Prova Sub 2 (1o semestre 2021, 11 de Agosto). MAE5704 Técnicas Computacionais I. Pode ser obtido no máximo 8 pontos: 1 ponto para cada exercício.

Prof.A.Iambartsev (yambar@ime.usp.br)

1. Usando método de Newton construir algoritmo que procure raiz do seguinte sistema das equações

$$\begin{cases} x^4 + y^6 = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

   Calcule aproximação de um passo para raiz começando de ponto $x_0 = y_0 = 1$.

2. Provide an iteration formula of the Newton-Raphson algorithm in order to find the minimum of the function $f(x, y) = 2(x - 1)^4 + y^2 + 1$. Find first-step approximation for the root starting from $x_0 = y_0 = 2$.

3. Suppose we observe $x_1, \ldots, x_m$ i.i.d. from exponential with rate θ and remaining $x_{m+1}, \ldots, x_n$ are censored at the threshold a. Write the corresponding likelihood function for this experiment. Suggest and write the corresponding complete likelihood.

4. Make two EM steps for previous item and provide an iterative formula for parameter θ.

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias binárias que têm correlação. Defina as matrizes A e B cujos termos são $A_{ij} = P(X = i \mid Y = j)$ e $B_{ij} = P(Y = i \mid X = j)$. Encontre a distribuição marginal de X em função das matrizes A e B.

6. Provide a Metropolis-Hastings algorithm in order to simulate the two-dimensional random vector (X, Y) with joint density $f_{X,Y}(x, y) = 6xy^2$ if $x, y \in (0, 1)$ and $f_{X,Y}(x, y) = 0$ if $x, y \notin (0, 1)$.

7. Queremos usar MH para simular v.a. com valores 1, 2 e 3 com respectivas probabilidades 0.5, 0.4 e 0.1. Usaremos como cadeia auxiliar a matriz de transição

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

   Achar a matriz de transição P para construção MH.

8. Considere função em $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = e^{-(x-3)^2-(y-2)^2} \cos(5(x - 3) + 10(y - 2)),$$

   cujo máximo global está em ponto $(3, 2)$. Construir Simulated Annealing algoritmo para maximizar $f(x, y)$. Escreve pseudocódigo detalhado do algoritmo.