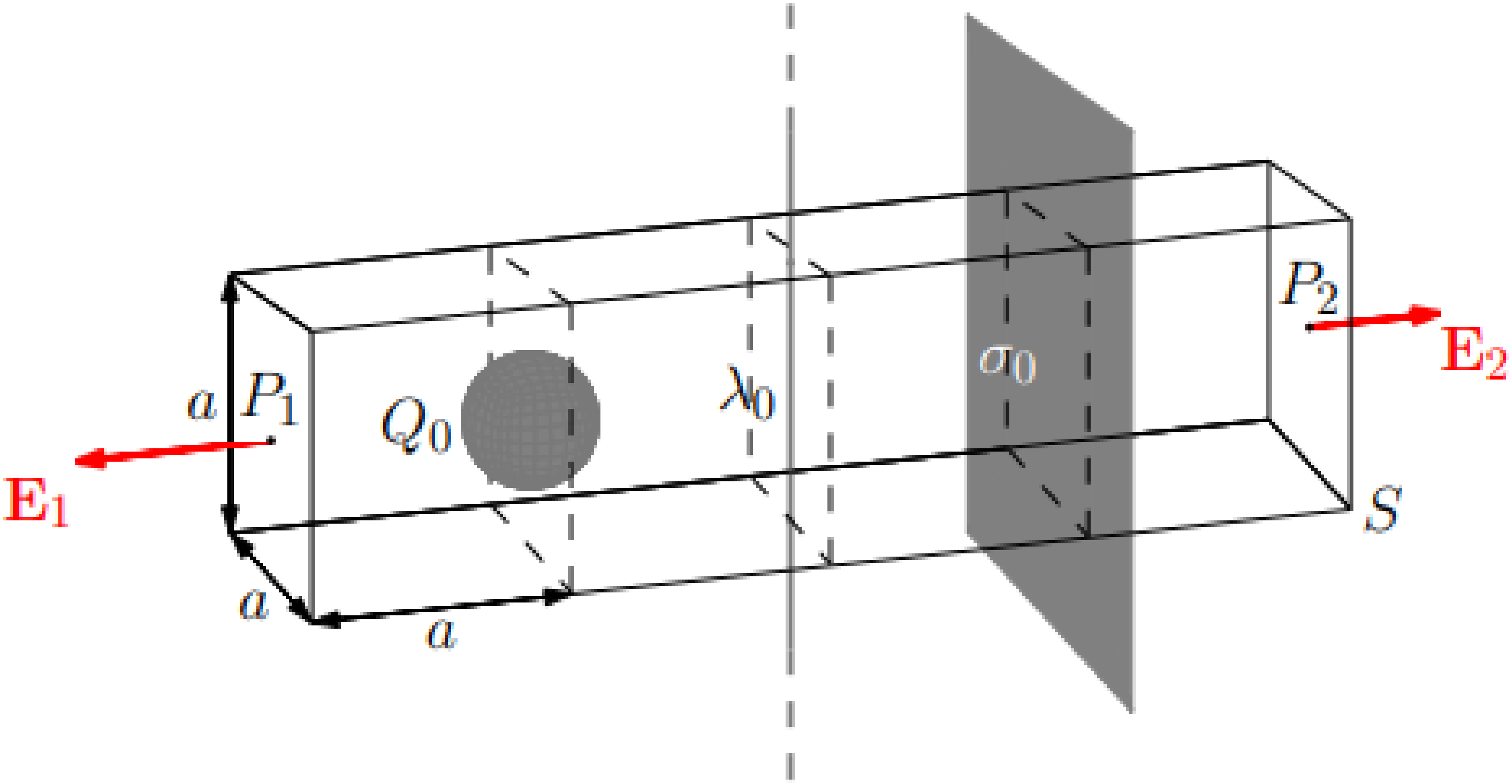
Exercícios de Lei de gauss

Considere o arranjo de cargas elétricas esboçado na figura: uma esfera isolante com carga total Q_0 uniformemente distribuída, um fio isolante muito longo com densidade linear de carga uniforme λ_0 e uma placa plana muito grande, isolante, com densidade superficial de carga uniforme σ_0. Todas as cargas são positivas.
A superfície S é a face externa de uma região definida por quatro cubos de aresta a adjacentes como indica a figura. A aresta dos cubos é igual ao espaçamento entre o centro da esfera e o fio e também à distância entre o fio e a placa.

(1,0): a) Qual é o fluxo do campo elétrico total através da superfície S, Φ_0?

(1,5): b) Determine o campo elétrico nos pontos P_1 e P_2 indicados na figura, que se encontram nos centros das faces de S.

$$\boxed{\text{Lei de Gauss:} \quad \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_S \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{r}}}$$



P_2
$\mathbf{E}_2$
σ_0
a
P_1
Q_0
λ_0
$\mathbf{E}_1$
S
a
a

a) Da lei de Gauss $\Phi_S = \frac{1}{\epsilon_0} Q_S$, onde Q_S é a carga interna à superfície S. No caso Q_S é composta da carga da esfera e das cargas das porções do fio e da placa internas a S.

$$\boxed{\Phi_S = \frac{1}{\epsilon_0}\left(Q_0 + a\lambda_0 + a^2\sigma_0\right)}$$

b) Por simetria os campos $\mathbf{E}_1$ (em P_1) e $\mathbf{E}_2$ (em P_2) são perpendiculares às faces respectivas de S, como indicado na figura. Como todas as cargas são positivas, ambos os campos apontam para *fora*. Usando as fórmulas dadas para os campos da esfera, do fio infinito e do plano infinito, os módulos dos campos $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ são:

$$\boxed{E_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a} + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}}$$

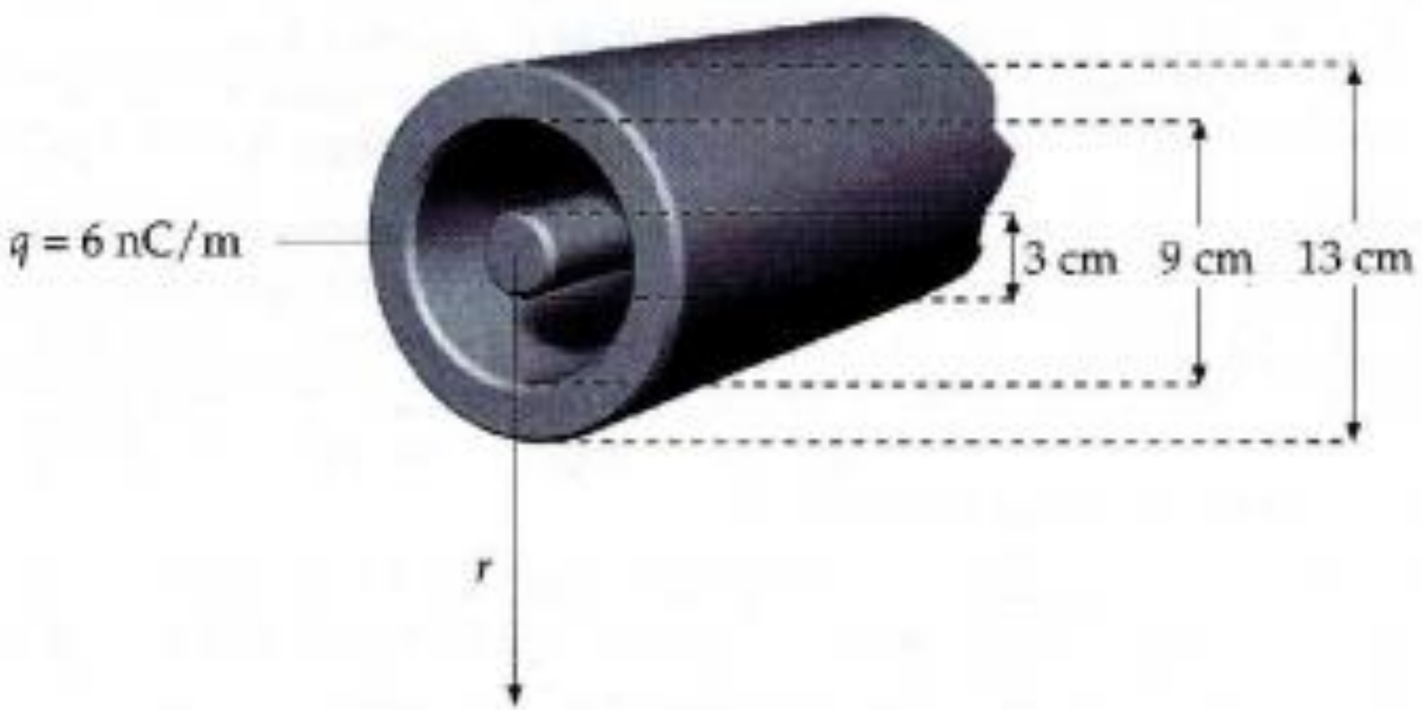
$$\boxed{E_2 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{9a^2} + \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a} + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}}$$

A figura abaixo mostra o esquema da seção reta de um cabo coaxial infinitamente comprido. O condutor interno tem uma carga de +6 nC/m e o externo está descarregado.

(6,0): a) Determinar o campo elétrico para $r \leq 1.5$ cm, $1.5 < r < 4.5$ cm, $4.5 \leq r \leq 6.5$ e $r >$ 6.5 cm.

(4,0): b) Quais as densidades superficiais de cargas na face interna e externa do condutor externo.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



(iv) $\lambda = -6\frac{nC}{m}$ face interna

$\lambda + \lambda' = 0$

$\lambda' = -\lambda = +6\frac{nC}{m}$ (face externa)

$\lambda' = +\frac{6nC}{m}$

Em 1 metro (face interna)

$\sigma = -\frac{6nC}{2\pi \times R \cdot 1} = -\frac{6 \times 10^{-9}}{2\pi \times 0{,}09} = 1{,}1 \times 10^{-8}\frac{C}{m^2}$

$\sigma = 11 \times 10^{-9}\frac{C}{m^2} = 11\frac{nC}{m^2}$

Em 1 metro (face externa)

$$\sigma = \frac{+6nC}{2\pi R \cdot 1} = \frac{6\times10^{-9}}{2\pi\times 0,13} = 7,3\times10^{-9}\,\frac{C}{m^2}$$

$$\sigma = 7,3\,\frac{nC}{m^2}$$

Para $1,5 < r < 4,5$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\int E\hat{r}\cdot dA\hat{r} = \frac{6\times10^{-9}}{9,0\times10^{-9}}$$

$$E\cdot 2\pi r\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$E = \frac{2}{3\times 2\pi\times r} = \frac{0,11}{r}\,\frac{N}{C}$$

$$\vec{E} = \frac{0,11}{r}\,\hat{r}\,\frac{N}{C}$$

para $r < 1{,}5$ cm

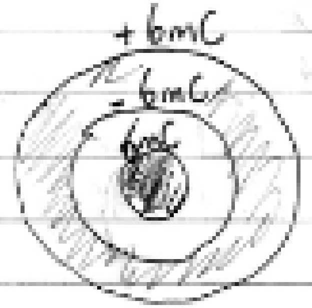
$$\int E \cdot d\vec{A} = 0$$

$$E = 0$$

para $4{,}5 < r < 6{,}5$ cm

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{E} = 0$$



para $r > 6{,}5$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{6 \times 10^{-9}}{9 \times 10^{-9}}$$

$$E\, 2\pi r \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$E = \frac{2}{3\, 2\pi \times r} = \frac{0{,}11}{r} \frac{N}{C}$$

$$\vec{E} = \frac{0{,}11}{r} \frac{N}{C}$$