Batimentos

Um tipo peculiar de interferência entre duas ondas acontece quando elas se propagam no mesmo sentido, têm mesma amplitude, mas as suas frequências w diferem ligeiramente. Como elas estão se propagando no mesmo meio elástico elas têm a mesma velocidade v de propagação e portanto $k = w/v$. Desse modo, se as frequências são próximas, isso também acontece com o número de onda k .

Vamos considerar as duas ondas do tipo:

$$y_1(x,t) = y_M \cos(k_1 x - w_1 t)$$

e

$$y_2(x,t) = y_M \cos(k_2 x - w_2 t)$$

logo:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(,x,t)$$

$$y(x,t) = y_M \, [\cos(k_1 x - w_1 t) + \cos(k_2 x - w_2 t)]$$

Vamos definir algumas grandezas:

$$\begin{cases} \Delta w = w_1 - w_2 \\ \\ \Delta k = k_1 - k_2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \overline{w} = \left(\dfrac{w_1 + w_2}{2} \right) \\ \\ \overline{k} = \left(\dfrac{k_1 + k_2}{2} \right) \end{cases}$$

onde supomos que $w_1 > w_2$ e $k_1 > k_2$. Por outro, como as frequências diferem ligeiramente, estamos assumindo que $\overline{w} >> \Delta w$ e $\overline{k} >> \Delta k$. Podemos colocar as equações anteriores na forma:

$$\begin{cases} w_1 = \overline{w} + \dfrac{\Delta w}{2} \\ \\ w_2 = \overline{w} - \dfrac{\Delta w}{2} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} k_1 = \overline{k} + \dfrac{\Delta k}{2} \\ \\ k_2 = \overline{k} - \dfrac{\Delta k}{2} \end{cases}$$

ou seja:

$$y(x,t) = y_M \left\{ \cos\left[\left(\overline{k} + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\overline{w} + \frac{\Delta w}{2} \right) t \right] + \cos\left[\left(\overline{k} - \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\overline{w} - \frac{\Delta w}{2} \right) t \right] \right\}$$

Considerando a identidade trigonométrica:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

encontramos que

$$y(x,t) = 2y_M \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta w}{2} t \right) \cos\left(\overline{k} x - \overline{w} t \right)$$

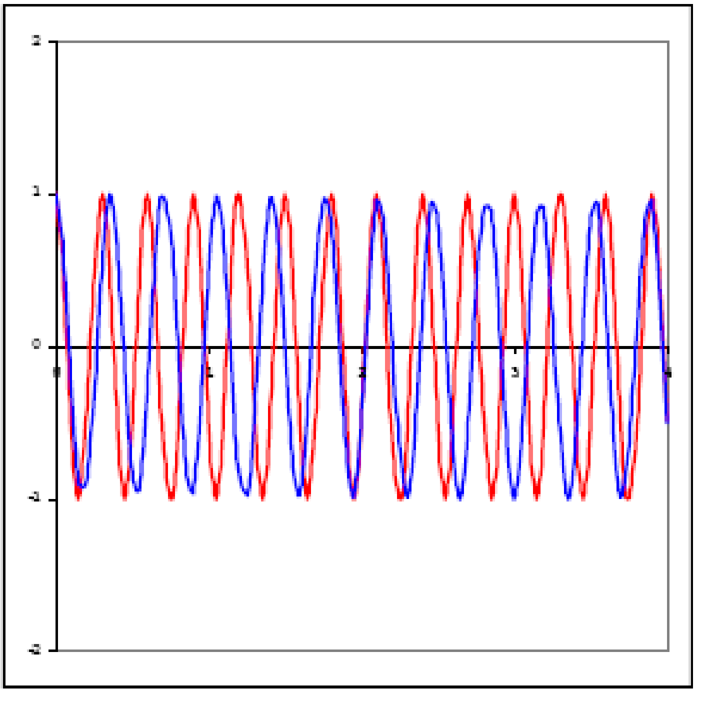
e se definirmos a amplitude de oscilação como $A(x,t)$, teremos

$$A(x,t) = 2y_M \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta w}{2}t\right)$$

ou seja:

$$y(x,t) = A(x,t)\cos(\overline{k}x - \overline{w}t)$$

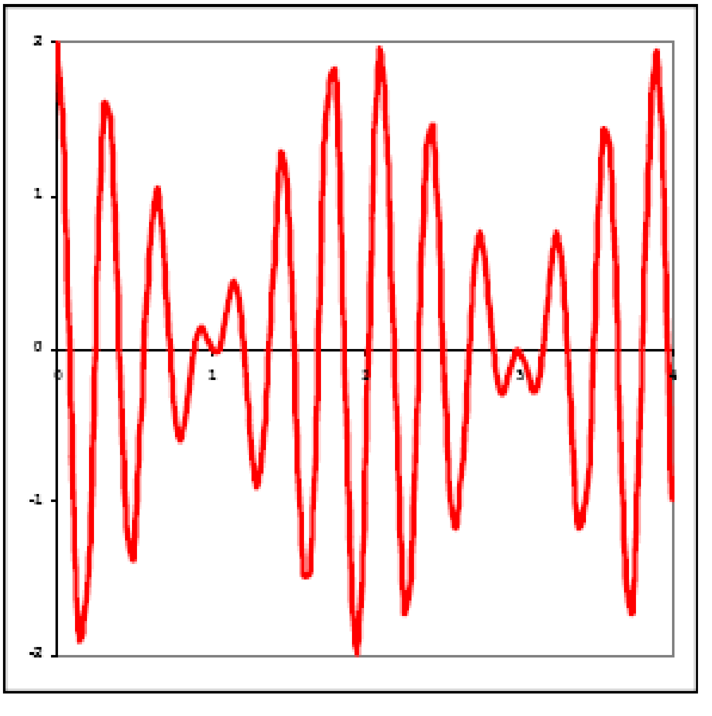
Como exemplo, estamos mostrando ao lado o gráfico em $x = 0$, resultante da soma de duas ondas com amplitudes unitárias e frequência $w_1 = 20{,}94 rad/s$ e $w_2 = 17{,}80 rad/s$.



Temos então que a diferença $\Delta w = 3{,}14 rad/s$ e o valor médio $\overline{w} = 19{,}37 rad/s$.

$$\begin{cases} \Delta w = 3{,}14 \quad \Rightarrow \Delta T = \dfrac{2\pi}{\Delta w} = 2 \\ \overline{w} = 19{,}37 \quad \Rightarrow \quad \overline{T} = \dfrac{2\pi}{\overline{w}} = 0{,}32 \end{cases}$$

Um batimento, ou seja um máximo de amplitude, ocorrerá sempre que a amplitude global apresentar um extremo: máximo ou mínimo.



Neste exemplo, o período de batimento será $\Delta T = 2s$ como se pode observar na figura, a frequência angular de batimento vale $\Delta w = 3{,}14 rad/s$ e a frequência, $\Delta f = 0{,}5 Hz$.

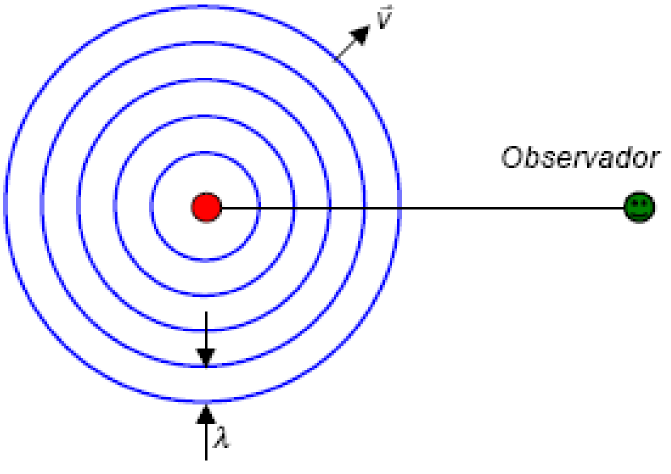
O Efeito Doppler

O som é um tipo de onda que necessita de um meio para se propagar. Quando estamos analisando a produção e a captação de uma onda sonora, estamos diante de três participantes: a fonte sonora, o meio onde ela se propaga e o observador que está captando as ondas. Temos então três referenciais bem definidos.

Fonte e observador em repouso

A fonte emite uma onda harmônica de frequência f e comprimento de onda λ. Vamos desenhar apenas as frentes de onda. As frentes de onda esféricas concêntricas viajam com velocidade v. Como todos os participantes (fonte, observador e meio) estão em repouso, o observador vai perceber uma onda exatamente do mesmo tipo que foi emitida pela fonte.

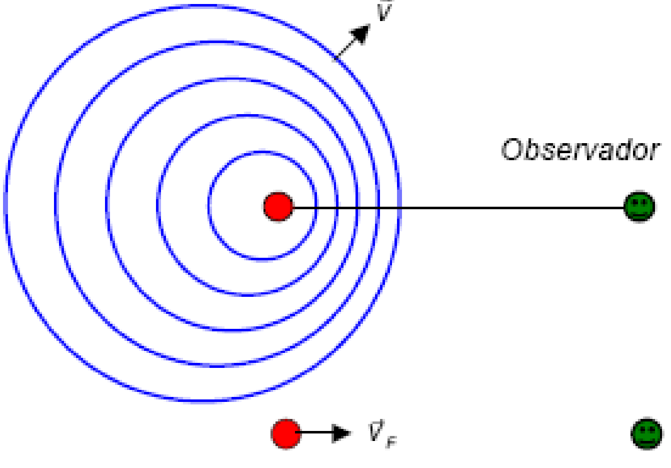
$$v = \lambda f$$



Fonte em movimento - observador em repouso

Como a fonte está em movimento, as frentes de onda não são mais esferas concêntricas. Quando a fonte emitir a segunda frente ela já não estará mais na mesma posição de quando emitiu uma primeira onda.

Seja T é o período da onda que a fonte está emitindo. Como a fonte está se aproximando do observador ele irá perceber uma distância λ' entre as frentes de onda menor que um comprimento de onda λ original, como pode-se



depreender pela figura ao lado. Se em um tempo T (período) uma frente de onda viajou uma distância $\lambda = v\ T$ (comprimento de onda original), como a fonte se aproximou do observador de $v_F\ T$, o observador perceberá um comprimento de onda λ' diferente do original:

$$\lambda' = \lambda - v_F\ T$$

ou seja:

$$\lambda' = v\ T - v_F\ T = (v - v_F)/f$$

Mas

$$\lambda' = v / f'$$

onde f' é a frequência que o observador vai perceber nas circunstâncias atuais. Portanto:

$$\frac{v}{f'} = \frac{v - v_F}{f} \quad \Rightarrow \quad f' = \left(\frac{v}{v - v_F} \right) f$$

Quando a fonte estiver se afastando do observador em repouso, teremos uma situação semelhante a essa descrita, e encontraremos que:

$$\lambda' = \lambda + v_F \, T$$

ou seja:

$$\lambda' = v \, T + v_F \, T = (v + v_F)/f$$

logo:

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_F} \right) f$$

Fonte em repouso - observador em movimento

Quando a fonte está em repouso em relação ao meio a propagação se dará de modo a formarem-se frentes de ondas esféricas concêntricas.

Como a frequência é uma medida do número de frentes de ondas por unidade de tempo que atingem o observador, neste caso chegam a si $f = v / \lambda$ frentes de onda por unidade de tempo. Se a frequência for $f = 1Hz$ o período $T = 1s$, e atingirá o observador uma frente de onda por segundo. Se $f = 0{,}5Hz$ teremos $T = 2s$ e portanto atingirá o observador uma frente de onda a cada $2s$, que é metade do número do caso anterior.

Se o observador se aproxima da fonte com velocidade v_o , ele irá de encontro às frentes de onda, encontrando v_o / λ mais frentes de onda por unidade de tempo que se estivesse em repouso. Desse modo, o número de frentes de onda por unidade de tempo f' que ele encontra será:

$$f' = \frac{v}{\lambda} + \frac{v_o}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad f' = f + f\frac{v_o}{v} \quad \therefore \quad f' = \left(\frac{v + v_o}{v} \right) f$$

Quando o observador estiver se afastando da fonte em repouso, teremos uma situação semelhante a essa descrita, e encontraremos que:

$$f' = \frac{v}{\lambda} - \frac{v_o}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad f' = f - f\frac{v_o}{v} \quad \therefore \quad f' = \left(\frac{v - v_o}{v} \right) f$$

Quando o observador estiver se afastando da fonte em repouso, teremos uma situação semelhante a essa descrita, e encontraremos que:

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v} \right) f$$

Fonte e observador em movimento

Quando fonte e observador estiverem em movimento teremos uma combinação dos resultados anteriores.

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_F} \right) \quad \begin{cases} sinal \text{ superior} : aproximando - se \\ sinal \text{ inferior} : afastando - se \end{cases}$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

10

a) Uma onda senoidal longitudinal contínua é envidada através de determinada mola, por meio de uma fonte oscilante conectada a ela. A frequência da fonte é de $25Hz$ e a distância entre pontos sucessivos de máxima expansão da mola é de $24cm$. Encontre a velocidade com que a onda se propaga na mola.

b) Se o deslocamento longitudinal máximo de uma partícula na mola é de $0,30cm$ e a onda se move no sentido $-x$, escreva a equação da onda. Considere a fonte em $x = 0$ e o deslocamento nulo em $x = 0$ quanto $t = 0$ também é zero.

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

11 A pressão em uma onda sonora progressiva é dada pela equação:

$$\Delta p = (1,5Pa)\ sen\ \pi\ [(1m^{-1})x - (330s^{-1})t]$$

a) Encontre a amplitude de pressão

b) Encontre a frequência

c) Encontre o comprimento de onda

d) Encontre a velocidade da onda

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

10

a) Uma onda senoidal longitudinal contínua é envidada através de determinada mola, por meio de uma fonte oscilante conectada a ela. A frequência da fonte é de *25Hz* e a distância entre pontos sucessivos de máxima expansão da mola é de *24cm* . Encontre a velocidade com que a onda se propaga na mola.

$$v = w/k = \lambda/T = \lambda f = (25Hz)\ (0{,}24m) \qquad f = 25Hz$$
$$\lambda = 24cm = 0{,}24m$$
$$v = 6m/s$$

b) Se o deslocamento longitudinal máximo de uma partícula na mola é de *0,30cm* e a onda se move no sentido *- x* , escreva a equação da onda. Considere a fonte em $x = 0$ e o deslocamento nulo em $x = 0$ quanto $t = 0$ também é zero.

$$s(x,t) = s_M \cos(kx + wt + \varphi) \qquad s_M = 0{,}30cm = 0{,}0030m$$
$$w = 2\pi f = 50\ \pi\ rad/s$$
$$s(0,0) = 0 = s_M \cos\varphi \qquad k = 2\pi/\lambda = 5\pi/6\ rad/m = 8{,}33\pi rad/m$$

logo

$$\varphi = \pi/2$$

ou seja

$$s(x,t) = s_M\ sen(kx + wt)$$

e finalmente:

$$s(x,t) = (0{,}0030m)\ sen(\ 5\pi x/6 + 50\pi t)$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

11 A pressão em uma onda sonora progressiva é dada pela equação:

$$\Delta p = (1{,}5Pa)\ sen\ \pi\ [(1m^{-1})x - (330s^{-1})t]$$

a) Encontre a amplitude de pressão

$$\Delta p_M = 1{,}5Pa$$

b) Encontre a frequência

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{330\pi}{2\pi} = 165Hz$$

c) Encontre o comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2m$$

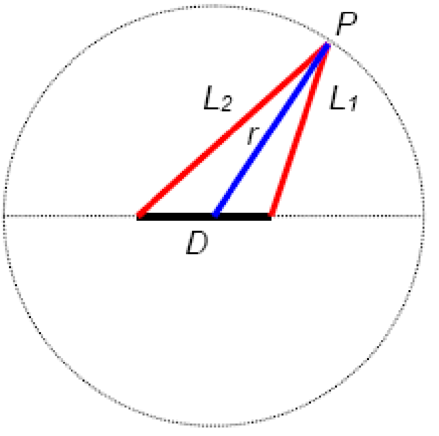
d) Encontre a velocidade da onda

$$v = \frac{w}{k} = \frac{330\pi}{\pi} = 330m/s$$

12 Duas fontes pontuais de ondas sonoras, de comprimentos de onda λ e amplitudes idênticas, estão separadas por uma distância $D = 2\lambda$. As fontes estão em fase.

a) Quantos pontos de sinal máximo (interferência construtiva) existem em um grande círculo em torno da fonte?

Vamos considerar um grande círculo, P ou seja: a distância entre as fontes é bem menor que o raio deste círculo.

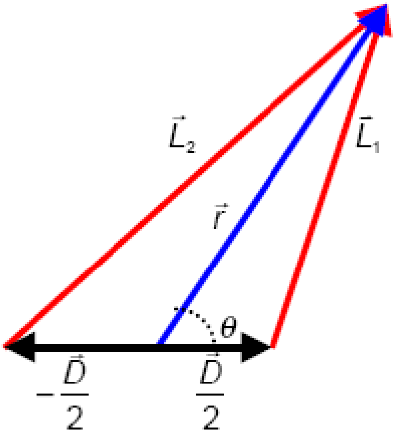


Seja P um ponto desse círculo, e L_1 e L_2 as distâncias de cada uma das fontes a esse ponto.

Vamos definir a origem das coordenadas coincidindo com o centro do círculo.

Podemos então definir:

$$\begin{cases} \vec{L}_1 = \vec{r} - \dfrac{\vec{D}}{2} \\ \vec{L}_2 = \vec{r} + \dfrac{\vec{D}}{2} \end{cases}$$



Logo:

$$L_1^2 = r^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - 2\vec{r}\cdot\frac{\vec{D}}{2}$$

ou seja

$$\begin{cases} L_1^2 = r^2 + \left(\dfrac{D}{2}\right)^2 - rD\cos\theta \\ L_2^2 = r^2 + \left(\dfrac{D}{2}\right)^2 + rD\cos\theta \end{cases}$$

portanto

$$L_2^2 - L_1^2 = 2rD\cos\theta$$

Mas por outro lado:

$$\begin{Bmatrix} L_2 + L_1 \cong 2r \\ L_2 - L_1 = \Delta L \end{Bmatrix} \Rightarrow L_2^2 - L_1^2 = (L_2 - L_1)(L_2 + L_1) \cong 2r\Delta L$$

logo

$$L_2^2 - L_1^2 = 2rD\cos\theta \cong 2r\Delta L \quad \therefore \quad \cos\theta = \frac{\Delta L}{D} = \frac{\Delta L}{2\lambda}$$

Para que tenhamos uma interferência construtiva é necessário que $\Delta L = \pm\, n\, \lambda$, ou seja:

$$\cos\theta = \pm \frac{n}{2}$$

$n = 0$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = 0$ $\Rightarrow$ $\theta = 90^0$ ou $\theta = 270^0$
$n = +1$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = +\ 1/2$ $\Rightarrow$ $\theta = 60^0$ ou $\theta = 300^0$
$n = -1$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = -\ 1/2$ $\Rightarrow$ $\theta = 120^0$ ou $\theta = 240^0$
$n = +2$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = +\ 1$ $\Rightarrow$ $\theta = 0^0$
$n = -2$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = -\ 1$ $\Rightarrow$ $\theta = 180^0$

Existem, portanto oito pontos de máximo.

b) Quantos pontos de sinal mínimo (interferência destrutiva) existem em um grande círculo em torno da fonte?

Para o cálculo de pontos com interferência destrutiva, o procedimento é equivalente:

$$L_2^2 - L_1^2 = 2rD\cos\theta \cong 2r\Delta L \quad \therefore \quad \cos\theta = \frac{\Delta L}{D} = \frac{\Delta L}{2\lambda}$$

Para que tenhamos uma interferência destrutiva é necessário que

$$\Delta L = \pm\left(n\lambda + \frac{\lambda}{2}\right) = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

ou seja:

$$\cos\theta = \pm\left(\frac{2n+1}{4}\right)$$

$n = 0$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = +\ 1/4$ $\Rightarrow$ $\theta = 75{,}52^0$ ou $\theta = 284{,}44^0$
$n = 0$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = -\ 1/4$ $\Rightarrow$ $\theta = 104{,}47^0$ ou $\theta = 255{,}52^0$
$n = +1$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = +\ 3/4$ $\Rightarrow$ $\theta = 41{,}40^0$ ou $\theta = 318{,}59^0$
$n = -1$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = -\ 3/4$ $\Rightarrow$ $\theta = 138{,}59$ ou $\theta = 221{,}40^0$

Existem, portanto oito pontos de mínimo.

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
48	Uma ambulância, tocando sua sirene a 1600Hz ultrapassa um ciclista, que estava pedalando uma bicicleta a $2,44m/s$. Depois da ambulância ultrapassá-lo, o ciclista escuta a sirene a $1590Hz$. Qual a velocidade da ambulância?

$f = 1600Hz$ $\qquad$ $v = 343m/s$

$f' = 1590Hz$ $\qquad$ $v_o = 2,44m/s$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
49	Um apito de frequência $540Hz$ move-se em uma trajetória circular de raio $60cm$ com uma velocidade de $15rad/s$.

Quais são as *menores e maiores* frequências ouvida por um ouvinte a uma grande distância e em repouso em relação ao centro do círculo?

$v_F = w\, r = 9m/s$

$f = 540Hz$

$r = 60cm = 0,6m$

$w = 15rad/s$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

48 Uma ambulância, tocando sua sirene a 1600Hz ultrapassa um ciclista, que estava pedalando uma bicicleta a $2,44m/s$. Depois da ambulância ultrapassá-lo, o ciclista escuta a sirene a $1590Hz$. Qual a velocidade da ambulância?

$f = 1600Hz$ $\qquad$ $v = 343m/s$

$f' = 1590Hz$ $\qquad$ $v_o = 2,44m/s$

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_F}\right) \quad \begin{cases} \textit{sinal superior: aproximando-se} \\ \textit{sinal inferior: afastando-se} \end{cases}$$

Depois que a ambulância ultrapassa o ciclista, ela passa a se afastar dele que caminha na direção dela: a fonte se afasta do observador que se aproxima desta fonte:

$$f' = f\left(\frac{v + v_o}{v + v_F}\right) \quad \Rightarrow \quad v_F = \left(\frac{f - f'}{f'}\right)v + \left(\frac{f}{f'}\right)v_o = 4,61m/s$$

Capítulo 18 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição

49 Um apito de frequência $540Hz$ move-se em uma trajetória circular de raio $60cm$ com uma velocidade de $15rad/s$.

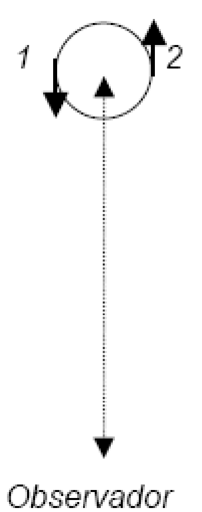
Quais são as *menores e maiores* frequências ouvida por um ouvinte a uma grande distância e em repouso em relação ao centro do círculo?

$v_F = w\,r = 9m/s$ $\qquad$ $f = 540Hz$

$r = 60cm = 0,6m$

$w = 15rad/s$

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_F}\right) \quad \begin{cases} \textit{sinal superior: aproximando-se} \\ \textit{sinal inferior: afastando-se} \end{cases}$$



Quando o observador está fixo, temos duas possíveis situações:

$$f_1' = f\left(\frac{v}{v - v_F}\right) \quad \textit{fonte aproximando-se}$$

$$f_2' = f\left(\frac{v}{v + v_F}\right) \quad \textit{fonte afastando-se}$$

$$f'_2 = 525,66Hz$$

$$f'_1 = 555,14Hz$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
27	Duas ondas idênticas que se propagam, deslocando-se no mesmo sentido, têm uma diferença de fase de *$\pi/2rad$* . Qual é a amplitude da onda resultante em termos da amplitude comum y_M das duas ondas?

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
34	Duas ondas senoidais com amplitudes e comprimentos de onda idênticos se propagam em sentidos contrários ao longo de uma corda, com velocidade escalar de *$10cm/s$* . Se o intervalo de tempo entre os instantes em que a corda fica retilínea é *$0,50s$* , quais os seus comprimentos de onda?

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
27	Duas ondas idênticas que se propagam, deslocando-se no mesmo sentido, têm uma diferença de fase de $\pi/2 rad$. Qual é a amplitude da onda resultante em termos da amplitude comum y_M das duas ondas?

$$y_1(x,t) = y_M\, sen(kx - wt)$$

$$y_2(x,t) = y_M\, sen(kx - wt + \pi/2)$$

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$y(x,t) = y_1(x,t) = y_M\, [\, sen(kx - wt) + sen(kx - wt + \pi/2)\,]$$

Mas:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

logo:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha+\pi/2}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

e portanto

$$y(x,t) = \left[2y_M\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\operatorname{sen}\left(kx - wt + \frac{\pi}{4}\right)$$

A amplitude A desta onda resultante é dada por:

$$A = 2y_M\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = y_M\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{y_M} = \sqrt{2}$$

Capítulo 17 - Halliday, Resnick e Walker - 6ª. edição	
34	Duas ondas senoidais com amplitudes e comprimentos de onda idênticos se propagam em sentidos contrários ao longo de uma corda, com velocidade escalar de $10cm/s$. Se o intervalo de tempo entre os instantes em que a corda fica retilínea é $0,50s$, quais os seus comprimentos de onda?

$$y_1(x,t) = y_M\, sen(kx - wt)$$
$$y_2(x,t) = y_M\, sen(kx + wt)$$

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_M\, [\, sen(kx - wt) + sen(kx + wt)\,]$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$y(x,t) = 2\, y_M\, sen(kx)\, cos(wt)$$

O intervalo de tempo entre os instantes em que a corda fica retilínea é igual à meio período, logo:

$$\Delta t = T/2 = 0,50s \quad \Rightarrow \quad T = 1s$$

$$v = 10cm/s = 0,1m/s$$

$$\lambda = v\, T = (0,1)\,(1) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,1m$$