- A incerteza do volume do cilindro (s_V) é dada pela **propagação** das incertezas do diâmetro (s_V^D) e da altura (s_V^h), ou seja, a incerteza em V devido a incerteza em D e a incerteza em V devido a incerteza em h :

$$s_V = \sqrt{\left(s_V^D\right)^2 + \left(s_V^h\right)^2}$$

- E como calcular s_V^D e s_V^h ?



Propagação de incerteza

$$s_V^h = \left[\frac{V(h + s_h) - V(h - s_h)}{2 \cdot s_h} \right] \cdot s_h \Rightarrow s_V^h = \frac{\partial V}{\partial h} \cdot s_h$$

$$s_V^D = \left[\frac{V(D + s_D) - V(D - s_D)}{2 \cdot s_D} \right] \cdot s_D \Rightarrow s_V^D = \frac{\partial V}{\partial D} \cdot s_D$$

Portanto:

$$s_V = \sqrt{\left(s_V^D\right)^2 + \left(s_V^h\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \cdot s_D^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \cdot s_h^2}$$



Propagação de incerteza

- Expressão geral:
- Dada uma grandeza f que depende de outras grandezas x, y, \dots, z , tem-se que:

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot s_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot s_z^2}$$



Representação Gráfica

- A representação gráfica de dados é uma ferramenta muito poderosa durante a análise de um experimento
- Vamos tomar como exemplo o estudo de um corpo em queda livre.
- Medimos a posição em função do tempo, obtendo a velocidade do objeto em queda em função do tempo.

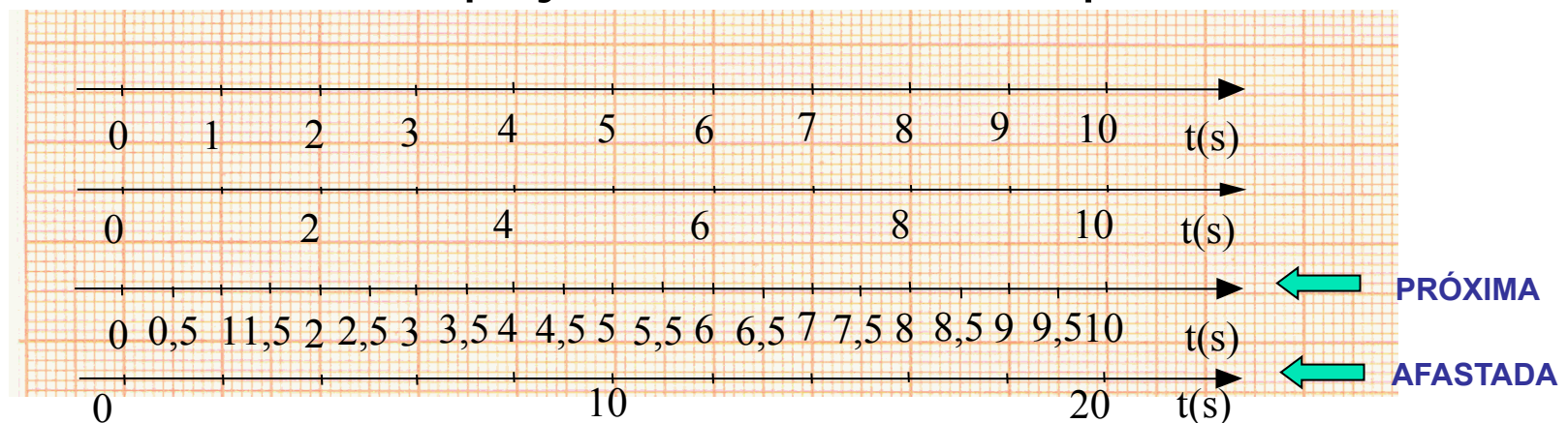


Representação Gráfica

- Representaremos graficamente a velocidade (eixo-y ou variável dependente) em função do tempo (eixo-x ou variável independente).
- Não se esqueça ao fazer o gráfico de:
 - Escolher uma escala adequada para os eixos, isto é, a relação entre *segundos* (no caso do eixo-x) ou *cm/s* (no caso do eixo-y) e os centímetros do papel devem facilitar a leitura do gráfico;
 - Não esquecer de colocar legenda e unidade nos eixos;
 - Represente a incerteza na velocidade (como?).

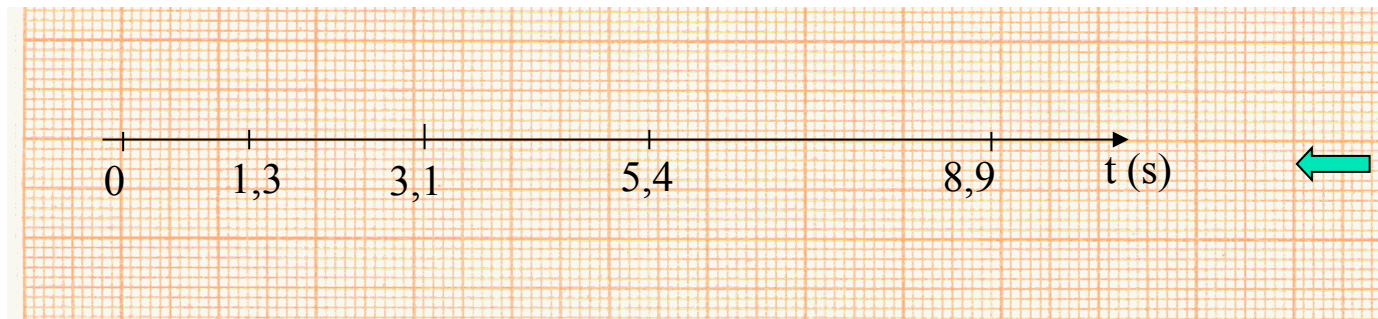
Eixos em um gráfico

- Deve-se escolher a escala que melhor se adapte ao tamanho do papel utilizado
 - **IMPORTANTE: Não use escalas difíceis de se compreender. Sempre utilize escalas "múltiplas" de 1, 2 ou 5**
- Gradue os eixos de 1 em 1 cm (ou 2 em 2). **Evite** escalas muito espaçadas ou muito comprimidas



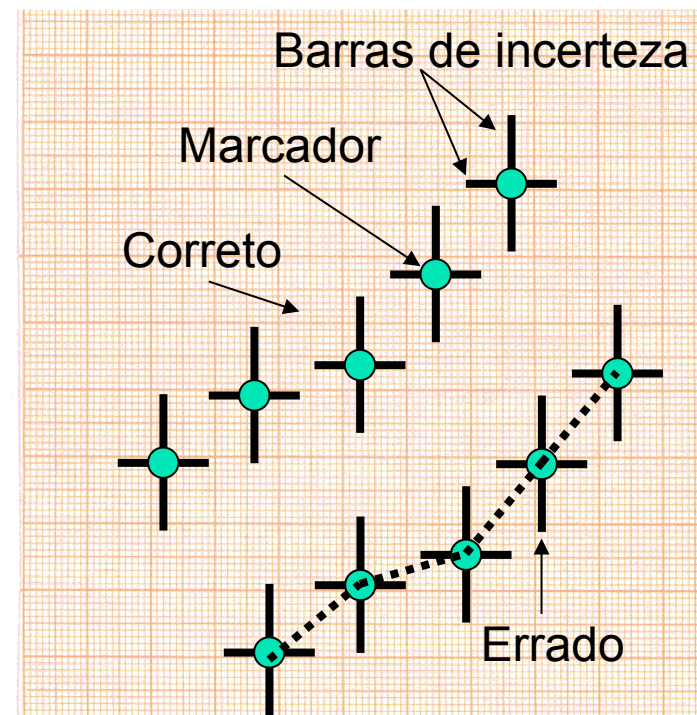
Eixos em um gráfico

- Desenhe os eixos. Não utilize os eixos e escalas pré-desenhadas no papel
- Coloque legendas em cada um dos eixos
- **NUNCA escreva os valores dos pontos nos eixos nem desenhe traços indicando os pontos**



Representação dos pontos no gráfico

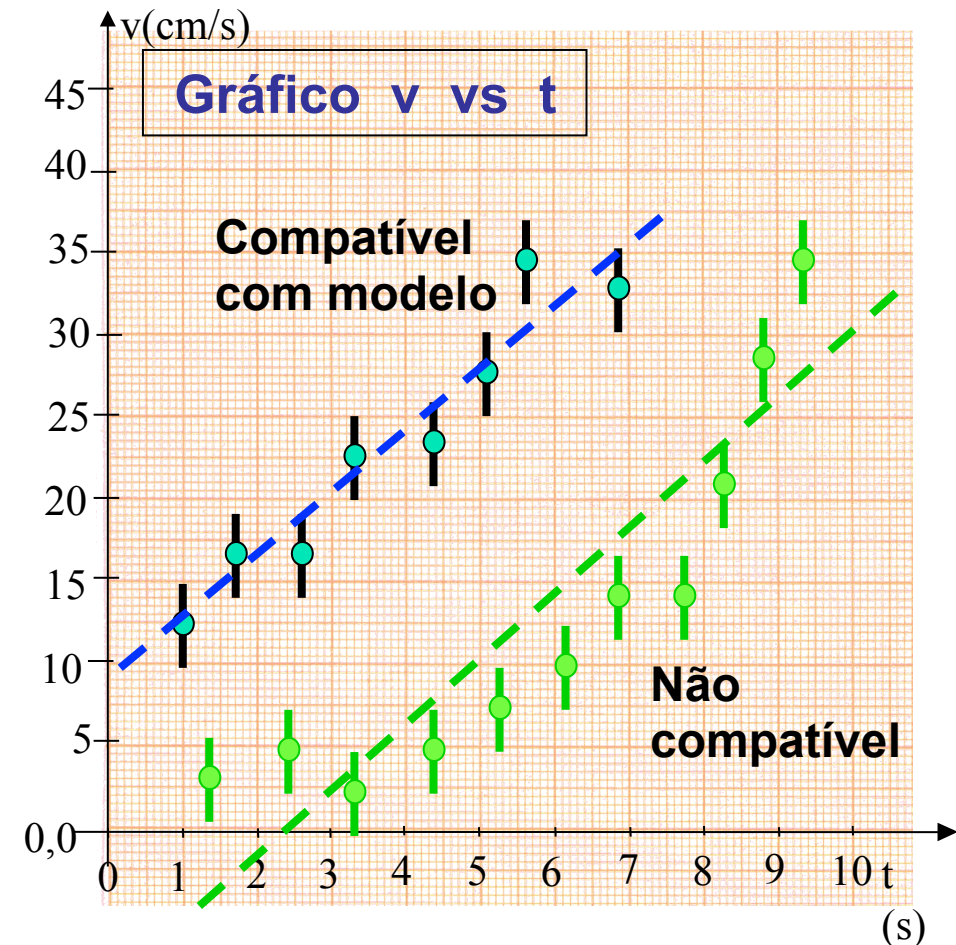
- Utilize marcadores visíveis
- Represente as barras de incerteza em y e x (quando houver) de forma clara
- **NUNCA LIGUE OS PONTOS**
- Conjunto de dados diferentes devem ser representados com símbolos (ou cores) diferentes.



Ajuste de função

- Uma vez com o gráfico, como podemos verificar se a velocidade ($v(t)$) apresenta uma dependência linear com o tempo (t), isto é, $v(t) = v_0 + g \cdot t$?
- Podemos tentar **ajustar** uma reta aos dados, isto é, nos perguntar se pode existir uma reta que **descreva bem** os nossos dados.

26-02-2013

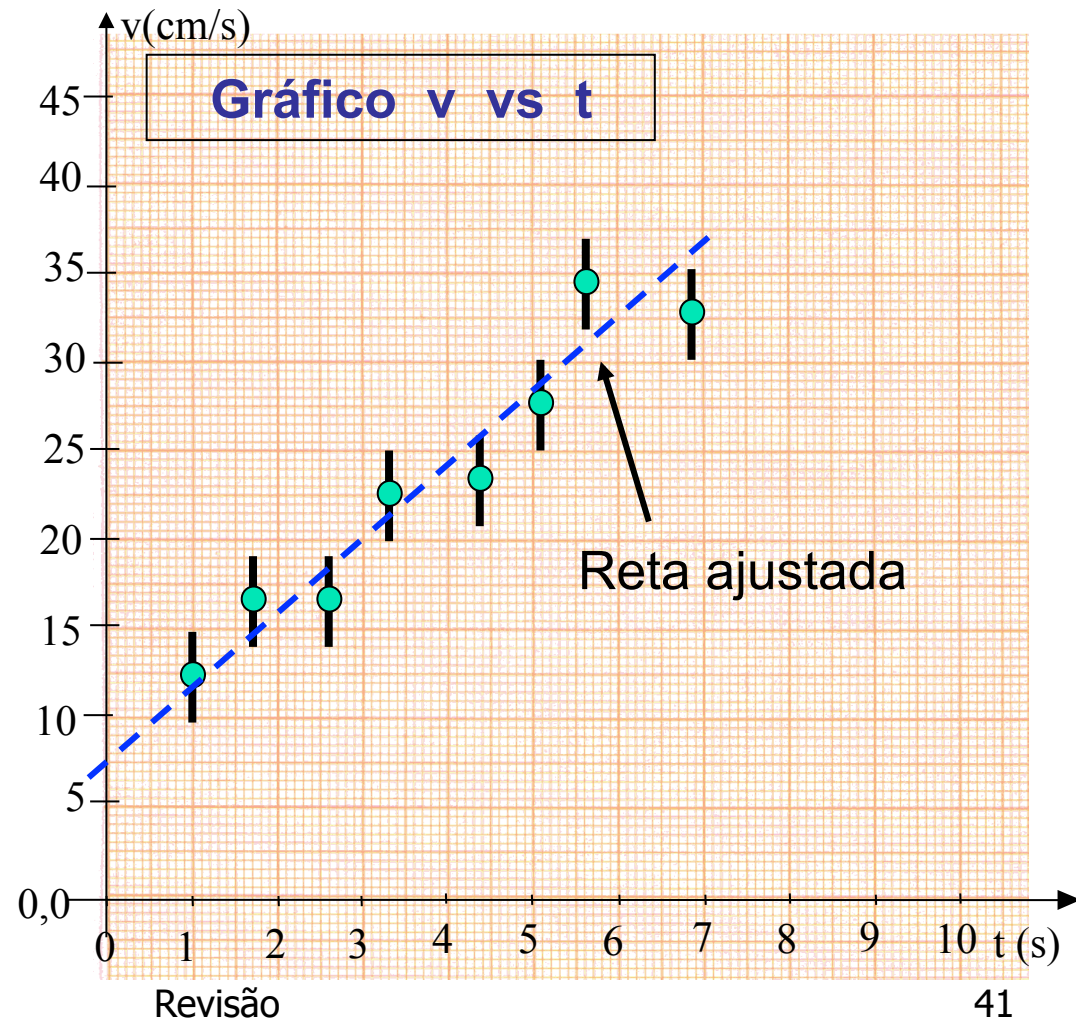


Revisão

40

Ajuste de função

- Em caso afirmativo, como encontrar a reta que descreve bem os dados?
- Ela será a reta que **mais se aproxima** de todos os pontos experimentais considerando-se as incertezas como "peso"





Representação Gráfica

- Utilizando o gráfico de $v(t) \times t$, podemos encontrar a reta que mais se aproxima dos pontos, ou seja, a reta que **se ajusta** aos nossos dados;
- Uma vez encontrada a reta, podemos extrair os seus **parâmetros**:

$$y = a + b \cdot x$$

onde, a é o coeficiente linear da reta e
 b é o coeficiente angular da reta



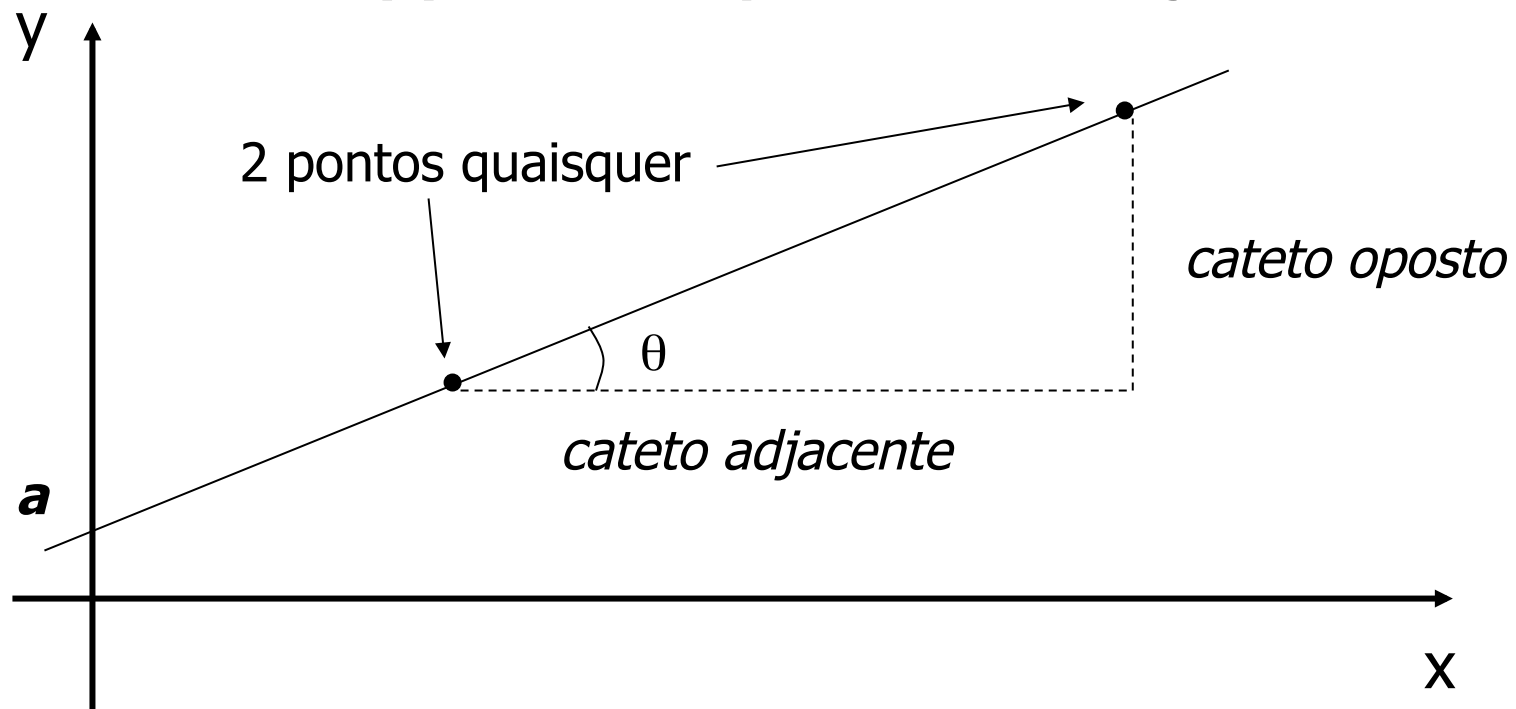
Análise Gráfica

- Como extrair esses parâmetros da reta ajustada?
- O coeficiente linear (a) será o ponto em y que a reta cruza o eixo vertical ($x=0$);
- O coeficiente angular (b) é dado pela inclinação da reta ($\tan(\theta)$):
$$b = \tan(\theta) = \text{cateto oposto} / \text{cateto adjacente}$$



Análise Gráfica

$$b = \tan(\theta) = \text{cateto oposto} / \text{cateto adjacente}$$





Análise Gráfica

- Qual é a interpretação que podemos dar aos parâmetros da reta?
- Se os pontos se comportam de maneira linear, isso será uma indicação que o modelo da queda livre é bom para representar nossos dados;
- Portanto, a interpretação dos parâmetros é:

$$\begin{array}{ccccccc} y & = & a & + & b & \cdot & x \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ v(t) & = & v_0 & + & g & \cdot & t \end{array}$$



Análise Gráfica

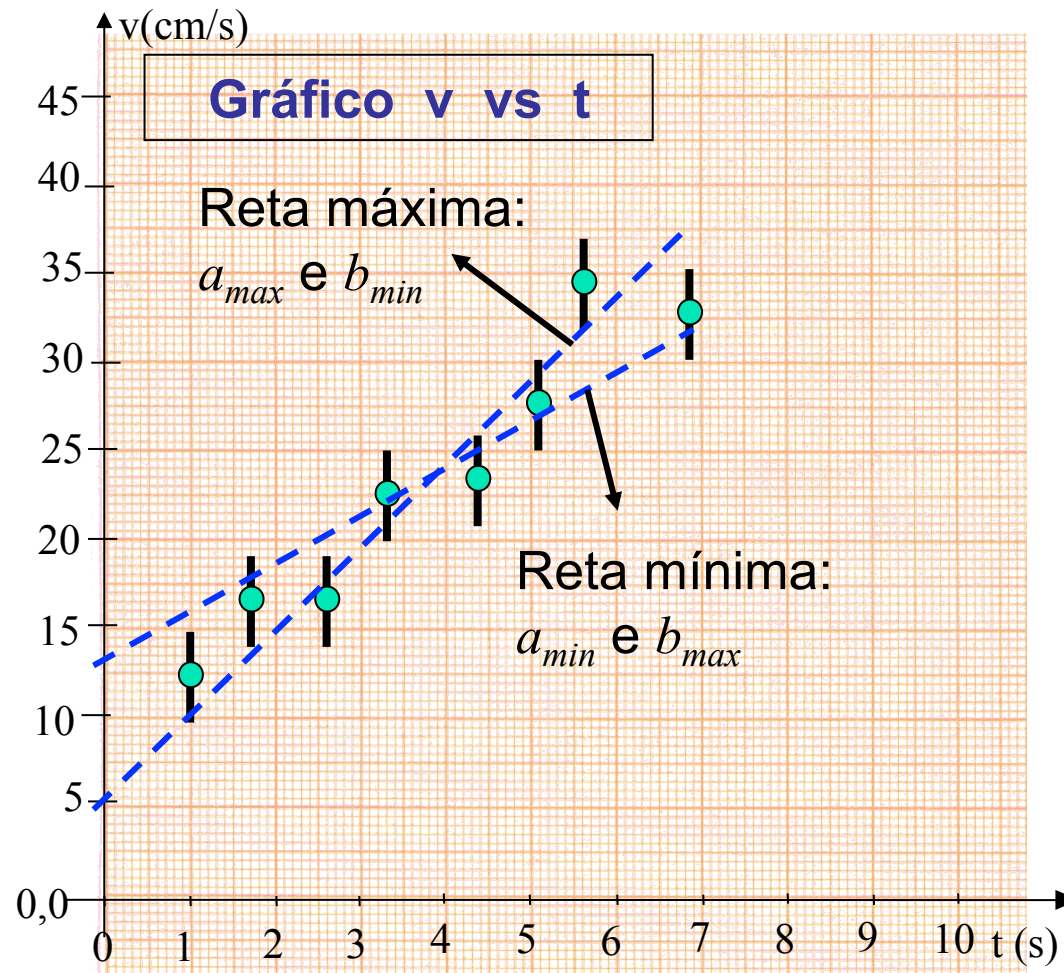
- Se o modelo de queda livre é adequado, e $y = v(t)$, $x = t$, temos:
 $a = v_0$ e $b = g$
- Será que os valores obtidos são razoáveis? Como avaliar isso?
- Precisamos das incertezas de a (v_0) e b (g).



Análise Gráfica

- Qual é a incerteza de $a (v_0)$ e $b (g)$? Como podemos estimá-la?
- Também o faremos graficamente:
 - tomando a reta de maior inclinação possível que ainda descrevem os pontos, o que determina os parâmetros máximo a_{max} e mínimo b_{min} ;
 - e a reta de menor inclinação possível que ainda descrevem os pontos, o que determina os parâmetros mínimo a_{min} e máximo b_{max} ;

Análise Gráfica





Análise Gráfica

- As incertezas de a (v_0) e b (g) são dadas por:

$$\Delta a = (a_{max} - a_{min})/2 \text{ e}$$

$$\Delta b = (b_{max} - b_{min})/2$$

- Uma vez com as incertezas calculadas, podemos avaliar se o resultado está de acordo com o modelo da queda livre, isto é, se os valores dos parâmetros estão compatíveis com os valores esperados segundo o modelo.