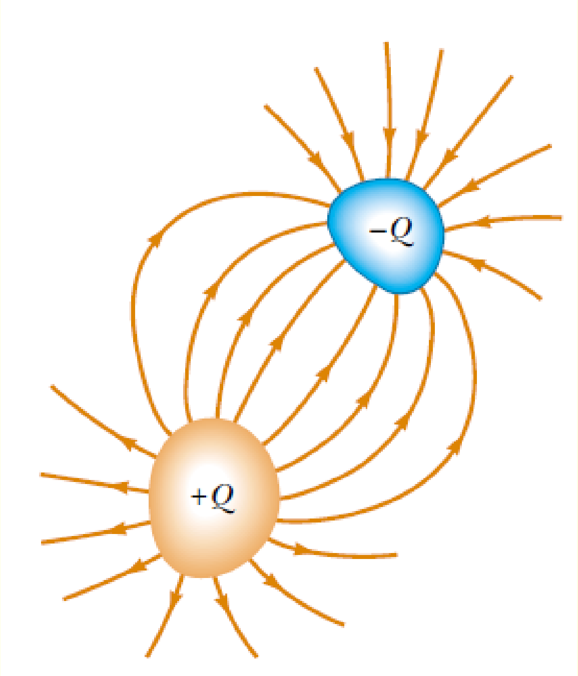
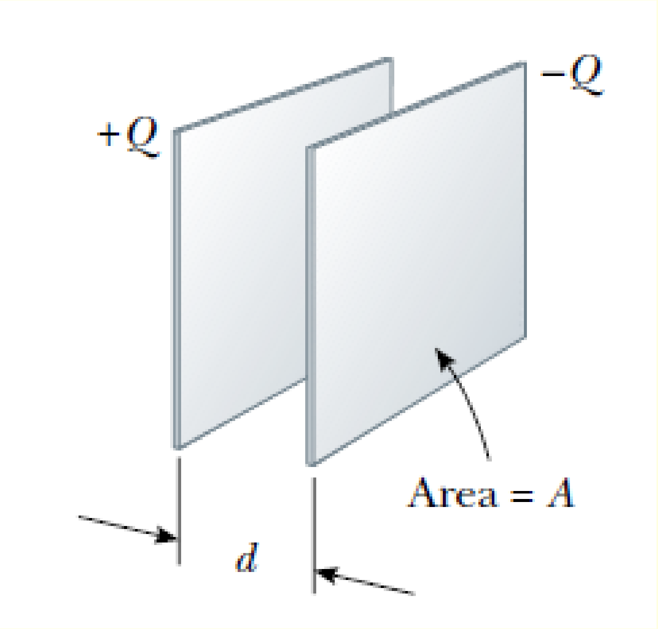
Um capacitor consiste de dois condutores carregados com cargas iguais e de sinais contrários.



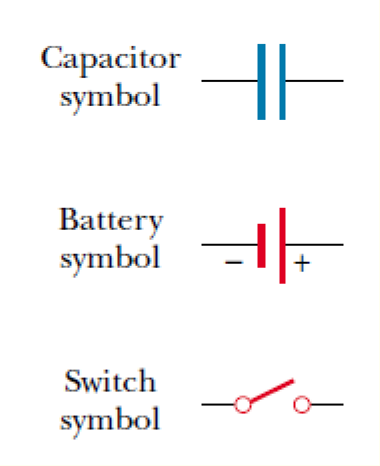


$$C = \frac{Q}{V}.$$

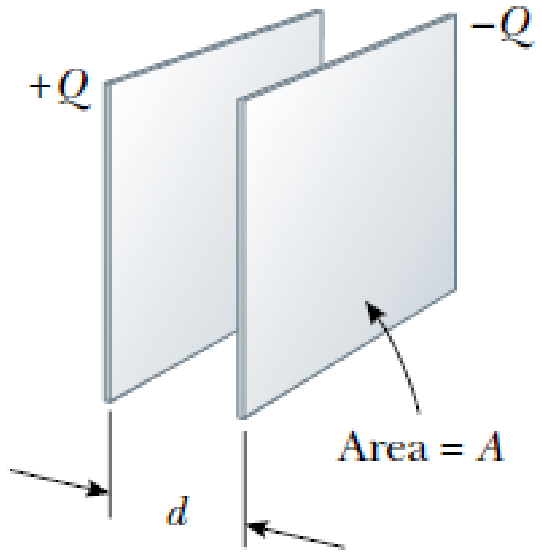
Imaginemos uma configuração como a de um capacitor em que os dois condutores estejam inicialmente descarregados (com carga líquida nula). O processo chamado de *carregamento* de um capacitor consiste em transferir elétrons de um dos condutores para o outro de maneira que, no fim do processo, um dos condutores esteja com carga líquida positiva $+Q$ e o outro condutor esteja com carga líquida negativa $-Q$. Note que a carga líquida total do sistema formado pelos dois condutores continua nula.

Uma maneira de carregar um capacitor é ligar fios metálicos aos condutores e conectá-los aos terminais opostos de uma bateria. Espera-se até que as cargas $+Q$ e $-Q$ se estabeleçam nos dois condutores e depois desconectam-se os fios da bateria. Como as cargas não podem passar de um condutor para outro, a carga armazenada no capacitor permanece constante. A voltagem V_{ab} entre os condutores ($V_a - V_b$) permanece constante e é igual à voltagem da bateria.

Diferentes tipos de capacitores comerciais



Capacitor de placas planas e paralelas



$$E = |\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

$$\sigma = \frac{Q}{A}. \qquad (2)$$

A diferença de potencial entre as duas placas é

$$V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = Ed, \qquad (3)$$

o que implica que, substituindo (1) em (3):

$$V = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}.$$

Como vimos:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad (4)$$

$$C = \frac{Q\varepsilon_0 A}{Qd} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

A unidade de capacitância é o farad (F)

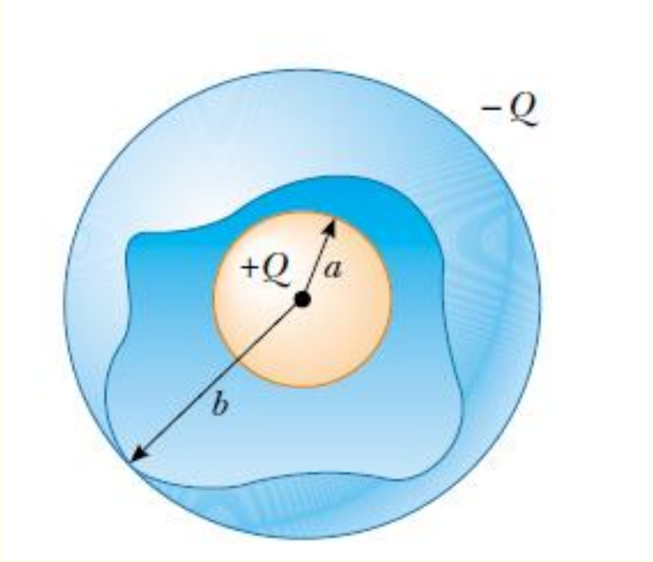
$$1 \text{ farad} = 1 \text{ F} = 1 \frac{C}{V} = 1 \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}}.$$

A unidade de ε_0 também pode ser descrita em termos desta unidade:

$$[\varepsilon_0] = [C]\frac{[d]}{[A]} = \frac{\text{F}}{\text{m}},$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} \text{ F/m}.$$

Capacitor esférico



$$C = \frac{Q}{V}.$$

Para determinar V, precisamos determinar o campo elétrico $\vec{E}$ entre a esfera e a casca esférica.

O campo elétrico nesta região pode ser obtido através da Lei de Gauss e corresponde Ao campo gerado como se toda a carga estivesse concentrada no centro.

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}.d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^b$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right) \qquad (5)$$

Substituindo (5) em (4)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 abQ}{Q(b-a)} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \qquad (6)$$

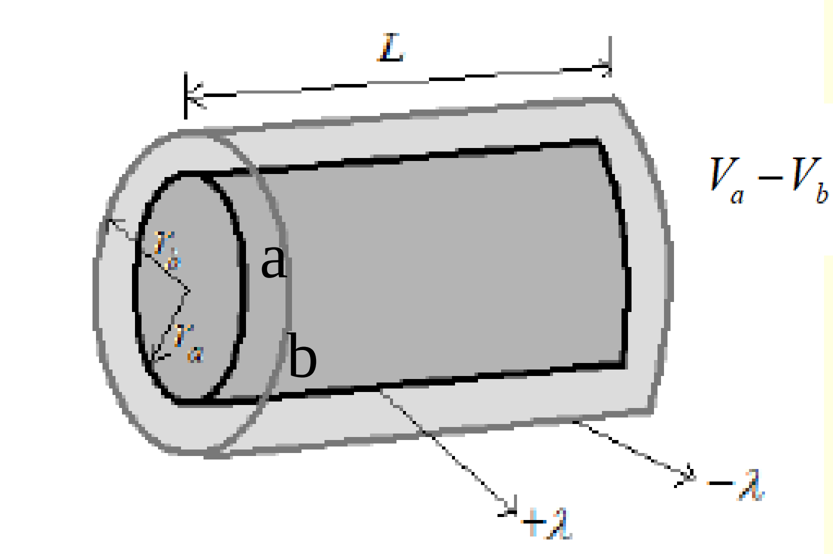
Um caso particular deste capacitor esférico é quando o raio da casca externa tende a infinito

Podemos então definir a capacitância de uma esfera condutora de raio *R* como:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \qquad (7)$$

As linhas de campo elétrico entre a esfera de raio R e a casca esférica de raio "infinito se estendem até o infinito.

Capacitor cilíndrico

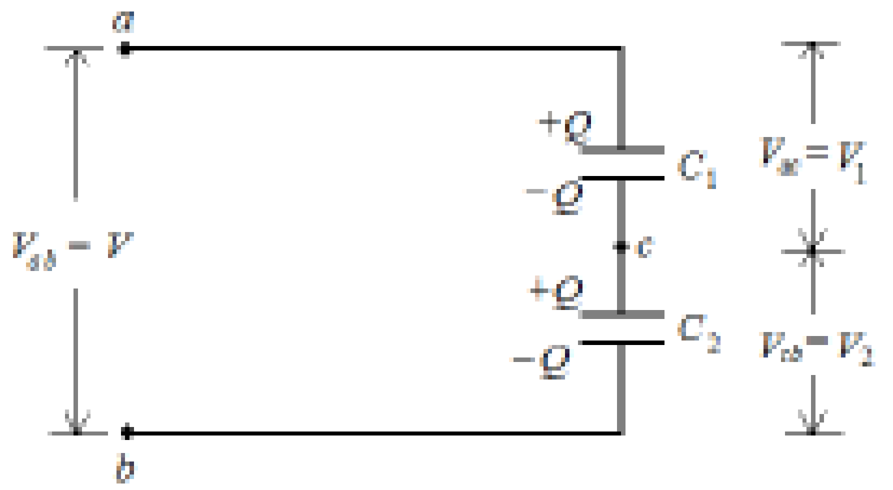


$$V_a - V_b = \int_{+}^{-} \vec{E}.d\vec{l} = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

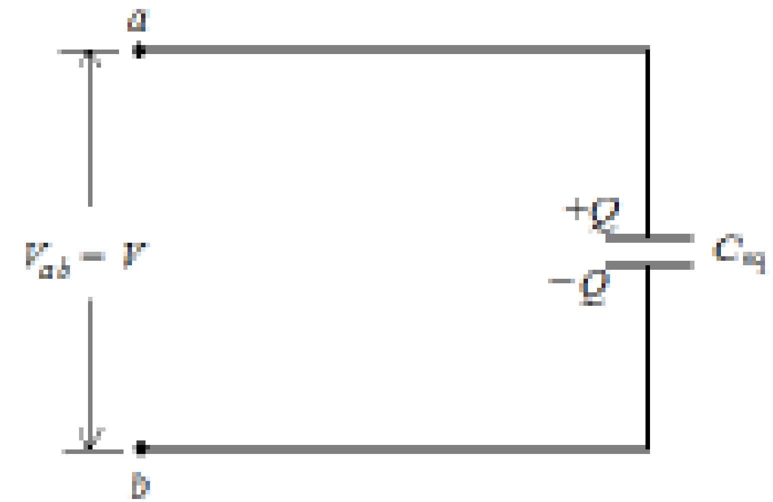
$$C = \frac{Q}{C} = \frac{Q 2\pi\varepsilon_0}{\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad (8)$$

Capacitores em série e em paralelo

Capacitores em série



(a) Capacitores em série



(b) Capacitor equivalente

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad \text{e} \quad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}.$$

$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

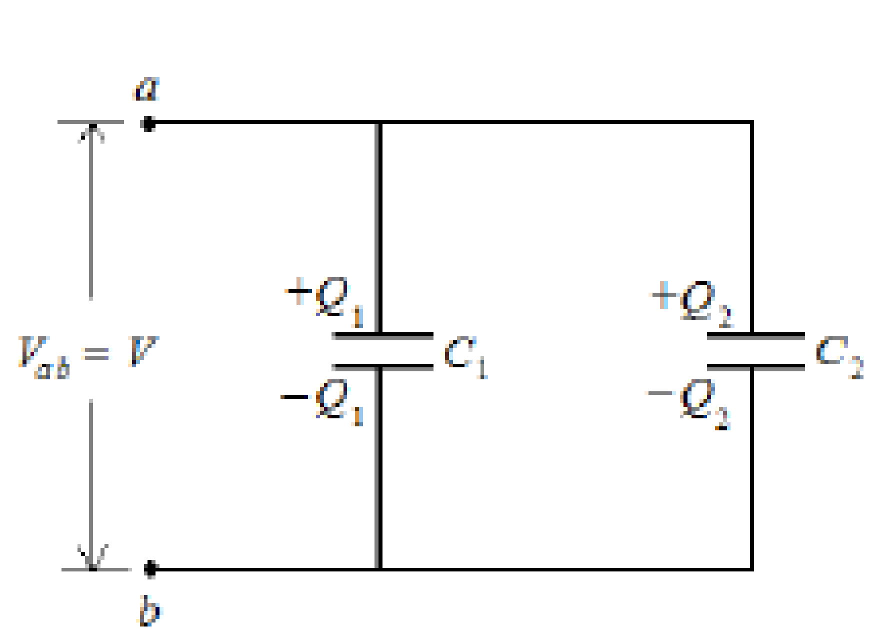
$$V_{ab} = V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

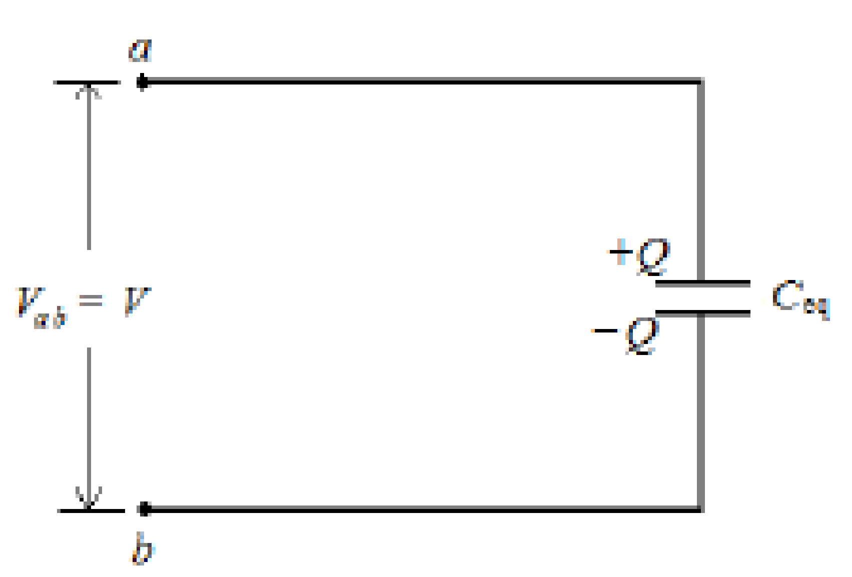
Para N capacitores em série:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \qquad (9)$$

Capacitores em paralelo



(a) Capacitores em paralelo



(b) Capacitor equivalente

$$Q = C_{eq}V$$

Vamos supor que a carga total presente no circuito vale Q e ela se encontra distribuída pelos capacitores de maneira que o primeiro possui carga Q_1 e o segundo possui carga Q_2:

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Temos, então

$$Q = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2)V.$$

Comparando com o capacitor equivalente: $Q = C_{eq} V$

$$C_{\mathbf{eq}} = C_1 + C_2.$$

Generalizando, se tivermos N capacitores em paralelo em um circuito eles podem ser substituídos por um capacitor equivalente com capacitância

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N = \sum_{i=1}^{N} C_i \qquad (10)$$

Energia armazenada num capacitor

Para calcular a energia potencial elétrica U de um capacitor carregado precisamos calcular o trabalho W necessário para carregá-lo. Para calcular W, imaginemos um instante qualquer *durante* o processo de carregamento. Nesse instante intermediário, a carga no capacitor será q ($0 < q < Q$) e o potencial correspondente será v ($0 < v < V$). Como a capacitância do capacitor é constante, q e v estarão relacionados por

$$\frac{q}{v} = C \Longrightarrow v = \frac{q}{C}.$$

Para adicionar uma quantidade infinitesimal de carga dq nesse instante, o trabalho necessário será igual à variação na energia potencial elétrica

$$dW = dU = dqv$$

$$dW = \frac{q}{C} dq.$$

O trabalho total para carregar o capacitor com carga Q será então

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}. \qquad (11)$$

Definindo a energia potencial de um capacitor como zero quando ele está descarregado, podemos escrever a energia potencial de um capacitor carregado com carga Q como

$$\Delta U = U(q = Q) - U(q = 0) = U(q = Q) = W,$$

Através da equação (11):

$$U = \frac{Q^2}{2C}. \qquad (12)$$

Esta é a expressão para a energia armazenada em um capacitor carregado com carga Q.

Note que, usando a relação $Q = CV$, a expressão acima pode ser reescrita de duas outras formas:

$$U = \frac{1}{2}\frac{C^2V^2}{C} = \frac{CV^2}{2} \qquad (13)$$

$$U = \frac{1}{2}CVV = \frac{QV}{2}. \qquad (14)$$

Se um capacitor armazena energia, onde está essa energia?

Para tornar isso mais concreto, consideremos um capacitor de placas planas e paralelas. As áreas das placas são iguais a A e a separação entre elas é d. Portanto, o volume entre as placas é $A \times d$.

Como a energia armazenada no capacitor é

$$U = \frac{1}{2} C V^2,$$

a densidade de energia é

$$u = \frac{U}{\text{Volume}} = \frac{\frac{1}{2} C V^2}{Ad}.$$

Como a capacitância é:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} \frac{V^2}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{V^2}{d^2}.$$

Se a diferença de potencial entre as placas for $V_{ab} = V$, a relação entre V e o campo elétrico E entre as placas é

$$V = Ed.$$

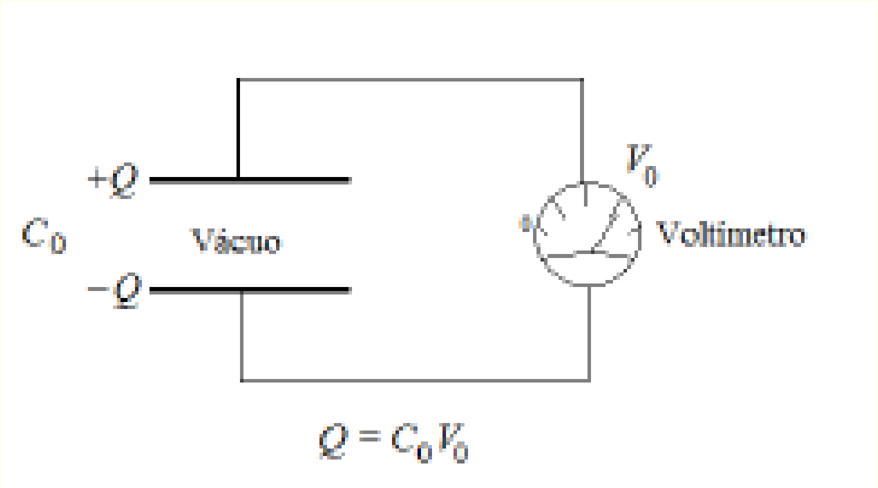
$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{E^2 d^2}{d^2} \Longrightarrow$$

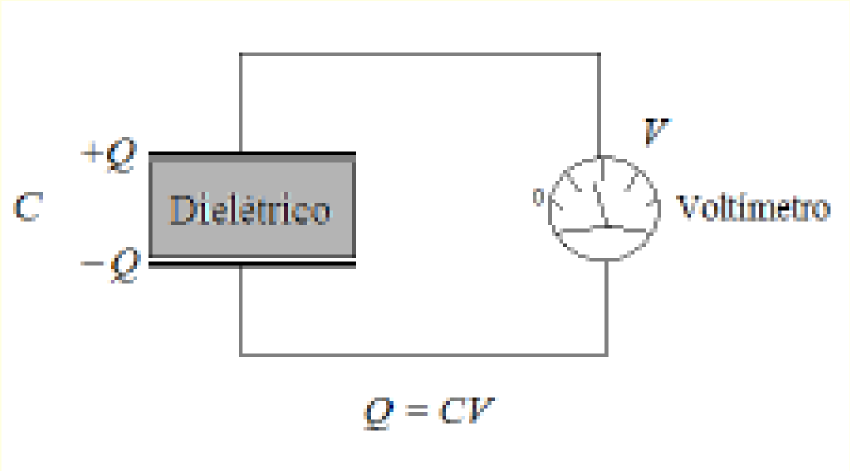
$$\Longrightarrow u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2. \qquad (15)$$

A densidade de energia armazenada no campo elétrico existente no vácuo entre as placas do capacitor é proporcional ao quadrado do módulo do campo elétrico.

Portanto, mesmo que não haja matéria numa região do espaço (definição de vácuo), se houver campo elétrico nele haverá energia.

Dielétricos





$$V < V_0$$

Como as cargas armazenadas no capacitor são iguais nos dois casos,

$$C_0 V_0 = CV \Longrightarrow \frac{C}{C_0} = \frac{V_0}{V} > 1.$$

A capacitância do capacitor com o dielétrico entre as placas é maior do que com o vácuo entre as placas:

$$C > C_0.$$

Define-se a constante dielétrica K do material dielétrico como

$$K = \frac{C}{C_0}. \qquad (16)$$

Note que K é um número puro (adimensional) maior que 1.

Quando a carga é constante, como no caso acima, podemos combinar a expressão $C_0V_0 = CV$ com a definição de K para escrever

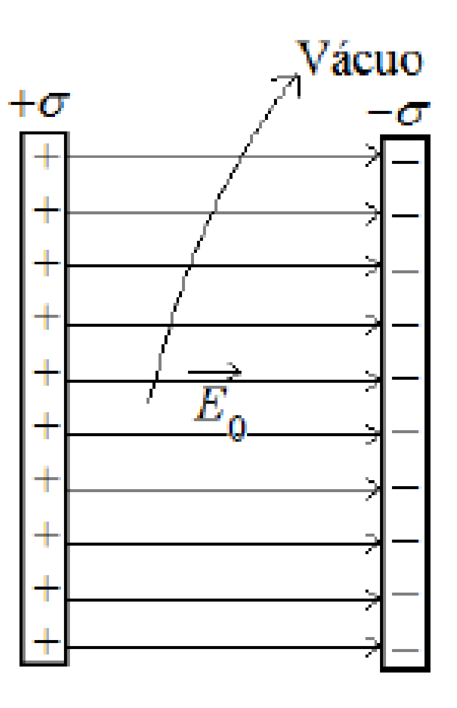
$$V = \frac{V_0 C_0}{C} = \frac{V_0}{K}. \qquad (17)$$

Material	Dielectric Constant κ	Dielectric Strength[a] (V/m)
Air (dry)	1.000 59	3×10^6
Bakelite	4.9	24×10^6
Fused quartz	3.78	8×10^6
Neoprene rubber	6.7	12×10^6
Nylon	3.4	14×10^6
Paper	3.7	16×10^6
Polystyrene	2.56	24×10^6
Polyvinyl chloride	3.4	40×10^6
Porcelain	6	12×10^6
Pyrex glass	5.6	14×10^6
Silicone oil	2.5	15×10^6
Strontium titanate	233	8×10^6
Teflon	2.1	60×10^6
Vacuum	1.000 00	—
Water	80	—

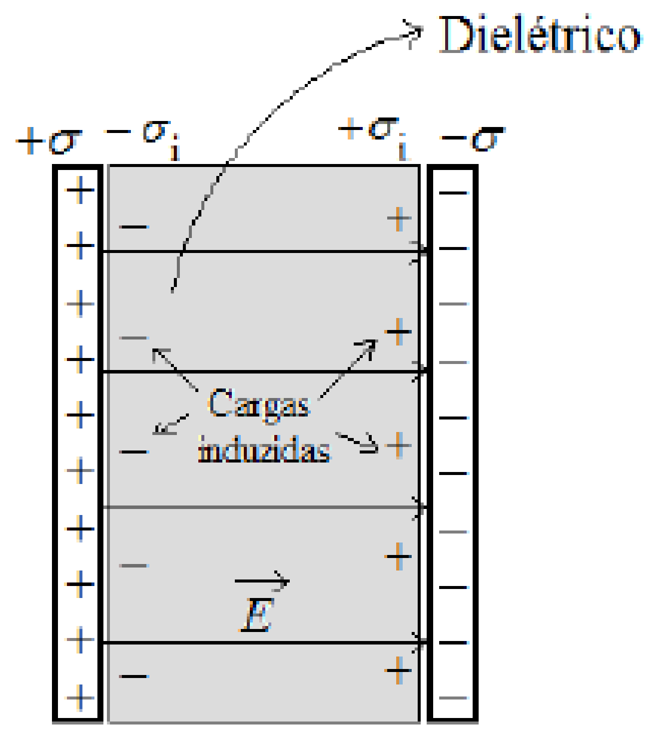
Se o potencial é reduzido por um fator K, o campo elétrico entre as placas também é reduzido pelo mesmo fator:

$$E = \frac{E_0}{K}. \qquad (18)$$

Essa redução é devida às cargas induzidas pelo campo elétrico no interior do dielétrico (veja a figura abaixo).



$$\vec{E} < \vec{E}_0$$



A densidade de cargas sobre as placas do capacitor é σ ($+\sigma$ sobre a placa carregada positivamente e $-\sigma$ sobre a placa carregada negativamente). O campo elétrico induz densidades de carga nas superfícies do dielétrico: $-\sigma_i$ na superfície próxima à placa positiva e $+\sigma_i$ na superfície próxima à placa negativa.

As densidades de carga induzidas no interior do dielétrico reduzem o campo elétrico entre as placas do capacitor.

Como visto nas aulas passadas, o campo elétrico entre as placas de um capacitor de placas planas e paralelas está relacionado à densidade superficial de cargas líquidas nos seus extremos por

$$E = \frac{\sigma_{tot}}{\varepsilon_0}.$$

Quando existe vácuo entre as placas do capacitor, a densidade superficial de cargas líquida vale σ, de maneira que

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Já quando existe um dielétrico entre as placas, a densidade líquida é reduzida para $\sigma_{tot} = \sigma - \sigma_i$. Logo,

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0}.$$

$$E = \frac{E_0}{K} \Longrightarrow \frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 K}$$

$$\Longrightarrow \sigma - \sigma_i = \frac{\sigma}{K}.$$

Podemos manipular esta expressão para obter uma equação para a densidade superficial de carga induzida no dielétrico:

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right). \qquad (19)$$

Define-se a **permissividade** ε do dielétrico como

$$\varepsilon = K\varepsilon_0. \qquad (20)$$

Em termos de ε, pode-se escrever o campo elétrico no interior do dielétrico como $$E = \frac{E_0}{K} = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Pode-se também reescrever a capacitância do capacitor de placas paralelas quando há um dielétrico entre as placas como

$$C = KC_0 = K\varepsilon_0\frac{A}{d} = \varepsilon\frac{A}{d}, \qquad (21)$$

e a densidade de energia armazenada no capacitor quando existe um dielétrico entre as placas como

$$u = \frac{1}{2} K \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2. \tag{22}$$