Tópico 1 – Vetores e Tensores (revisão álgebra)
2018

EESC · USP
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

FUNDAMENTOS DE MECÂNICA DO CONTÍNUO APLICADA A SÓLIDOS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

INTRODUÇÃO

A mecânica do contínuo se preocupa com o comportamento mecânico dos sólidos e fluidos em uma escala macroscópica, ignorando a natureza discreta dos materiais em sua escala microscópica, tratando assim os matérias como uniformemente distribuídos no espaço.

É possível definir quantidades como densidade, deslocamentos, velocidades, etc. como funções contínuas, ou pelo menos contínuas por partes.

A mecânica do continuo aplicada a sólidos lida com a <u>interação entre forças e alterações de forma</u> , portanto as variáveis de interesse para a mecânica do contínuo são variáveis ligadas a forças (usualmente forças por unidade de área ou volume) com variáveis ligadas a cinemática dos pontos como deslocamento, velocidade e aceleração.

INTRODUÇÃO

A mecânica do contínuo, tem como ênfase o estudo dos corpos deformáveis (a mecânica do corpo rígido, não se deforma, é um caso idealizado) , sendo que para esse caso, o deslocamento relativo das partículas do corpo introduz importantes variáveis cinemáticas como as derivadas do deslocamento, velocidade, etc.

As equações da mecânica do contínuo são de dois tipos. Uma que se aplica a todos os corpos (sólidos e fluidos), e são escritas baseadas nas leis da física como leis de conservação de massa e energia. O outro tipo de equações são as que descrevem o comportamento mecânico de um material em particular (leis constitutivas).

NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL

Utilizada no equacionamento de:

- tensão
- deformação
- equações constitutivas

Necessário o conhecimento básico

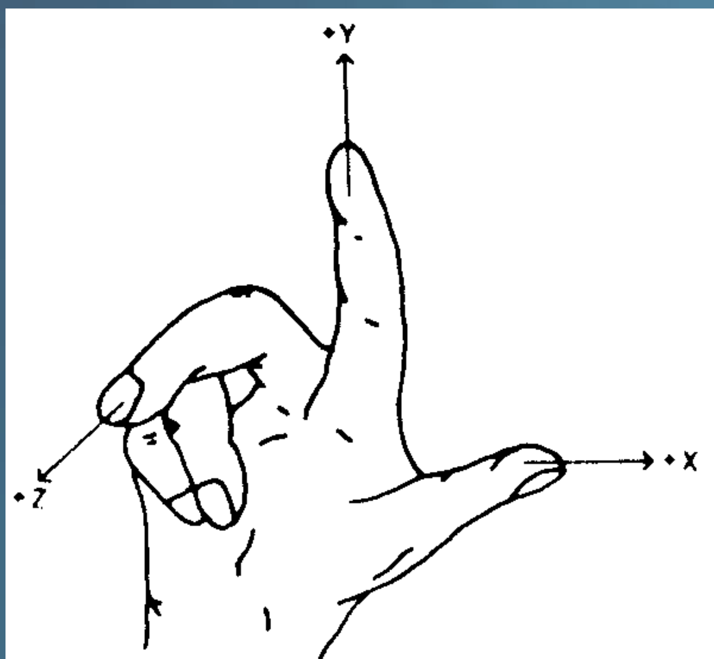
Preferível sobre a notação expandida:

- compacta
- enfoque nos princípios físico e não na equação

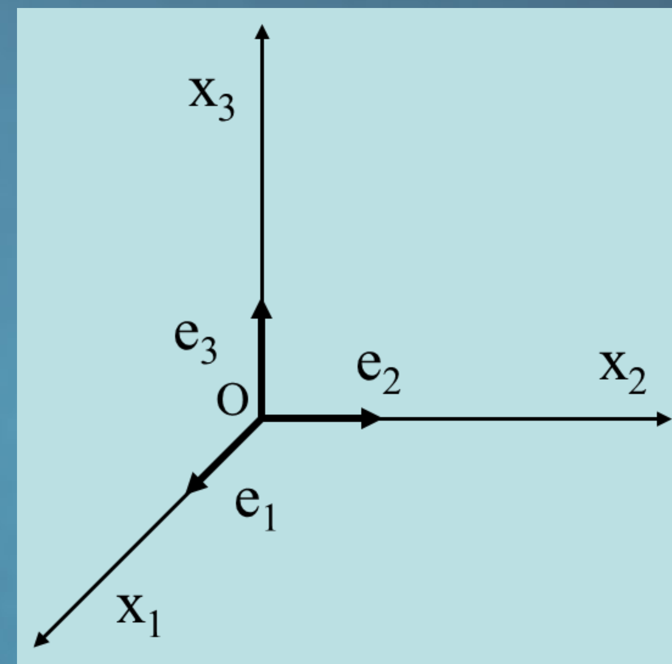
Somente o necessário ao estudo da mecânica do continuo

SISTEMA DE COORDENADAS

Sistema de coordenadas cartesiano 3D



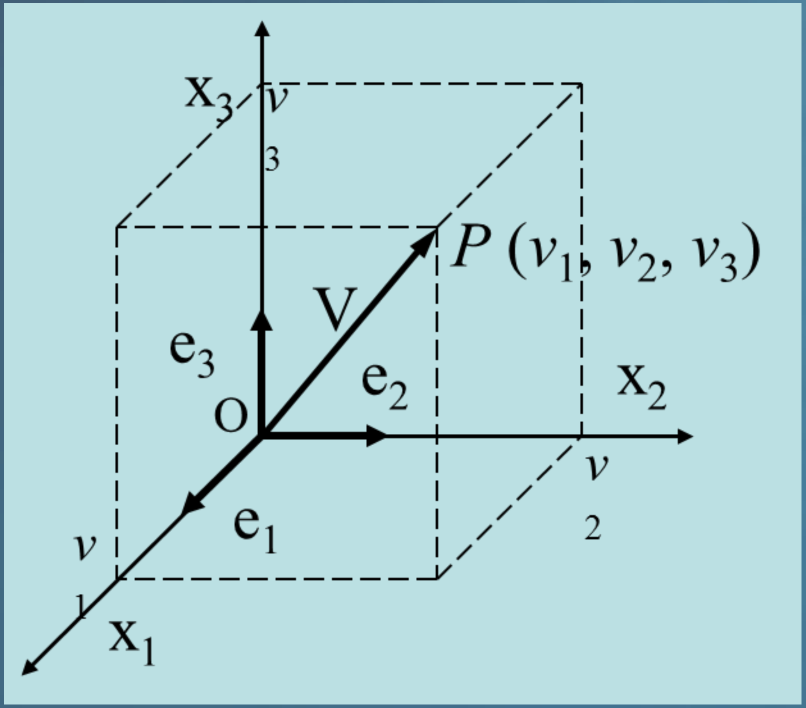
(regra da mão direita)



$$|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$$

ÁLGEBRA VETORIAL

Serão considerados vetores no espaço Euclidiano tri dimensional



vetor ⇒ magnitude e direção

escalar ⇒ magnitude

Posição de um ponto P ⇒ coordenadas v_1, v_2 e v_3

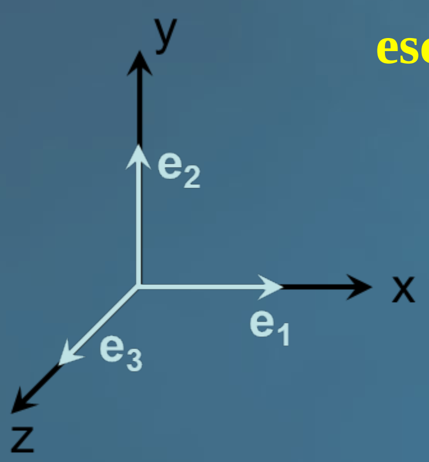
$$\mathbf{V} = \mathbf{OP} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$$

$$\mathbf{V} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$$

ÁLGEBRA VETORIAL

Considere agora uma base ortonormal (vetores unitários ortogonais), e_1, e_2 e e_3.



Pela regra do paralelogramo, pode-se escrever um vetor qualquer *a* como:

$$\mathrm{a} = a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + a_3\mathrm{e}_3$$

$$\mathrm{a}.\mathrm{e}_1 = \left(a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + a_3\mathrm{e}_3 \right).\mathrm{e}_1 = a_1$$

$$a.\mathrm{e}_1 = |a_1||\mathrm{e}_1|\cos\theta\left(a, e_1 \right) = a_1$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$ **Magnitude do vetor**

ÁLGEBRA VETORIAL

Igualdade de vetores

V = U se:

$$v_1 = u_1,\ v_2 = u_2,\ v_3 = u_3$$

ou

$$v_i = u_i,\ i = 1, 2, 3$$

ou, simplesmente

$$v_i = u_i$$

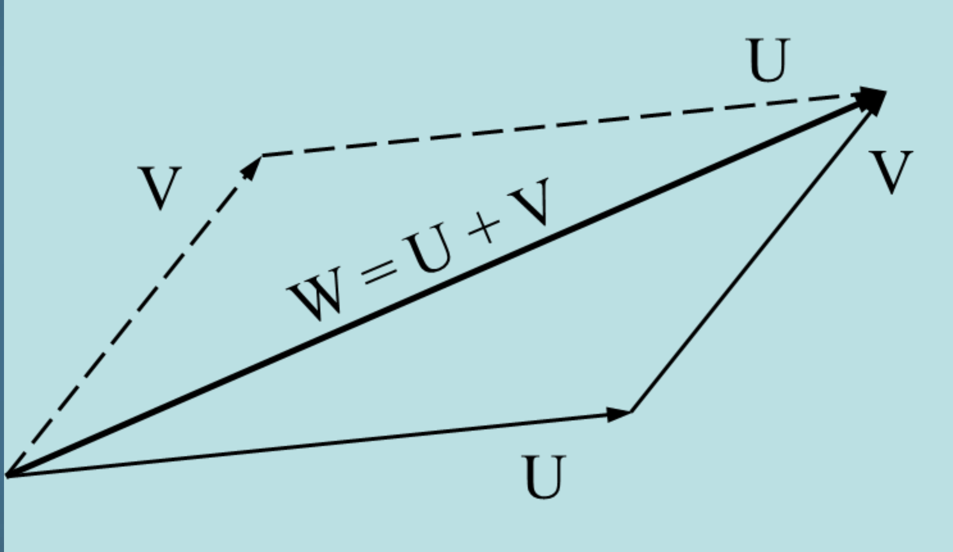
ÁLGEBRA VETORIAL

Adição de vetores

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} + \mathbf{V} = (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3$$

$$(w_1, w_2, w_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

$$w_i = u_i + v_i$$



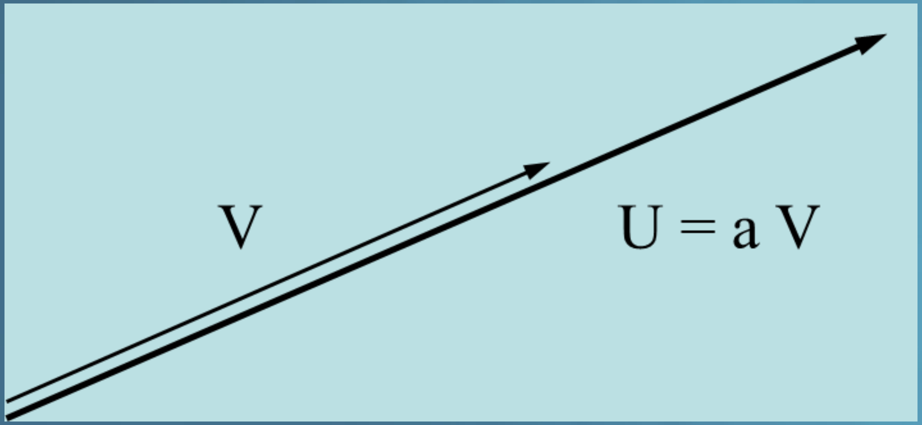
ÁLGEBRA VETORIAL

Multiplicação de vetores por escalar

$$\mathbf{U = a\ V = (a\ \mathit{v}_1)e_1 + (a\ \mathit{v}_2)e_2 + (a\ \mathit{v}_3)e_3}$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (a\ v_1, a\ v_2, a\ v_3)$$

$$u_i = a\ v_i$$



PRODUTO ESCALAR

O resultado é um escalar

$$a = U \bullet V = |U|\,|V| \cos\theta$$

$|U| \Rightarrow$ é módulo do vetor U $\Rightarrow$ $|U| = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + u_3 \cdot u_3}$

$\cos\theta \Rightarrow$ é o ângulo entre os vetores U e V

- O produto escalar de vetores perpendiculares é nulo; se o produto de dois vetores é nulo eles são perpendiculares entre si;
- O módulo ao quadrado de um vetor é dado pelo produto escalar dele por ele mesmo;
- A projeção de um vetor na direção de outro é dada pelo produto escalar entre o vetor e o vetor unitário (<u>versor</u>) na direção do outro.

PRODUTO ESCALAR

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 = (1)(1)\cos 90° = 0$$

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 = (1)(1)\cos 0° = 1$$

$$\mathbf{V} \bullet \mathbf{V} = (V)(V)\cos 0° = V^2$$

$$\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \bullet (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

$$\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

PRODUTO VETORIAL

O resultado é um vetor

$$\mathbf{W = U \times V}$$

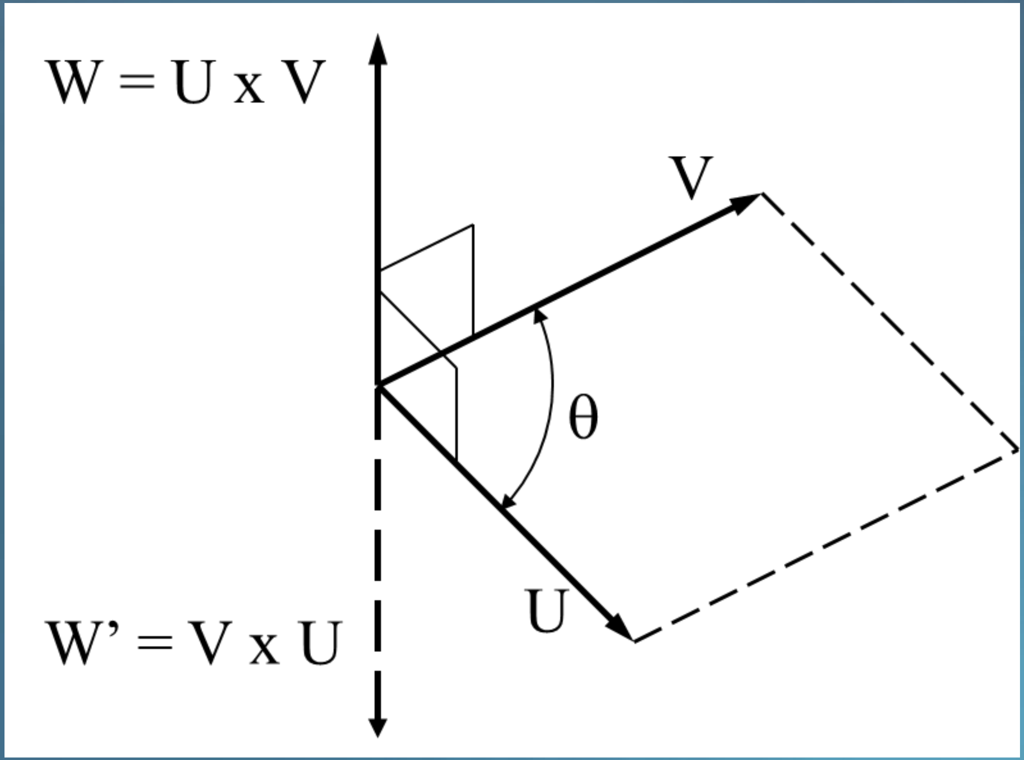
- módulo de W é:

$$|\mathbf{W}| = |\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|\ \mathrm{sen}\ \theta$$

(área do paralelogramo formado pelos vetores)

- direção de W é normal ao plano formado pelos dois vetores

PRODUTO VETORIAL



$$e_1 \times e_2 = e_3$$
$$e_1 \times e_3 = -e_2$$
$$e_2 \times e_3 = e_1$$

$$W = U \text{ x } V = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3$$

PRODUTO TRIPLO

Tem significado:

(U • V)W U • (V x W) U x (V x W)

Relações válidas:

a) (U • V)W ≠ U(V • W) em geral

b) U • (VxW) = V • (WxU) = W • (UxV) = volume do paralelepípedo

$$\mathrm{U}\cdot(\mathrm{V}\times\mathrm{W})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=(\mathrm{U}\times\mathrm{V})\cdot\mathrm{W}$$

produto escalar triplo [U, V, W]

PRODUTO TRIPLO

Relações válidas (continuação):

c) $U \times (V \times W) = (U \bullet W)V - (U \bullet V)W$

$(U \times V) \times W = (U \bullet W)V - (V \bullet W)U$

produto vetorial triplo

d) $U \times (V \times W) \neq (U \times V) \times W$

não vale a lei da associação

ÁLGEBRA VETORIAL

Calculo de área
Área de um triângulo formado por pelos vetores *a* e *b*

$$A = \frac{1}{2}\left|\mathrm{a}\times\mathrm{b}\right|$$

Calculo de ângulos
Ângulo formado por pelos vetores *a* e *b*

$$\theta = \cos^{-1}\left(\mathrm{a.b}/\left|\mathrm{a}\right|\left|\mathrm{b}\right|\right)$$

Calculo de versor normal a uma superfície
Normal a superfície formada por pelos vetores *a* e *b*

$$\mathrm{n} = \pm\frac{\mathrm{a}\times\mathrm{b}}{\left|\mathrm{a}\times\mathrm{b}\right|}$$

Calculo de volume
Normal a superfície formada por pelos vetores *a* e *b*

$$V = \left|\mathrm{c}.\left(\mathrm{a}\times\mathrm{b}\right)\right|$$

CAMPOS ESCALARES E VETORIAIS

Campo Escalar

temperatura $\Rightarrow$ $T = f\,(x_1, x_2, x_3)$

T = constante (superfície)

$$T = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

Campo Vetorial

velocidade $\Rightarrow$ $V(x_1, x_2, x_3)$

$$V = v_1\left(x_1, x_2, x_3\right)e_1 + v_2\left(x_1, x_2, x_3\right)e_2 + v_3\left(x_1, x_2, x_3\right)e_3$$

CAMPOS ESCALARES E VETORIAIS

Gradiente de um campo escalar $\Rightarrow$ é um vetor

$$G_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\mathrm{G} = \mathrm{grad}\,\phi = \nabla\,\phi$$

Operador ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathrm{e}_3$$

$$\nabla\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\mathrm{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\mathrm{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\mathrm{e}_3 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right)$$

CAMPOS ESCALARES E VETORIAIS

Divergente de um vetor $\Rightarrow$ é um escalar

$$\nabla \cdot \mathrm{V} = \operatorname{div} \mathrm{V} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$\mathrm{V} \cdot \nabla$ **não tem significado, portanto**

$$\nabla \cdot \mathrm{V} \neq \mathrm{V} \cdot \nabla$$

Rotacional de um vetor $\Rightarrow$ é um vetor

$$\nabla \times \mathrm{V} = \operatorname{rot} \mathrm{V} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

CAMPOS ESCALARES E VETORIAIS

Se as derivadas parciais de *f*, *ψ* e V existirem

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = \nabla^2 \phi$$

Laplaciano de ϕ

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathrm{V}) = \phi\nabla \cdot \mathrm{V} + \mathrm{V} \cdot \nabla\phi$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = \nabla \times (\nabla\phi) = 0$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{V} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathrm{V}) = 0$$

NOTAÇÃO INDICIAL

$$\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = v_i$$

$$x_i = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{X} = 0$$

$$f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2, x_3) = f(x_i) = f(x_j)$$

Convenção de soma

$$a = \mathrm{U} \cdot \mathrm{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_i v_i = u_k v_k$$

NOTAÇÃO INDICIAL

Convenção de soma

$$W = U + V \Rightarrow (w_1, w_2, w_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \Rightarrow w_i = u_i + v_i$$

$$[a]\{x\} = \{b\} \Rightarrow a_{ij}x_j = b_i \Rightarrow \begin{matrix} a_{1j}x_j = b_1 \\ a_{2j}x_j = b_2 \\ a_{3j}x_j = b_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{matrix}$$

i **é índice livre (*free*)**
j **é índice de repetição (*dummy*)**

$$a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow a_{rs}x_s = b_r$$

NOTAÇÃO INDICIAL

Vetor	Componentes	Notação Indicial
V	(v_1, v_2, v_3)	v_i
$\mathrm{U}+\mathrm{V}$	$(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$	u_i+v_i
$\nabla\phi$	$\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}, \dfrac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)$	$\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}$

Divergente de um vetor

$$\nabla\cdot\mathrm{V} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

NOTAÇÃO INDICIAL

Notação de Diferenciação

Divergente de um vetor

$$\nabla \cdot \mathrm{V} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = v_{i,i}$$

Gradiente de um campo escalar

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \phi_{,1}, \phi_{,2}, \phi_{,3} = \phi_{,i}$$

Laplaciano de um campo escalar

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = \phi_{,11} + \phi_{,22} + \phi_{,33} = \phi_{,ii}$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

$$\mathbf{A} = A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Com i=1,2,...,m e j=1,2,...,n
OBS: matriz quadrada se $m=n$
Matriz diagonal $A_{ij}=0$, $i \neq j$

A matriz A (quadrada) é simétrica se $A_{ij}=A_{ji}$ e antissimétrica se $A_{ij}=-A_{ji}$
Em notação matricial $A=A^T$ (simétrica) e $A=-A^T$ (antissimétrica).

OBS: Normalmente na mecânica do contínuo, as matrizes possuem dimensão 3 x 3 e serão representadas por **letras maiúsculas em negrito**, por outro lado, os vetores possuem dimensão 3 x 1 e serão representados com **letras minúsculas em negrito**.

Traço de uma matriz quadrada: $tr\mathbf{A} =$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Matriz transposta A^T

$$\mathbf{A} = A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = A_{ji} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1m} & A_{2m} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Igualdade

$$A = B \quad \text{se} \quad a_{ij} = b_{ij}$$

Soma

$$C = A + B \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Multiplicação

- por escalar

$$B = \alpha A \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

- por vetor

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} b_j$$

$$\begin{gathered} c_1 = A_{11} b_1 + A_{12} b_1 + \cdots + A_{1n} b_n \\ c_2 = A_{21} b_1 + A_{22} b_1 + \cdots + A_{2n} b_n \\ \vdots \\ c_n = A_{n1} b_1 + A_{n2} b_1 + \cdots + A_{nn} b_n \end{gathered}$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Multiplicação

- por outra matriz $$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$ **Só é possível se** ***n=p***

A	B	C
$m \times n$	$p \times q$	$m \times q$

A multiplicação de matrizes tem a propriedade distributiva e associativa, mas não comutativa:

$A(B + C) = AB + AC$

$A(BC) = (AB)C$

$AB \neq BA$

ÁLGEBRA MATRICIAL

A matriz identidade é denotada por $I=\delta_{ij}$.

δ_{ij} é conhecido como delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{I} \qquad \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{ii} = 1$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

AI=A

ou

$$A_{ij}\delta_{ii} = A_{ij}$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Delta de Kronecker (δ_{ij})
Operador de substituição

$$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} A_{jk} = A_{ik} \qquad \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} A_{kj} = A_{ki}$$

$$\delta_{ij}\, v_j = \delta_{i1}\, v_1 + \delta_{i2}\, v_2 + \delta_{i3}\, v_3 = v_i$$

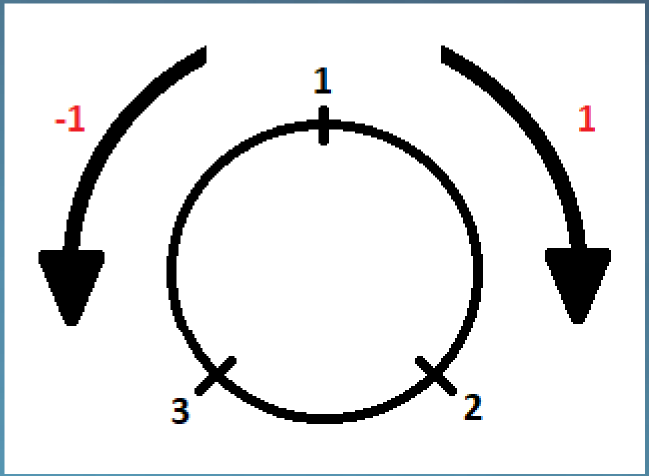
$$\delta_{ij}\, \delta_{ji} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\delta_{ij}\, A_{ji} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Tensor Alternante ($\in_{ijk}$)



$$\in_{ijk} = \begin{array}{cc} i=1 & \begin{array}{ccc} j=1 & j=2 & j=3 \end{array} \\ \begin{array}{c} k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} i=2 & \begin{array}{ccc} j=1 & j=2 & j=3 \end{array} \\ \begin{array}{c} k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} i=3 & \begin{array}{ccc} j=1 & j=2 & j=3 \end{array} \\ \begin{array}{c} k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\in_{123} = \in_{231} = \in_{312} = 1$

$\in_{213} = \in_{132} = \in_{321} = -1$

demais $\in_{ijk} = 0$

Por exemplo: $\in_{112} = \in_{121} = 0$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Tensor Alternante ($\in_{ijk}$)

Produto Vetorial

$$\in_{ijk} u_j v_k \mathrm{e}_i = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right)\mathrm{e}_1 + \left(u_3 v_1 - u_1 v_3\right)\mathrm{e}_2 + \left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right)\mathrm{e}_3$$

$$\in_{ijk} u_j v_k \mathrm{e}_i = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathrm{U} \times \mathrm{V}$$

Produto Triplo

$$\in_{ijk} u_i v_j w_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \mathrm{U} \cdot \left(\mathrm{V} \times \mathrm{W}\right)$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Associado a uma matriz quadrada, tem-se o determinante: det *A*

No caso especial de uma matriz 3x3:

$$\det \boldsymbol{A} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} \in_{ijk} \in_{rst} A_{ir} A_{js} A_{kt}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \in_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

Ou considerando a convenção de soma

(convenção de Eistein)

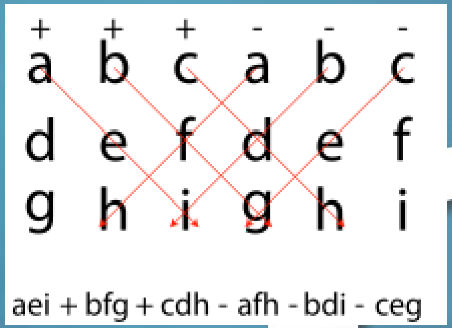
$$\det \boldsymbol{A} = \frac{1}{6} \in_{ijk} \in_{rst} A_{ir} A_{js} A_{kt}$$

Mais genérico

$$|A| \in_{stp} = \in_{ijk} A_{si} A_{tj} A_{pk}$$

Identidade ε - δ

$$\in_{ijk} \in_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}$$



ÁLGEBRA MATRICIAL

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Defina-se *M_{ij}* de *A* formado omitindo a *i* ésima linha e a *j* ésima coluna:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}$$

...

Defina-se a matriz de cofatores *C_{ij}* :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{j=i}^{n} A_{ij} C_{ij}$$

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) + A_{12}(A_{23}A_{31} - A_{21}A_{33}) + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22})$$

det *A* = det *A^T*

det *AB* = det *A* . det *B*

ÁLGEBRA MATRICIAL

Matriz inversa de *A* : *A*$^{-1}$

Para que *A* possua inversa det *A* ≠0

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Matriz sem inversa é dita singular

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{C}^{T}$$

Para um matriz diagonal:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/A_{nn} \end{bmatrix}$$

matriz de cofatores C_{ij}

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$(\mathbf{A}.\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}.\mathbf{A}^{-1}$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Uma matriz quadrada é dita ortogonal se $A^{-1}=A^T$

Portanto: $A\,A^T=I$, $A^TA=I$ e det $A=\pm 1$

O caso que det A=1 é o caso mais importante para a mecânica da contínuo.

Tem-se também que se A e B são matrizes ortogonais, o produto entre A e B também será uma matriz ortogonal

ÁLGEBRA MATRICIAL

Valores e vetores próprios de *A*

A	***x***	***C***
n x n	*n x 1*	1 x 1

Existem *n* vetores *x* que correspondem *n* escalares *λ* que satisfazem a equação: $\mathbf{A}\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}$

Este podem ser determinados resolvendo: $\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \right) \mathrm{x} = 0$

As soluções não triviais para *x* quando:

$$\det \left| \left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \right) \right| = 0$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

$$\det\left|\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)\right|=0$$

Resulta em uma equação de ordem *n* com *n* soluções

Para *n* = 2

$$\det\left|\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)\right|=\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\left(A_{11}-\lambda\right)\left(A_{12}-\lambda\right)-A_{12}A_{21}=0$$

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(A_{11}+A_{22}\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(A_{11}+A_{22}\right)^2-4\left(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}\right)\right\}^{1/2}$$

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(A_{11}+A_{22}\right)+\frac{1}{2}\left\{\left(A_{11}+A_{22}\right)^2-4\left(A_{11}A_{2}-A_{12}A_{21}\right)\right\}^{1/2}$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Os *n* vetores próprios (*i*=1, *n*):

$$\begin{bmatrix} A_{11}-\lambda_i & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda_i & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}-\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{bmatrix} = 0$$

Para *n* = 2

$$\begin{bmatrix} A_{11}-\lambda_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}-\lambda_2 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = 0$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Suponha que A é uma matriz real simétrica

Suponha que λ_1 e $x^{(1)}$ sejam imaginários com conjugados $\bar{\lambda}_1$ e $\bar{x}^{(1)}$

$$Ax^{(1)} = \lambda_1 x^{(1)}$$

Então:

Fazendo a transposta da equação e considerando o seu conjugado complexo, chega-se:

$$\bar{x}^{(1)T} A = \bar{\lambda}_1 \bar{x}^{(1)T}$$

Multiplicando a primeira equação por $\bar{x}^{(1)T}$ e a segunda por $x^{(1)}$ e subtraindo uma da outra, tem-se:

$$x^{(1)T} A x^{(1)} = \lambda_1 x^{(1)T} x^{(1)}$$

$$\bar{x}^{(1)T} A x^{(1)} = \bar{\lambda}_1 \bar{x}^{(1)T} x^{(1)}$$

$$0 = \left(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1\right) \bar{x}^{(1)T} x^{(1)}$$

Como $x^{(1)}$ vem de uma solução não trivial, tem-se $\bar{x}^{(1)T} x^{(1)} \neq 0$ e $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$

Conclusão: os valores próprios de uma matriz real simétrica são valores reais.

ÁLGEBRA MATRICIAL

Considerando, o mesmo caso anterior, porém utilizando o segundo vetor próprio :

$$\boldsymbol{x}^{(2)T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \bar{\lambda}_1 \boldsymbol{x}^{(2)T}\boldsymbol{x}^{(1)}$$
$$\boldsymbol{x}^{(1)T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(2)} = \bar{\lambda}_1 \boldsymbol{x}^{(1)T}\boldsymbol{x}^{(2)}$$

Subtraindo as equações: $\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\boldsymbol{x}^{(1)T}\boldsymbol{x}^{(2)} = 0$

Como os valores próprios, λ_1 e λ_2 são distintos, tem-se:

$$\boldsymbol{x}^{(1)T}\boldsymbol{x}^{(2)} = 0$$

Os vetores próprios são ortogonais

Seguindo o mesmo raciocínio anterior:

$$\boldsymbol{x}^{(r)T}\boldsymbol{x}^{(s)} = 0 \quad (r \neq s)$$
$$\boldsymbol{x}^{(r)T}\boldsymbol{x}^{(s)} = 1 \quad (r = s)$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Suponha que A é uma matriz real simétrica (n x n)

Suponha os n valores próprios de A: λ_i

Suponha os n vetores próprios de A normalizado:

$w^{(i)}$ tal que $\mathrm{w}^{(i)}.\mathrm{w}^{(i)} = 1$

Considerando um vetor arbitrário b, então:

$$\mathbf{A}\mathrm{b} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \left(\mathrm{w}^{(i)}.\mathrm{b} \right) \mathrm{w}^{(i)}$$

Seja Λ a matriz diagonal cujos componentes são os valores próprios:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Seja Q a matriz contendo os vetores próprios:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} w_1^{(1)} & w_1^{(2)} & \cdots & w_1^{(n)} \\ w_2^{(1)} & w_2^{(2)} & \cdots & w_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^{(1)} & w_n^{(2)} & \cdots & w_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

ÁLGEBRA MATRICIAL

Então: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T$ $\quad \mathbf{Q}^T.\mathbf{Q} = \mathbf{Q}.\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ $\quad \mathbf{Q}^T.\mathbf{A}.\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$

Isto permite inverter a matriz *A* de forma simples conhecendo os vetores e valores próprios:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Q}^T$$

Sendo:

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n \end{bmatrix}$$

Considerando: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{1/2}$ **Então:**

$$\boldsymbol{\Lambda}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Tal que: $\mathbf{B}.\mathbf{B} = \mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Q}^T$$

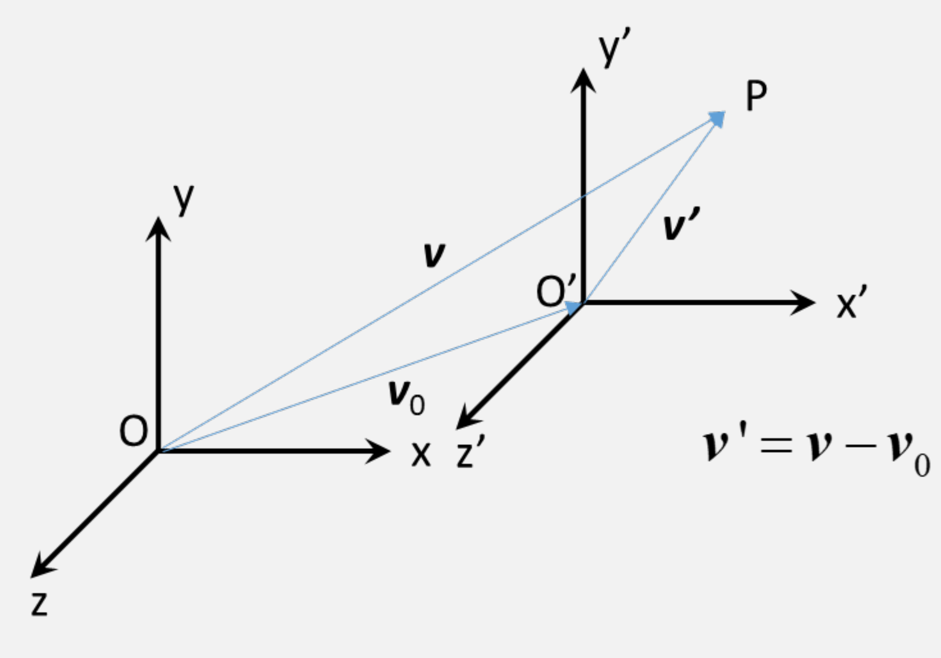
TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Um vetor é independe do sistema de coordenadas. Caso um sistema de coordenadas seja introduzido, o vetor pode ser representado por seus componentes para esse determinado sistema de coordenadas, porém um mesmo vetor possui diferentes componentes para sistemas de coordenadas distintos.

$$a_i \neq a'_i$$

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

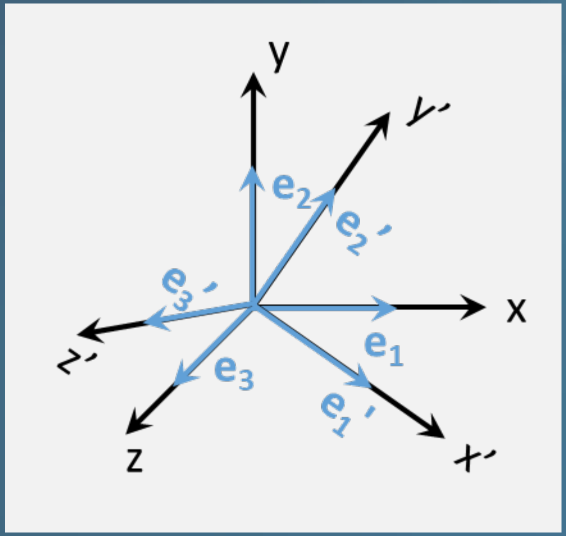
Translação sem rotação do sistema de coordenadas



Na translação os vetores de base não mudam, portanto os componentes do vetor *a* em relação a O' e O são os mesmos.

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Introduzindo um novo sistema retangular cartesiano com a mesma origem em O, porém rotacionado.



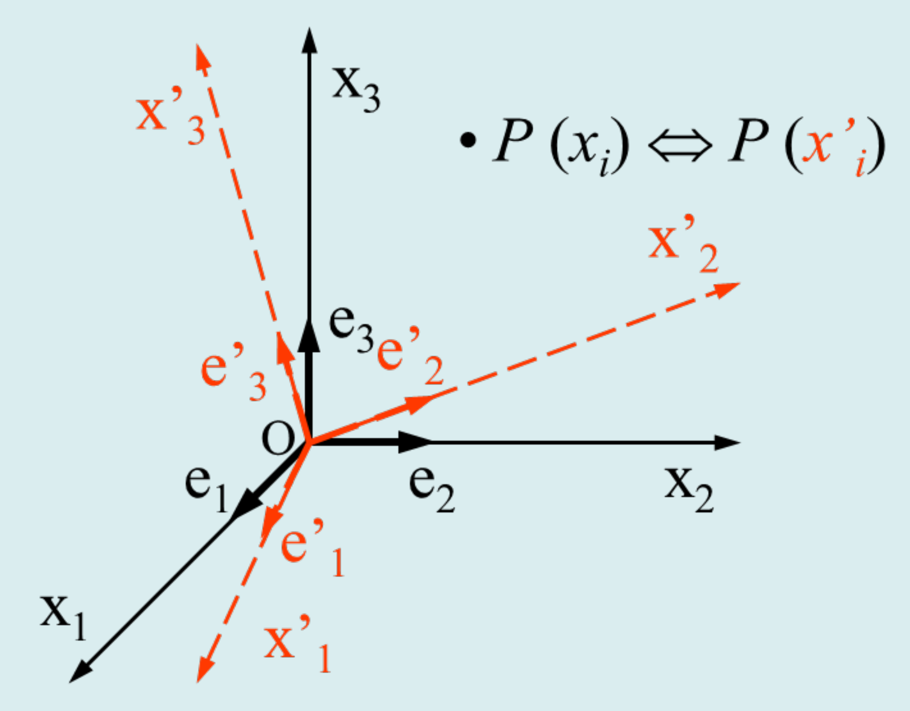
Um vetor *v* com componente em relação ao sistema não rotacionado e um vetor *v'* em relação ao sistema rotacionado, portanto:

$$V = a_i e_i = a'_i e'_i$$

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

vetor $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = v_i$

$\mathbf{V} = (v'_1, v'_2, v'_3) = v'_1\mathbf{e}'_1 + v'_2\mathbf{e}'_2 + v'_3\mathbf{e}'_3 = v'_i$



$M_{ij} = \cos(e'_i, e_j)$

M_{ij} (i,j=1, 2, 3) são os cossenos da base e'_i em relação ao sistema na rotacionado e_j

$v'_i = M_{ij}\, v_j$

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

$$M_{ij} = e'_i \cdot e_j$$

		Eixos	
Eixos	x_1	x_2	x_3
x'_1	M_{11}	M_{12}	M_{13}
x'_2	M_{21}	M_{22}	M_{23}
x'_3	M_{31}	M_{32}	M_{33}

$$M_{ij} \neq M_{ji}$$

ou

$$\mathbf{M} \neq \mathbf{M}^T$$

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

$$M_{ij} = e'_i \cdot e_j$$

		Eixos	
Eixos	x_1	x_2	x_3
x'_1	M_{11}	M_{12}	M_{13}
x'_2	M_{21}	M_{22}	M_{23}
x'_3	M_{31}	M_{32}	M_{33}

$$M_{ij} \neq M_{ji}$$

ou

$$\mathbf{M} \neq \mathbf{M}^T$$

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

a base (e'_i) pode ser expressa em função da base (e_i)

$$e'_i = (e'_i \cdot e_1)\, e_1 + (e'_i \cdot e_2)\, e_2 + (e'_i \cdot e_3)\, e_3$$

$$e'_i = M_{i1} e_1 + M_{i2}\, e_2 + M_{i3}\, e_3 = M_{ij}\, e_j$$

ou inversamente

$$e_i = M_{ji} e'_j$$

também as componentes dos vetores na nova base podem ser expressas em função das componentes do vetor na base antiga

$$v'_i = M_{ij} v_j$$

ou inversamente

$$v_i = M_{ji} v'_j$$

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

$$\mathrm{e}'_i = M_{ij}\, \mathrm{e}$$

$$\mathrm{e}'_i \cdot \mathrm{e}'_j = \delta_{ij} = M_{ir}\, \mathrm{e}_r \cdot M_{jk}\, \mathrm{e}_k = M_{ir}\, M_{jk}\, \delta_{rk} = M_{ir}\, M_{jr}$$

Ou seja: $M_{ir}\, M_{jr} = \delta_{ij}$

$$M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{13}^2 = 1$$
$$M_{21}^2 + M_{22}^2 + M_{23}^2 = 1$$
$$M_{31}^2 + M_{32}^2 + M_{33}^2 = 1$$
$$M_{11}M_{21} + M_{12}M_{22} + M_{13}M_{23} = 0$$
$$M_{11}M_{31} + M_{12}M_{32} + M_{13}M_{33} = 0$$
$$M_{21}M_{31} + M_{22}M_{32} + M_{23}M_{33} = 0$$

Como M_{ij} são os elementos da matriz quadrada M, a relação acima é equivalente a:

$$MM^T = I$$

Portanto *M* é ortogonal!!

TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

também o ponto P com coordenadas x_i na base (e_i) pode ser dado pelas coordenadas x'_i na base (e'_i)

$$x'_i = M_{ij}$$ **e** $$x_i = M_{ji}$$

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(M_{ik}x_k\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(M_{i(k=j)}x_{(k=j)}\right)}{\partial x_j} = M_{ij}$$

portanto

$$M_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

TENSOR CARTESIANO

Produto Diádico ou tensorial

Há certas grandezas físicas, desconsiderando as grandezas escalares ou produtos vetoriais, que necessitam a especificação de dois vetores para a sua descrição. Por exemplo, para descrever a força agindo numa superfície é necessário conhecer a magnitude e direção da força assim como a orientação da superfície.
O produto diádico de dois vetores *a* e *b* é descrito como:

$$\boldsymbol{a} \otimes$$

Propriedades do produto diádico:

$$(\alpha \boldsymbol{a}) \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \otimes (\alpha \boldsymbol{b}) = \alpha (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \qquad (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = b_j c_j a_k \boldsymbol{e}_k$$

$$\boldsymbol{a} \otimes (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{c} \qquad \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \boldsymbol{c} = a_i b_i c_k \boldsymbol{e}_k$$

$$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{a}$$

TENSOR CARTESIANO

Produto Diádico (continuação)

Exemplo: resultado C_{ij} do produto diádico dos vetores A_i e B_i é como combinação $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$

$$\mathbf{C} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} C_{ij} e_i \otimes e_j$$

Vale a transformação para o sistema de coordenas x_i

$$C'_{ij} = A'_i B'_j = \left(M_{is} A_s\right)\left(M_{jk} B_k\right) = M_{is} M_{jk} C_{sk}$$

a transformação é semelhante àquela para vetores

Nem todo *produto diádico* pode ser obtido da combinação de vetores, mas a <u>transformação de coordenadas pode ser aplicada a todos os *produtos diádicos*</u>

TENSOR CARTESIANO

Produto Diádico (continuação)

Exemplo: gradiente G_{ij} de um vetor u_i

$$\mathbf{G} = \mathrm{u} \otimes \nabla$$

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3$$

$$du_2 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3$$

$$\begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

TENSOR CARTESIANO

O termo <u>TENSOR</u> vem da associação com a tensão num ponto

$$\mathrm{t} = \mathrm{n}\sigma$$

O tensor *σ* representa as projeções de um vetor de tração *t* num ponto *P*, num sistema de coordenadas cartesiano alinhado com o versor normal à superfície *n* que passa no ponto *P*. Assim é possível representar o estado de tensões no ponto *P* independente na direção da superfície (ou do versor normal *n*)

TENSOR CARTESIANO

Existem tensores de qualquer ordem e a regra de transformação de coordenadas é similar

Esses tensores são denominados Tensores Cartesianos devido a restrição da regra de transformação de coordenadas para os sistemas cartesianos

Um tensor é uma combinação linear de produtos diádicos. Por exemplo, um tensor de segunda ordem, pode ser obtido por:

$$\mathbf{A} = A_{ij}\mathrm{e}_i \otimes \mathrm{e}_j$$

TENSOR CARTESIANO

Um tensor existe independente do sistema de coordenadas adotado, porém seus componentes somente podem ser especificados após a adoção de um sistema de referencia, e os valores de seus componentes dependem da escolha desse sistema.

$$a_{ij} \neq a'_{ij}$$

TENSOR CARTESIANO

Tensor de ordem zero ⇒ temperatura ⇒ 1 escalar, não é afetado por transformações de coordenadas

Tensor de primeira ordem ⇒ 3 componentes v_i no sistema x_i, vale a transformação para o sistema x'_i

$$v_i' = M_{ij}$$

Tensor de segunda ordem ⇒ 9 componentes a_{ij} no sistema x_i, vale a transformação para o sistema x'_i

$$a_{ij}' = M_{im} M_{jn} a_{mn}$$

Tensor de terceira ordem ⇒ 27 componentes a_{ijk} no sistema x_i, vale a transformação para o sistema x'_i

$$a_{ijk}' = M_{im} M_{jn} M_{kp} a_{mnp}$$

TENSOR CARTESIANO

Um vetor é determinado pelas 3 componentes v_i no sistema x_i

Se as 3 componentes v_i no sistema x_i são conhecidas, determina-se as componentes v'_i no sistema x'_i pela transformação $v'_i = M_{ij} v_j$

A transformação é válida para um vetor e é aplicável a qualquer grandeza física:

- **Velocidade;**
- **Força**
- **Vetor posição**
- **Gradiente de um campo escalar** $G_i = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$

TENSOR CARTESIANO

No campo escalar ϕ definido no sistema de coordenadas x_i o gradiente do campo escalar é dado por $G_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$

$$\left(\mathrm{G} = \mathrm{grad}\, \phi = \nabla \phi \right)$$

e vale a transformação

$$G_i' = \frac{\partial \phi}{\partial x_i'} = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = M_{ik} G_k$$

TENSOR CARTESIANO

Igualdade

$$A = B \quad \text{se} \quad a_{ij} = b_{ij}$$

Soma

$$C = A + B \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} b_j$$

$$\begin{aligned} c_1 &= A_{11} b_1 + A_{12} b_1 + \cdots + A_{1n} b_n \\ c_2 &= A_{21} b_1 + A_{22} b_1 + \cdots + A_{2n} b_n \\ &\vdots \\ c_n &= A_{n1} b_1 + A_{n2} b_1 + \cdots + A_{nn} b_n \end{aligned}$$

Multiplicação

- por escalar

$$B = \alpha A \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

- entre tensores

$$c_{ijk} = a_i b_{jk}$$

TENSOR CARTESIANO

Igualdade

$$A = B \quad \text{se} \quad a_{ij} = b_{ij}$$

Soma

$$C = A + B \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & A_{13} + B_{13} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & A_{23} + B_{23} \\ A_{31} + B_{31} & A_{32} + B_{32} & A_{33} + B_{33} \end{bmatrix}$$

TENSOR CARTESIANO

Multiplicação

- por escalar

$$B = \alpha A \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \alpha A_{13} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \alpha A_{23} \\ \alpha A_{31} & \alpha A_{32} & \alpha A_{33} \end{bmatrix}$$

- por vetor

$$\mathrm{c} = \mathbf{A}\mathrm{b}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + A_{13}b_3 \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + A_{23}b_3 \\ A_{31}b_1 + A_{32}b_2 + A_{33}b_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathrm{b} \neq \mathrm{b}\mathbf{A}$$

A menos que *A* seja simétrico

A=A^T

ou

A_{ij}=A_{ji}

$$\mathrm{c} = \mathrm{b}\mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{12} + b_3A_{13} \\ b_1A_{21} + b_2A_{22} + b_3A_{23} \\ b_1A_{31} + b_2A_{32} + b_3A_{33} \end{bmatrix}$$

TENSOR CARTESIANO

Multiplicação

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{B} \equiv A_{ik}\,B_{kj}$$

- por tensor

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32} & A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23}+A_{13}B_{33} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32} \\ A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21}+A_{33}B_{31} & A_{31}B_{12}+A_{32}B_{22}+A_{33}B_{32} & A_{31}B_{13}+A_{32}B_{23}+A_{33}B_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$$ **Não tem a propriedade comutativa**

TENSOR CARTESIANO

Multiplicação

$$\mathrm{a} = a_i \mathrm{e}_i \qquad \mathbf{B} = B_{ij} \mathrm{e}_i \otimes \mathrm{e}_j$$

$$a_i^{'} = M_{ip} a_p \qquad B_{ij}^{'} = M_{ir} M_{js} B_{rs}$$

$$C_{ijk} = a_i B_{jk} \qquad \mathbf{C} = C_{ijk} \mathrm{e}_i \otimes \mathrm{e}_j \otimes \mathrm{e}_k$$

$$C_{ijk}^{'} = M_{ip} M_{jr} M_{ks} C_{prs} = M_{ip} M_{jr} M_{ks} a_p B_{rs} = a_i^{'} B_{jk}^{'}$$

O tensor C é chamado de produto externo do vetor *a* e do tensor B e é escrito como:

$$\mathbf{C} = \mathrm{a} \otimes \mathbf{B}$$

De maneira similar um tensor de quarta ordem D pode ser obtido pelo mesmo processo

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$$

$$D_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$$

TENSOR CARTESIANO

Tensor transposto $\mathbf{A}^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{b}.\mathbf{A}^T = \mathbf{A}.\mathrm{b} \qquad \left(\mathbf{A}.\mathbf{B}\right)^T = \mathbf{A}^T.\mathbf{B}^T$$

Numa matriz simétrica $A_{ij}=A_{ji}$

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

TENSOR CARTESIANO

Traço

$$tr(\mathbf{A}) = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$$

$$tr(\mathbf{A}) = \mathrm{e}_1 \times \mathbf{A} \times \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 \times \mathbf{A} \times \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 \times \mathbf{A} \times \mathrm{e}_3$$

Traço de A, tr(A) é um invariante do tensor A

TENSOR CARTESIANO

Invariantes do Tensor

Invariantes de um tensor são funções dos componentes de um tensor que se mantêm constantes independente do sistema de coordenadas

$$\{ e_1, e_2, e_3 \} \quad \textbf{ou} \quad \{ e'_1, e'_2, e'_3 \}$$

Exemplos de Invariantes:

- **Os 3 valores próprios**
- **O Determinante**
- **O Traço**
- **Os Produtos Interno e Externo**

TENSOR CARTESIANO

Contração

Produto Interno

$$\mathbf{A}:\mathbf{B} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{13}B_{13} + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{23} + A_{31}B_{31} + A_{32}B_{32} + A_{33}B_{33}$$

é um escalar

$$\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathbf{B}:\mathbf{A}$$

e também

$$\mathbf{A}:\mathbf{I} = tr(\mathbf{A})$$

I é o Tensor Identidade

Produto Externo

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = A_{11}B_{11} + A_{21}B_{12} + A_{31}B_{13} + A_{12}B_{21} + A_{22}B_{22} + A_{32}B_{23} + A_{13}B_{31} + A_{23}B_{32} + A_{33}B_{33}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}^{T}:\mathbf{B}$$

é um escalar

TENSOR CARTESIANO

Contração

$$a'_{ijk} = M_{ip} M_{jq} M_{kr} a_{pqr}$$

$$\begin{aligned} a'_{ikk} &= M_{ip} \left(M_{kq} M_{kr} \right) a_{pqr} \\ &= M_{ip} \delta_{qr} a_{pqr} \\ &= M_{ip} a_{prr} \end{aligned}$$

$$a_{ikk} = a_{i11} + a_{i22} + a_{i33}$$

Transformação para tensor de 1ª ordem $\Rightarrow$ a_{ikk} = é de 1ª ordem

TENSOR CARTESIANO

EESC • USP

Multiplicação de Tensores - algumas operações em diferentes notações

Considere o tensor de segunda ordem $\boldsymbol{B}$ e o vetor $\boldsymbol{a}$,
a operação de contração $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a} = B_{ij}a_j = \boldsymbol{c}$

Notação Diádica	Notação indicial	Notação Matricial
$\alpha = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	$\alpha = a_i b_i$	$(\alpha) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$	$A_{ij} = a_i b_j$	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$
$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}$	$b_i = A_{ij}a_j$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}$	$b_i = a_i A_{ij}$	$\boldsymbol{b}^T = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}$
$\alpha = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b}$	$\alpha = a_i A_{ij} b_j$	$(\alpha) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$	$C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^T$	$C_{ij} = A_{ik}B_{jk}$	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$
$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$	$D_{ij} = A_{ik}B_{km}C_{mj}$	$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$

TENSOR CARTESIANO

Simetria e anti-simetria

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad\qquad a_{ij} = -a_{ji}$$

Se um tensor é simétrico ou anti-simétrico somente em um par de índices, ele é dito simétrico ou anti-simétrico neste par de índices

$$a_{ijk} = a_{ikj} \qquad\qquad a_{ijk} = -a_{ikj}$$

Se um tensor é simétrico ou anti-simétrico em um par de índices em um sistema de coordenadas, então ele é simétrico ou anti-simétrico em todos os sistemas de coordenadas

Se $a_{ijk} = a_{ikj}\ (x_i)$ então $a'_{ijk} = a'_{ikj}\ (x'_i)$

TENSOR CARTESIANO

Decomposição de um tensor em um tensor simétrico e outro tensor anti-simétrico

$$a_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) + \tfrac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right) = b_{ij} + c_{ij}$$

Tensor simétrico

$$b_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right)$$

Tensor anti-simétrico

$$c_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right)$$

TENSOR CARTESIANO

Tensor	Ordem	Observação
$u_i + v_i$	1	adição
cd	0	multiplicação
$c\, u_i$	1	multiplicação
$u_i\, v_j$	2	multiplicação
$u_i\, a_{jk}$	3	multiplicação
$u_i\, v_i$	0	produto escalar
$\varepsilon_{ijk}\, u_j\, v_k$	1	produto vetorial
$u_i\, u_i$	0	(módulo)^2
$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$	0	primeiro invariante de a_{ij}
$u_r\, a_{rk}$	1	contração
$u_{i,j}$	2	diferenciação
$u_{i,i} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}$	0	divergente, $\cdot$ U
$\varepsilon_{ijk}\, u_{k,j}$	1	rotacional, x U

TENSOR ISOTRÓPICO

O tensor identidade é dado por: $\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathrm{e}_i \otimes \mathrm{e}_j$

Em termos de uma outra base:

$$\mathbf{I} = \delta_{ij} M_{ri} M_{sj} \mathrm{e}_r^{'} \otimes \mathrm{e}_s^{'} = M_{ri} M_{si} \mathrm{e}_r^{'} \otimes \mathrm{e}_s^{'} = \delta_{ij} \mathrm{e}_i^{'} \otimes \mathrm{e}_j^{'}$$

O tensor *I* possui os mesmos componentes em qualquer sistema de coordenadas. Esse tipo de tensor é chamado de tensor isotrópico.
Pode ser demonstrado que somente tensores isotrópicos de ordem 2 da forma p*I*, onde p é um escalar. Esse tipo de tensor são chamados também de tensores esféricos.

O tensor alternante $\in_{ijk}$ também é um tensor isotrópico.

TENSOR ISOTRÓPICO

Um tensor é isotrópico se seus componentes possuem o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas

$$a'_{ij} = M_{ir} M_{js} a_{rs} = a_{ij}$$

Exemplos

- Escalar $a\,(x_i) = a\,(x'_i)$

- Tensor δ_{ij} $\delta'_{ij} = M_{ir} M_{js} \delta_{rs} = \delta_{ij}$

- Tensor $\in_{ijk}$ $\in'_{ijk} = M_{ir} M_{js} M_{kt} \in_{rst} = I \in_{ijk} \Rightarrow \in'_{ijk} = \in_{ijk}$

- Tensor genérico $a_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$

O tensor alternante $\in_{ijk}$ também é um tensor isotrópico.

REGRA DO QUOCIENTE

Dado 9 valores a_{ij} no sistema de coordenadas x_i *e* dado o tensor b_{ij}

se $a_{ij}b_{ij} = c$ **é um escalar**

então a_{ij} **é um tensor**

Se

$a_{ij}\,u_j = v_i$ **é um vetor para qualquer vetor u_i**

$a_{ij}\,b_{jk} = c_{ik}$ **é um tensor para qualquer tensor b_{ij}**

$a_{ij\ldots k}\,u_i\,v_j \ldots w_k = c$ **é um escalar para qualquer número de vetores u_i, v_j, ..., w_k**

então a_{ij} e $a_{ij\ldots k}$ são tensores

INTEGRAL SUPERFÍCIE-VOLUME (TEOREMA DA DIVERGÊNCIA)

O integral de superfície da componente normal de um vetor a_i tomada sobre uma superfície fechada S é igual à integral do divergente de a_i sobre o volume V interno à superfície

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \iint_{\Gamma} a_i n_i \, dS$$

onde n_i é o versor normal à superfície S voltado para fora

O mesmo é válido para integral de superfície da componente normal de um tensor de ordem 2 A_{ij}

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} dV = \iint_{\Gamma} A_{ij} n_i \, dS$$

EXERCÍCIO 1

Se:

$$y1 = a11\ x1 + a12x2 + a13\ x3$$
$$y2 = a21\ x1 + a22x2 + a23\ x3$$
$$y3 = a31\ x1 + a32x2 + a33\ x3$$

Qual o índice livre?

EXERCÍCIO 2

Se:

$$y = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i x_j$$

Quantos termos tem o somatório?

Se:

$$y = a1\ x_1 + a_2 x2 + a_3\ x_3 + \ldots + a_n\ x_n$$

Notação de soma?

Notação de Einstein?

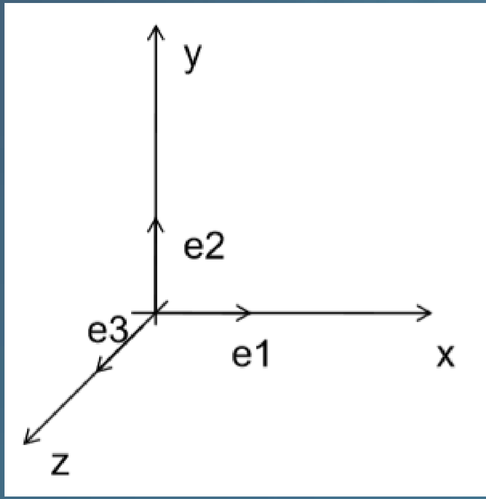
Se:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Encontre *A* x *δ* (delta de Kronecker)

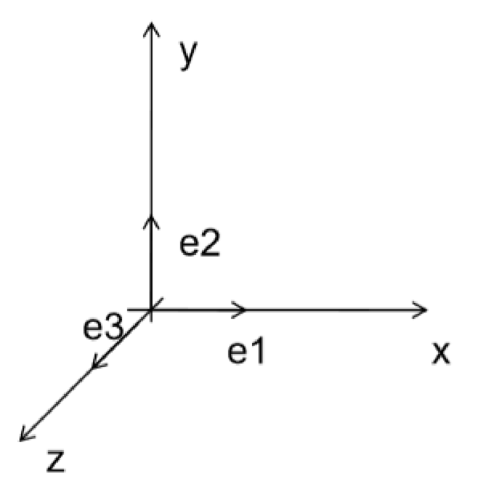
EXERCÍCIO 3

Se e é o vetor unitário:



Encontre o produto escalar ei.ej

Se e é o vetor unitário:



Encontre o produto vetorial ei x ej

EXERCÍCIO 4

Se A, B e C são tensores e seja T uma transformação linear, tal que

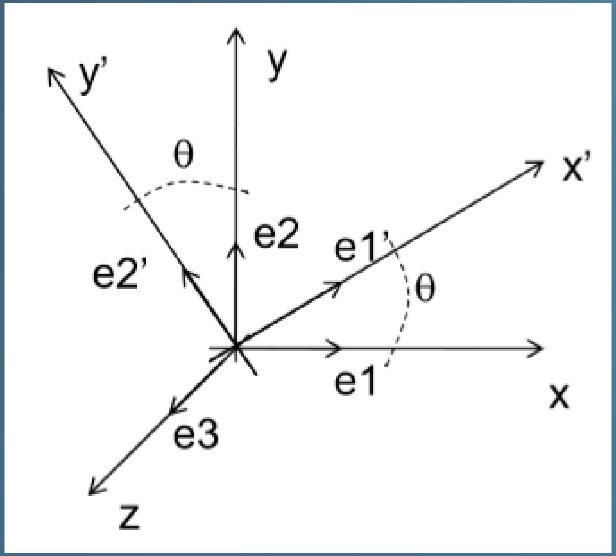
$$T(aA) = aT(A)$$
$$T(A+B) = T(A) + T(B)$$

Se $T(A) = A+B$ e $T(B) = A-B$ e $C = A/2 + B$

Então, calcule $T(C)$

EXERCÍCIO 5

Encontre o tensor rotação de ângulo θ no plano XY



[M]=[T][e]

EXERCÍCIO 6

Considere a matriz A e os autovalores λ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1$$

Encontre os auto vetores vi

EXERCÍCIO 7

Se T é um tensor simétrico, tal que

$$T_{ij} = T_{ji} \qquad \text{e} \qquad S = (T + T^T)/2$$

Se T é um tensor anti-simétrico, tal que

$$T_{ij} = -T_{ji} \qquad \text{e} \qquad A = (T - T^T)/2$$

Mostre que qualquer tensor pode ser decomposto em uma soma de um tensor simétrico e seu correspondente anti-simétrico.

$$T = S + A$$