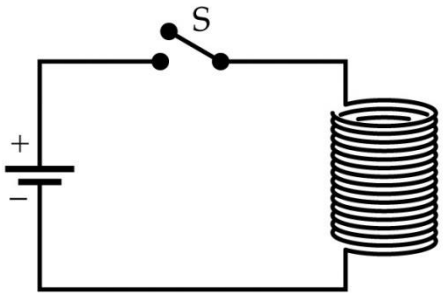
Indutância

Para um solenóide

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

Se o fluxo magnético através de uma área limitada por um circuito está variando, uma tensão igual em módulo à taxa de variação do fluxo é induzida no circuito.



$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N^2 IA}{l} = \mu_0 n^2 IAl$$

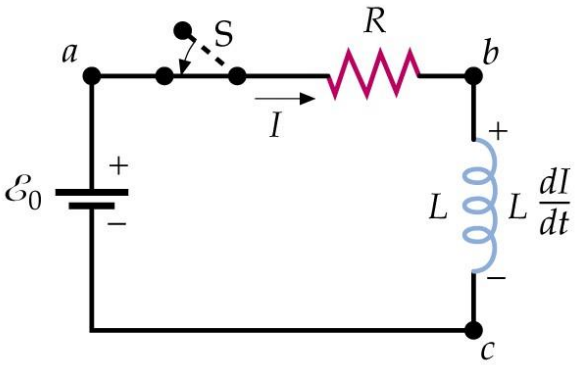
$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Indutância

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \mu_0 n^2 Al$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Circuitos RL



$$\varepsilon_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

No instante inicial (t=0)

I= 0 ➔ IR=0

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\varepsilon_0}{L}$$

Para t>0

I≠ 0 ➔ IR≠ 0

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{L} - \frac{IR}{L}$$

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

$$I = I_f\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

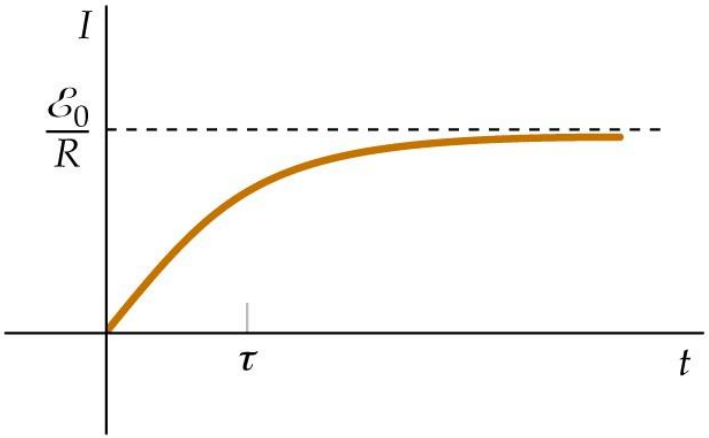
Onde: $I_f = \frac{\varepsilon_0}{R}$ e $\tau = \frac{L}{R}$

Para t➔ ∞

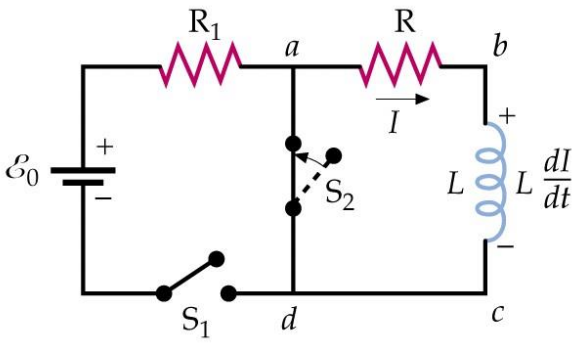
I= constante

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{L} - \frac{IR}{L} = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R}$$



Circuitos RL

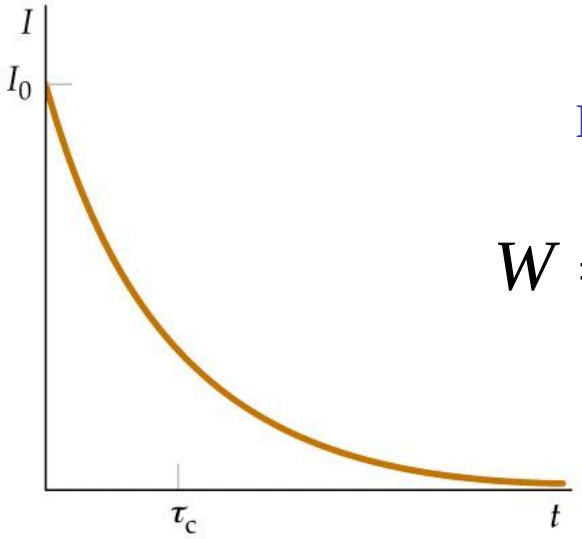


$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

Onde: $I_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{R}$ e $\tau = \dfrac{L}{R}$ Constante de tempo do circuito.

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$



Energia dissipada no resistor

$$W = \int_{t=0}^{t\to\infty} P dt = \int_{t=0}^{t\to\infty} RI^2 dt$$

$$W = \frac{1}{2} L I_0^{\,2}$$

Densidade de energia de um campo magnético

$$u_B = \frac{U_B}{Al}$$

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2$$ Energia armazenada por um indutor

$$u_B = \frac{L I^2}{2Al} = \frac{L}{l}\frac{I^2}{2A} = \mu_0 n^2 A \frac{I^2}{2A}$$

$$u_B = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

$$B = \mu_0 n I$$ Campo magnético de uma bobina

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

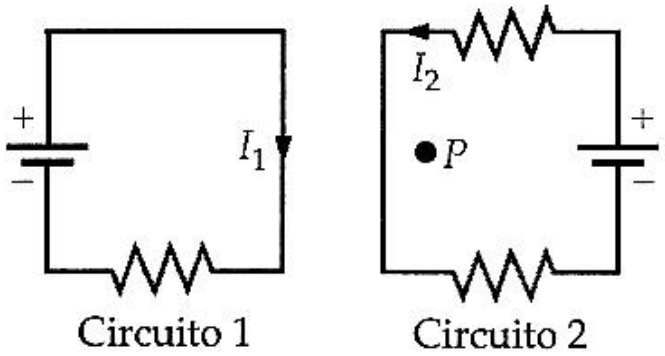
Indutância mútua

[L]=[M]=Wb/A=T.m²/A=H (Henry)

Com o circuito 2 próximo de 1, a tensão induzida terá contribuição da indutância mútua com contribuição da corrente I_1 mas também terá uma contribuição devido a variação do fluxo magnético originado da corrente I_2

$$\phi_{m1} = L_1 I_1 + M_{1,2} I_2$$

Onde M_{12} é a indutância mútua do circuito 2 em 1

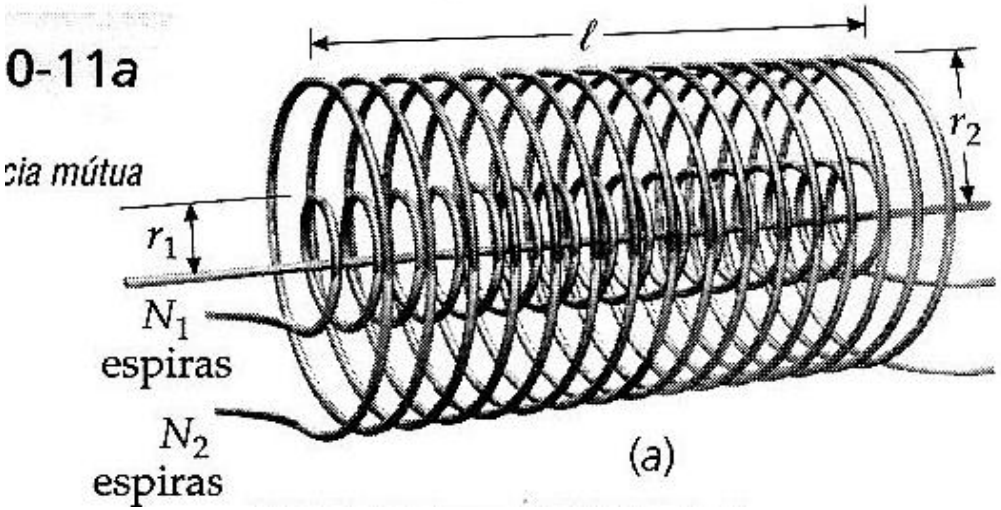


O fluxo magnético no circuito 2 será:

$$\phi_{m2} = L_2 I_2 + M_{2,1} I_1$$

Onde M_{21} é a indutância mútua do circuito 1 em 2

Exemplo: Vamos calcular a indutância mútua M_{21}



Vamos calcular inicialmente o fluxo na bobina 2 devido à bobina 1

$$\Phi_{m2} = N_2 B_1 \pi r_1^2 = N_2 \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 \pi r_1^2 = \frac{N_2}{l} l \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 \pi r_1^2$$

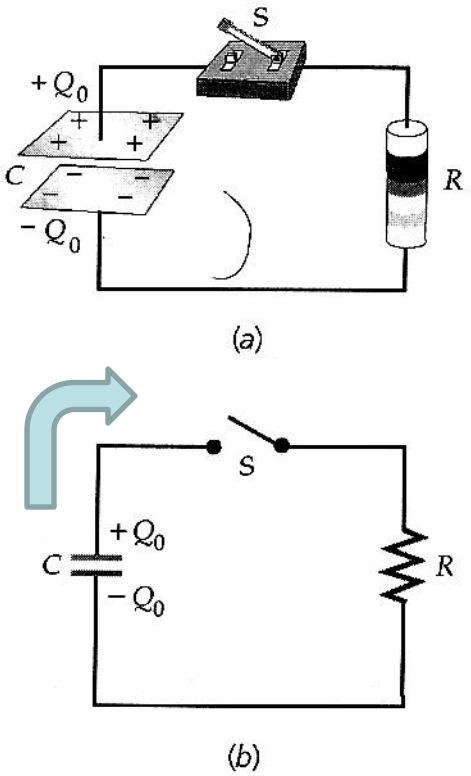
$$\Phi_{m2} = \mu_0 n_2 n_1 l I_1 \pi r_1^2$$

$$M_{21} = \frac{\Phi_{m2}}{I_1} = \mu_0 n_2 n_1 l \pi r_1^2$$

De maneira análoga, podemos calcular M_{12} e verificar que $M_{12}=M_{21}$

Este é um resultado geral, que não será mostrado aqui e a indutância mútua será representada por M.

Descarga de um capacitor



$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC}$$

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{Q}{C} - IR = 0$$

$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q$$

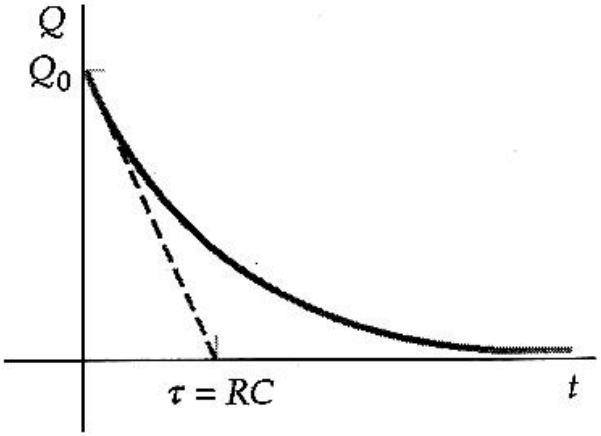
$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrando de Q_0 em t=0 até Q no instante t, temos:

$$\ln\frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau}$$

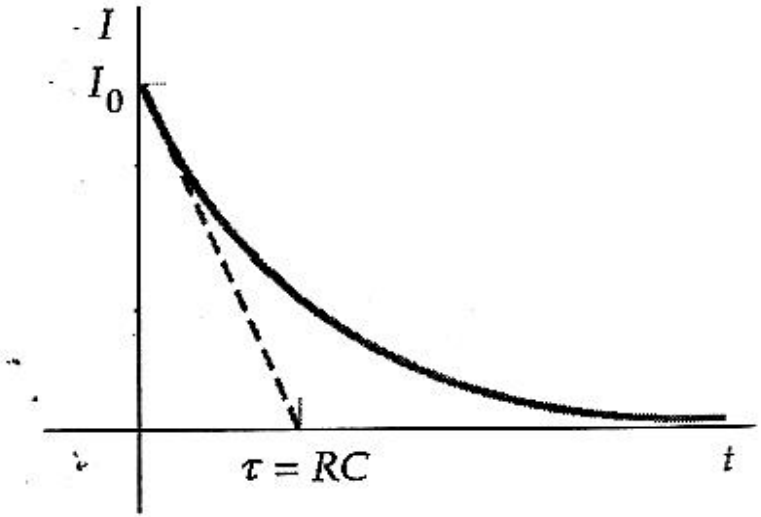
$$\tau = RC$$



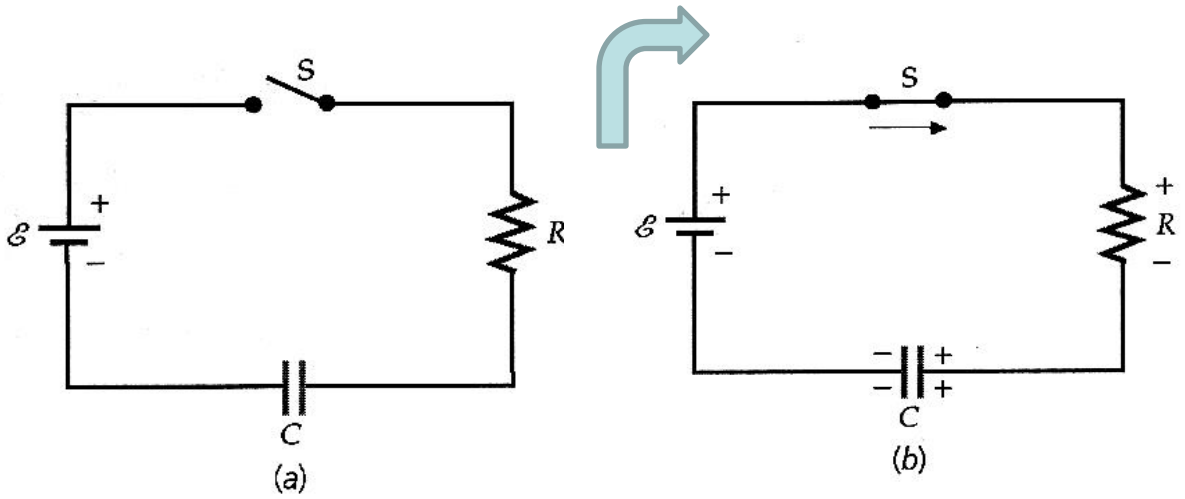
τ é a constante de tempo:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



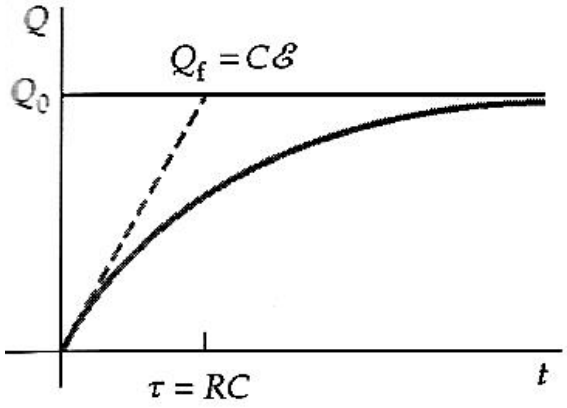
Carga de um capacitor



$$\mathcal{E} - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

$$I = +\frac{dQ}{dt}$$

$$\mathcal{E} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$



Equação diferencial em Q cuja solução é:

$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/\tau})$$

$Q_f = C\mathcal{E}$ é a carga final (máxima). A corrente se tem pela relação $I = dQ/dt$:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -C\mathcal{E}\,e^{-t/RC}\left(\frac{-1}{RC}\right)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/\tau}$$

a corrente inicial é $I_0 = \mathcal{E}/R$.

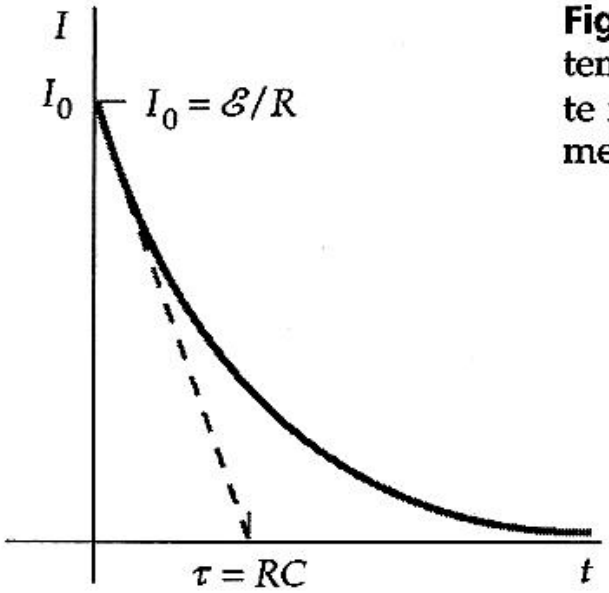
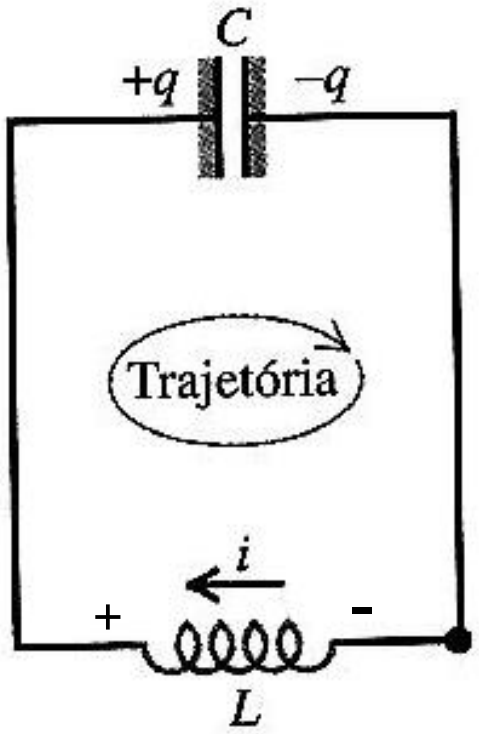


Figura 26-42 Gráfico da corrente contra o tempo no circuito da Fig. 26-40. A corrente inicial é $\mathcal{E}/R$ e diminui exponencialmente com o tempo.

Circuito LC



$$-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Como $i = dq/dt$, concluímos que $di/dt = d^2q/dt^2$.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$q = Q\cos(\omega t + \phi)$$

$$i = -\omega Q \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

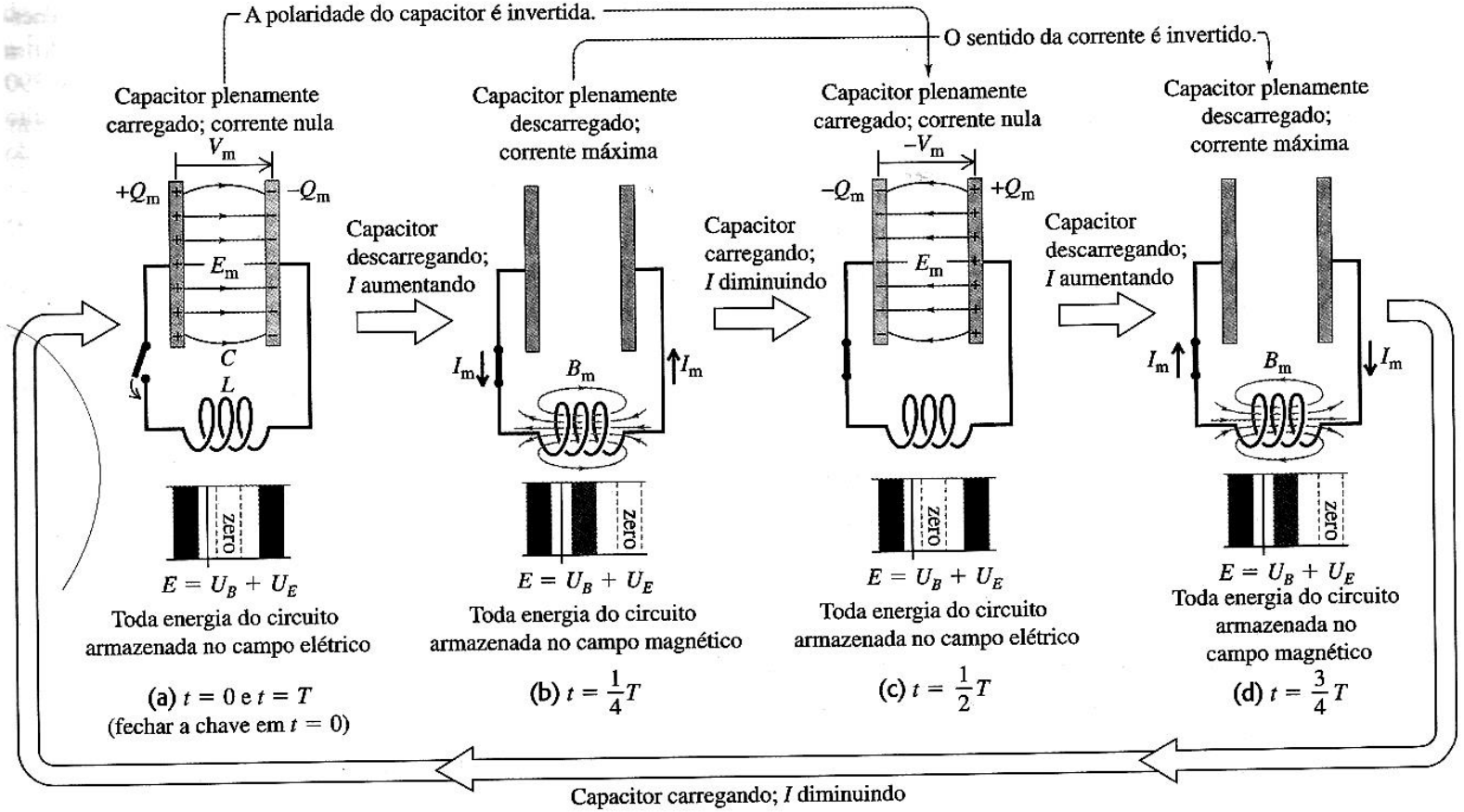
$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Sistema massa-mola

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$



Energia em um circuito *L-C*

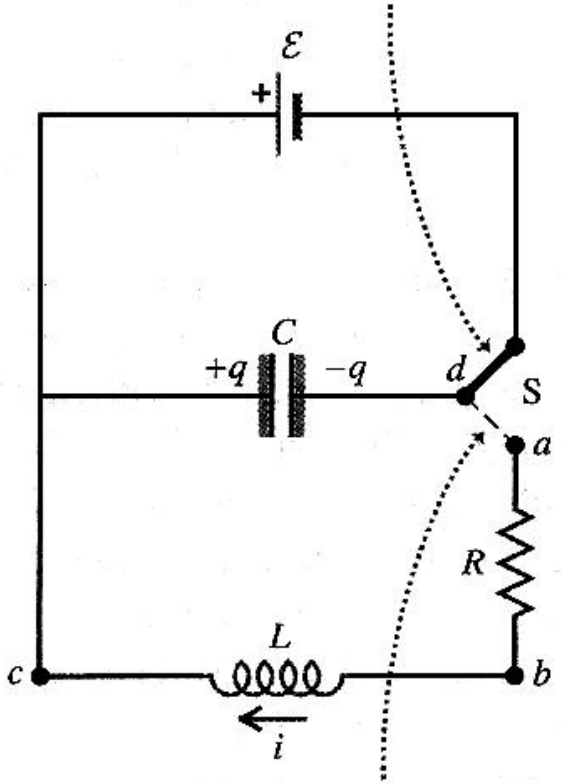
$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}$$

Explicitando i da equação ao lado, temos:

$$i = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}\sqrt{Q^2 - q^2}$$

O circuito *R-L-C*

Quando a chave S está nesta posição, a fem carrega o capacitor.



Quando a chave S é movida para esta posição, o capacitor se descarrega através do resistor e do indutor.

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Substituindo i por dq/dt e reagrupando, encontramos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

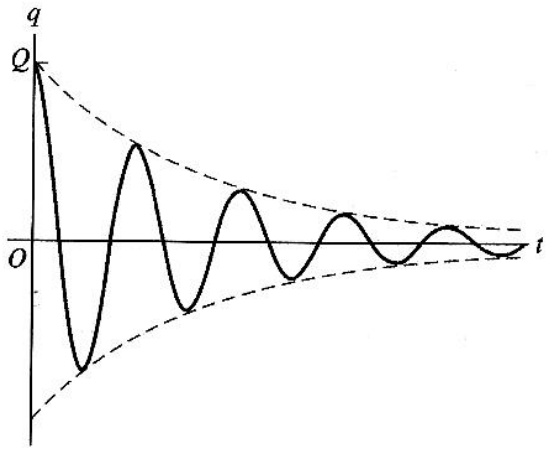
Três soluções diferentes de acordo com:

(a) Subamortecido $R^2 < \frac{4L}{C}$

(b) criticamente amortecido $R^2 = \frac{4L}{C}$

(c) Superamortecido $R^2 > \frac{4L}{C}$

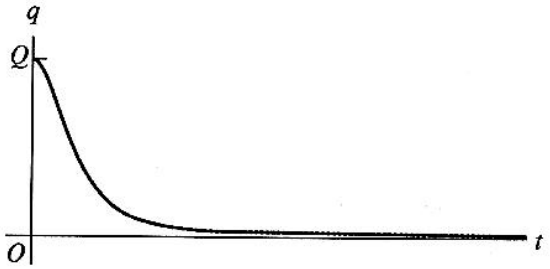
(a) Subamortecido (R pequeno)



$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

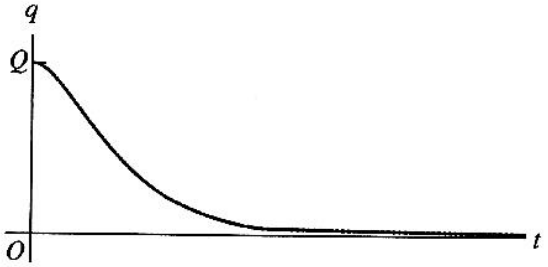
$$q = Ae^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t}\cos\left(\omega' + \Phi\right)$$

(b) Criticamente amortecido (R grande)



$$q = Ce^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} + D$$

(c) Superamortecido (R muito grande)



$$\beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$q = e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t}\left(Ae^{-\beta t} + Be^{\beta t}\right)$$