ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

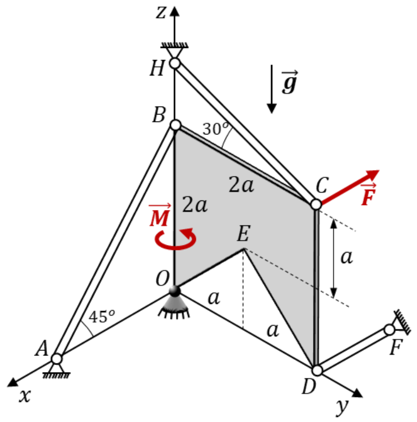
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

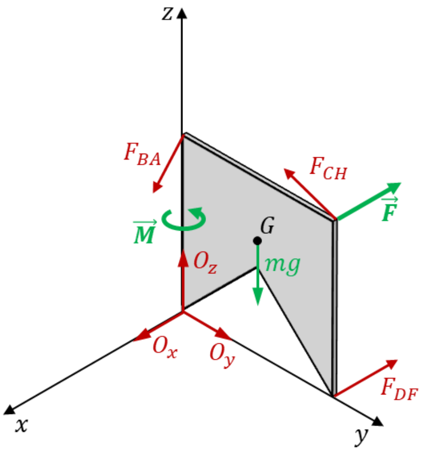
PME 3100 – MECÂNICA I (Reoferecimento) – Prova de Recuperação – 5 de Julho de 2021
Duração da Prova: 120 minutos (Início: 18:00 – Término: 20:00)

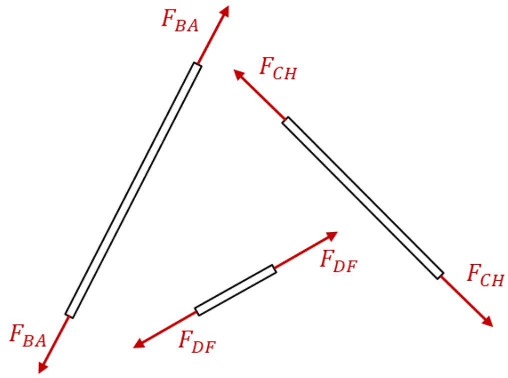
1ª Questão (4,0 pontos). No sistema em equilíbrio mostrado na figura, a placa homogênea $OBCDE$, de massa m, está no plano Oyz e tem seu movimento restrito pela articulação em O e pelas barras articuladas AB, CH e DF. Todas as barras possuem peso desprezível e a barra DF é paralela ao eixo Ox. Sobre a placa atuam a força $(\vec{\boldsymbol{F}}, C) = -F\hat{\mathbf{i}}$, o peso $(\vec{\boldsymbol{P}}, G) = -mg\hat{\mathbf{k}}$ e o momento binário $\vec{\boldsymbol{M}} = M\hat{\mathbf{k}}$. Determinar:

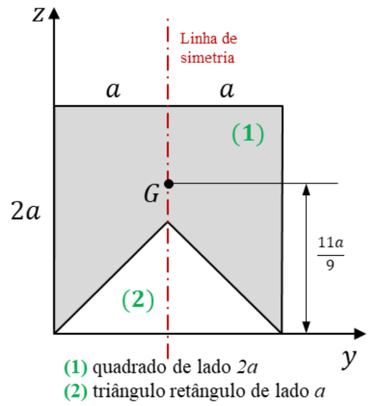
a) As coordenadas do centro de massa G da placa no sistema $Oxyz$.
b) O diagrama de corpo livre das barras e da placa.
c) As equações de equilíbrio da placa.
d) Os esforços atuantes nas barras.
e) As reações vinculares em O.



RESOLUÇÃO







a) Placa no plano Oyz, portanto: $x_G = 0$. Por simetria, obtém-se também $y_G = a$. Como a placa é homogênea, tem-se (veja figura acima):

$$A_{total} z_G = \sum_{i=1}^{n} A_i z_i \Rightarrow (A_1 - A_2) z_G = A_1 z_{G_1} - A_2 z_{G_2} \quad \Rightarrow \quad \left(4a^2 - \frac{2a^2}{2}\right) z_G = 4a^2 a - \frac{2a^2}{2}\left(\frac{a}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad z_G = \frac{11a}{9}$$

Portanto, o vetor posição do centro de massa G da placa pode ser expresso, como segue: $(G - O) = a\left(\hat{\mathbf{j}} + \frac{11}{9}\hat{\mathbf{k}}\right)$ **(0,5)**

b) Veja os DCLs na figura acima. **(1,0)**

c) Equações de equilíbrio da placa:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \begin{cases} -F + \frac{\sqrt{2}F_{BA}}{2} - F_{DF} + X_O = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}F_{CH}}{2} + Y_O = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}F_{BA}}{2} + \frac{F_{CH}}{2} - mg + Z_O = 0 \end{cases} \qquad \vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \begin{cases} aF_{CH} + a\sqrt{3}F_{CH} - mga = 0 \\ -2aF + a\sqrt{2}F_{BA} = 0 \\ 2aF + 2aF_{DF} + M = 0 \end{cases}$$

(1,0)

d-e) Resolvendo o sistema linear de equações para as variáveis $(X_O, Y_O, Z_O, F_{BA}, F_{CH}, F_{DF})$, obtêm-se:

$$X_O = -\frac{2aF + M}{2a} \qquad Z_O = F + \frac{mg(5-\sqrt{3})}{4} \qquad F_{CH} = \frac{mg(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$Y_O = \frac{mg(3-\sqrt{3})}{4} \qquad F_{BA} = \sqrt{2}F \qquad F_{DF} = -\frac{2aF + M}{2a}$$

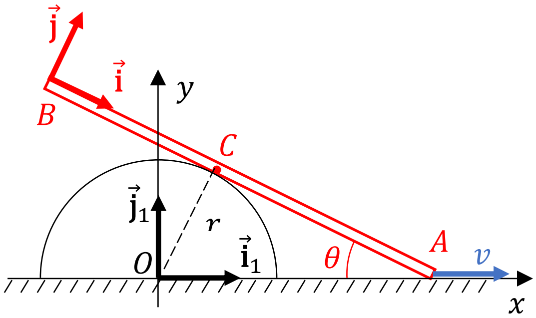
(0,5) **(0,5)** **(0,5)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão. (3,0 pontos). Conforme mostrado na figura, a barra AB se move no plano Oxy mantendo contato permanente com a semicircunferência de centro O e raio r e com o eixo horizontal Ox. Admita-se, ainda, que a extremidade A da barra se mova com velocidade $v\vec{\mathbf{i}}_1$ (v constante). Expressando os resultados na base $\left(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}}\right)$ ligada à barra, determine, para o instante em que $\theta = \pi/4$:



a) As componentes segundo as direções $\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}}$ (nesta ordem) da velocidade do ponto de contato $C \in$ barra.

b) A velocidade angular da barra AB.

c) A aceleração angular da barra AB.

d) As componentes nas direções $\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}}$ (nesta ordem) da aceleração do ponto $C \in$ barra.

RESOLUÇÃO

a) Notemos, inicialmente, que a velocidade do ponto C tem a direção de $(A-B)$, dado que não existe perda de contato entre a barra e a semi-circunferência. Assim, pode-se escrever:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_C = v_C\vec{\mathbf{i}} \qquad (1)$$

Aplicando-se a equação do vínculo cinemático entre os pontos A e B da barra, tem-se,

$$v\vec{\mathbf{i}}_1\cdot\vec{\mathbf{i}} = \vec{\boldsymbol{v}}_C\cdot\vec{\mathbf{i}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{v}}_C = v\cos\theta\,\vec{\mathbf{i}} \qquad (2)$$

Aplicando-se a equação do campo de velocidades entre os pontos A e C da barra, tem-se:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_A = \vec{\boldsymbol{v}}_C + \omega\vec{\mathbf{k}}\wedge(A-C) \quad\Rightarrow\quad v\vec{\mathbf{i}}_1 = v\cos\theta\,\vec{\mathbf{i}} + \omega\vec{\mathbf{k}}\wedge\frac{r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{i}} = v\cos\theta\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\omega r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{j}} \qquad (3)$$

Decompondo $\vec{\mathbf{i}}_1$ na base $\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}}$, tem-se:

$$\vec{\mathbf{i}}_1 = \left(\vec{\mathbf{i}}_1\cdot\vec{\mathbf{i}}\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(\vec{\mathbf{i}}_1\cdot\vec{\mathbf{j}}\right)\vec{\mathbf{j}} = \cos\theta\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\theta\vec{\mathbf{j}} \qquad (4)$$

Logo, tem-se:

$$v\vec{\mathbf{i}}_1 = v\left(\cos\theta\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\theta\vec{\mathbf{j}}\right) = v\cos\theta\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\omega r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{j}} \qquad (5)$$

b) A Eq. 5 se decompõe em duas equações escalares, a saber:

$$v\cos\theta = v\cos\theta \quad \text{(identidade)}$$

$$v\sin\theta = \frac{\omega r}{\tan\theta} \quad\Rightarrow\quad \omega = \frac{v}{r}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \quad \text{e} \quad \vec{\boldsymbol{v}}_C = v\cos\theta\,\vec{\mathbf{i}} + v\sin\theta\,\vec{\mathbf{j}} \qquad (6)$$

Logo, a velocidade angular da barra é dada por: $\omega = \frac{v}{r}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \quad\Rightarrow\quad \omega(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v}{r}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}_C(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}v}{2}\left(\vec{\mathbf{i}}+\vec{\mathbf{j}}\right)$ (7)

c) A aceleração angular da barra AB é dada por:

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{r}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{2v}{r}\frac{2\sin\theta\cos^2\theta\dot{\theta} + \sin^3\theta\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{4v}{r}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\dot{\theta} \qquad (8)$$

Como $\dot{\theta} = \omega$, então:

$$\dot{\omega} = \frac{4v}{r}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\omega = \frac{4v}{r}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\frac{v}{r}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{4v^2}{r^2}\tan^3\theta \quad\Rightarrow\quad \dot{\omega}(\pi/4) = \frac{4v^2}{r^2} \qquad (9)$$

d) A aceleração do ponto C é:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_C = \vec{\boldsymbol{a}}_A + \dot{\omega}\vec{\mathbf{k}}\wedge\left(-\frac{r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{i}}\right) + \omega\vec{\mathbf{k}}\wedge\left[\omega\vec{\mathbf{k}}\wedge\left(-\frac{r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{i}}\right)\right] = \vec{\mathbf{0}} - \frac{\dot{\omega}r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\omega^2 r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{i}} = \frac{\omega^2 r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{i}} - \frac{\dot{\omega}r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{j}} \qquad (10)$$

Ou seja:

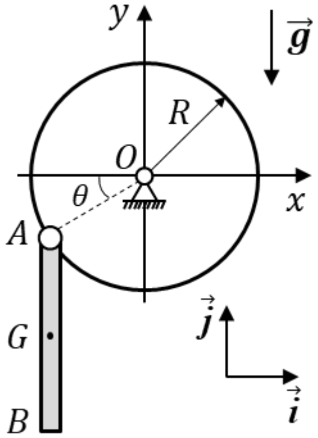
$$\vec{\boldsymbol{a}}_C = \left(\frac{v}{r}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2\frac{r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{i}} - \frac{4v^2}{r^2}\tan^3\theta\frac{r}{\tan\theta}\vec{\mathbf{j}} = \frac{v^2}{r}\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}\vec{\mathbf{i}} - \frac{4v^2}{r}\tan^2\theta\,\vec{\mathbf{j}} \quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{a}}_C = \frac{v^2}{r}\left(\frac{1}{2}\vec{\mathbf{i}} - 4\vec{\mathbf{j}}\right) \qquad (11)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos). No sistema mostrado na figura, a barra AB, de massa m e comprimento $2R$, está articulada no ponto A ao disco de massa m e raio R. O sistema está inicialmente em repouso, com a barra AB na posição vertical e com a reta que passa por O e A inclinada em um ângulo θ em relação à horizontal. Para o **instante imediatamente após a liberação do sistema**, determine:

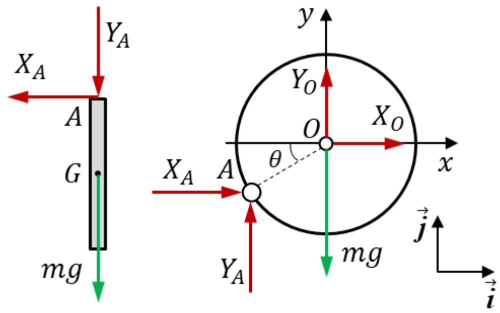


a) O vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ da barra.
b) A aceleração do centro de massa G da barra.
c) O vetor aceleração angular $\dot{\vec{\Omega}}$ do disco.
d) A força que a barra aplica no disco pela articulação do ponto A.

RESOLUÇÃO

As equações da Cinemática para a barra e o disco, fornecem:

$$\textbf{Barra:}\ \begin{cases} \vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)] \\ \vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2}\vec{j}\right) = \vec{a}_A + \left(\frac{\dot{\omega}L}{2}\right)\vec{i} \end{cases}$$



$$\textbf{Disco:}\ \begin{cases} \vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (A - O) + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (A - O)] \\ \vec{a}_A = \dot{\Omega}\vec{k} \wedge (-R\cos\theta\vec{i} - R\mathrm{sen}\theta\vec{j}) = \dot{\Omega}R(\mathrm{sen}\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}) \end{cases}$$

Manipulando as equações cinemáticas acima, tem-se:

$$\vec{a}_G = \left(\frac{\dot{\omega}L}{2} + \dot{\Omega}R\mathrm{sen}\theta\right)\vec{i} - \dot{\Omega}R\cos\theta\vec{j} \qquad (1)$$

Teorema da Quantidade de Momento Angular para a **barra** em relação ao polo G:

$$\begin{aligned} \vec{M}_G &= m(G - G) \wedge \vec{a}_G + (J_{Gz}\dot{\omega})\vec{k} \\ \left(X_A \frac{L}{2}\right)\vec{k} &= \left(\frac{mL^2}{12}\dot{\omega}\right)\vec{k} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{6mX_A}{mL} \qquad (2)$$

Teorema da Resultante para a **barra**:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= m\vec{a}_G \\ (-X_A)\vec{i} - (Y_A + mg)\vec{j} &= m\vec{a}_G \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -X_A &= m\left(\frac{\dot{\omega}L}{2} + \dot{\Omega}R\mathrm{sen}\theta\right) \\ -(Y_A + mg) &= -m\dot{\Omega}R\cos\theta \end{aligned} \qquad (3)$$

Teorema da Quantidade de Momento Angular para o **disco** em relação ao polo O:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= m(G - O) \wedge \vec{a}_O + (J_{Oz}\dot{\Omega})\vec{k} \\ (X_A R\mathrm{sen}\theta - Y_A R\cos\theta)\vec{k} &= \left(\frac{mR^2}{2}\dot{\Omega}\right)\vec{k} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad X_A\mathrm{sen}\theta - Y_A\cos\theta = \frac{mR}{2}\dot{\Omega} \qquad (4)$$

Teorema da Resultante para o **disco**:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= m\vec{a}_O = \vec{0} \\ (X_A + X_O)\vec{i} + (Y_A + Y_O - mg)\vec{j} &= \vec{0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} X_A + X_O &= 0 \\ Y_A + Y_O - mg &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

As equações (2)-(5) compõem um sistema linear de equações nas variáveis $(X_A, Y_A, X_O, Y_O, \dot{\omega}, \dot{\Omega})$, cuja solução é:

$$X_A = -\frac{mg\mathrm{sen}(2\theta)}{3[3 + \cos(2\theta)]} \qquad X_O = \frac{mg\mathrm{sen}(2\theta)}{3[3 + \cos(2\theta)]} \qquad \dot{\omega} = -\frac{g\mathrm{sen}(2\theta)}{R[3 + \cos(2\theta)]}$$

$$\vec{a}_G = \frac{g[\mathrm{sen}(2\theta)\vec{i} - 8\cos(\theta)^2\vec{j}]}{3[3 + \cos(2\theta)]}$$

$$Y_A = \frac{mg(-5 + \cos(2\theta))}{3[3 + \cos(2\theta)]} \qquad Y_O = \frac{2mg(7 + \cos(2\theta))}{3[3 + \cos(2\theta)]} \qquad \dot{\Omega} = \frac{8g\cos\theta}{9R + 3R\cos(2\theta)}$$

Para $\theta = 45^o$:

$$X_A = -\frac{gm}{9} \quad Y_A = -\frac{5gm}{9} \quad X_O = \frac{gm}{9} \quad Y_O = \frac{14gm}{9} \quad \dot{\omega} = -\frac{g}{3R} \quad \dot{\Omega} = \frac{4\sqrt{2}g}{9R} \quad \vec{a}_G = \frac{g}{9}(\vec{i} - 4\vec{j})$$