IF – 4300270 – Eletricidade e Magnetismo I

Lei de Coulomb

$$\vec{F} = k\frac{qQ}{r^2}\hat{r} \quad \text{Campo elétrico} \longrightarrow \quad \vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

A lei de Coulomb descreve o campo elétrico criado por uma distribuição de cargas. Aprendemos que, dado um ponto, podemos determinar o campo produzido pela porção infinitesimal de carga em torno deste ponto. (Usamos a lei de Coulomb). Depois, calculamos o campo total usando o principio da superposição.

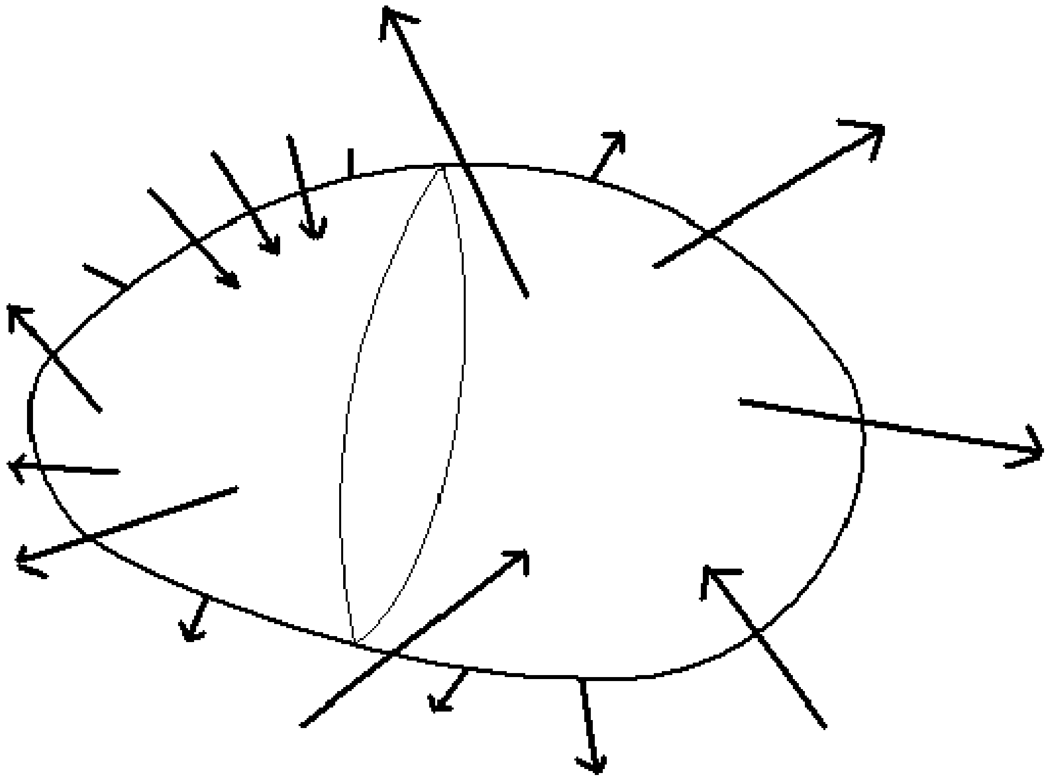
Ao desenhar diagramas de linhas de campo, adquirimos a visão de como uma distribuição de de cargas afeta todo o espaço: temos uma perspectiva ***global***.
A seguir, vamos introduzir a ***lei de Gauss***, que expressa esta relação global entre a carga e o campo. Ela não contém novas informações; simplesmente expressa a mesma informação que a lei de Coulomb, de uma forma diferente.

A partir deste ponto expressaremos a constante k por:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \text{Campo elétrico} \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{(Q/\varepsilon_0)}{4\pi r^2}\hat{r}$$

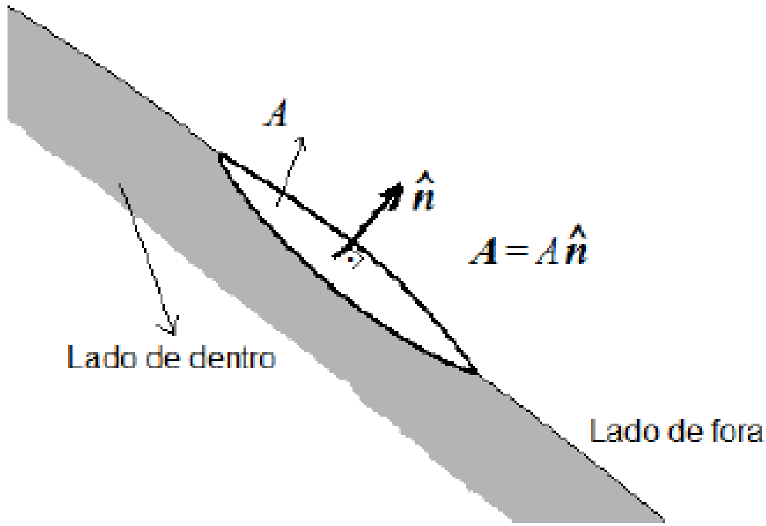
Considere uma distribuição arbitrária de cargas ou um corpo carregado no espaço. Imagine agora uma superfície fechada qualquer envolvendo essa distribuição ou corpo. A superfície é *imaginária*, ela não existe de fato.

A distribuição de cargas (ou o corpo carregado) produz um campo elétrico $\vec{E}$ em todos os pontos do espaço. Em particular, haverá um valor de $\vec{E}$ para cada ponto da superfície fechada imaginária. A ilustração abaixo dá um exemplo. A superfície fechada (lembra uma batata neste caso) engloba uma distribuição de cargas ou um corpo que, por causa do desenho, não é visível de fora.



Mesmo sem saber qual é a distribuição de cargas no interior da superfície fechada, o conhecimento do campo elétrico sobre a superfície nos fornece informação sobre a distribuição de cargas. Isto é possível por causa da lei de Gauss, que será estudada nesta aula.

Considere uma área A qualquer (veja a figura abaixo).



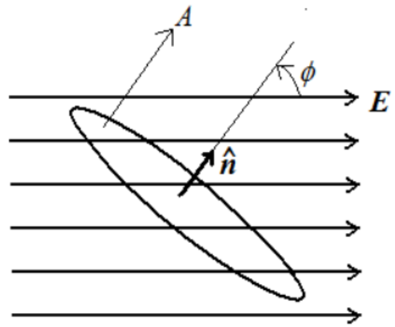
O vetor área $\vec{A}$ é definido como o vetor que tem:

- Módulo: valor de A;
- Direção: da reta perpendicular à área A;
- Sentido: do vetor unitário $\hat{n}$ normal a A definido de tal forma que quando a área faz parte de uma superfície fechada o vetor $\hat{n}$ aponta *para fora* da superfície fechada.

Fluxo elétrico

Para tornarmos quantitativa esta relação global entre a carga elétrica e o campo elétrico, precisamos introduzir a definição de ***fluxo elétrico,*** Φ_E.

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



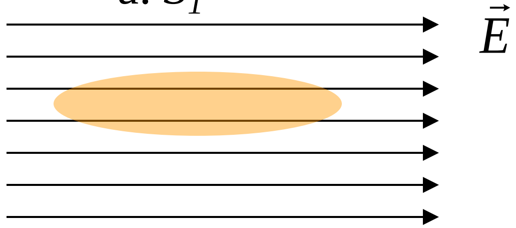
$$\phi_E = EA\cos\phi$$

Onde a superfície S pode ser aberta ou fechada.

Exemplo

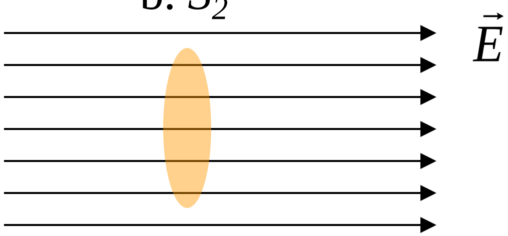
Em certa região do espaço temos um campo elétrico cujas linhas de campo estão separadas uniformemente (como entre as duas placas condutoras que estudamos anteriormente). Calcule o fluxo elétrico nas superfícies representadas na figura.

a. S_1

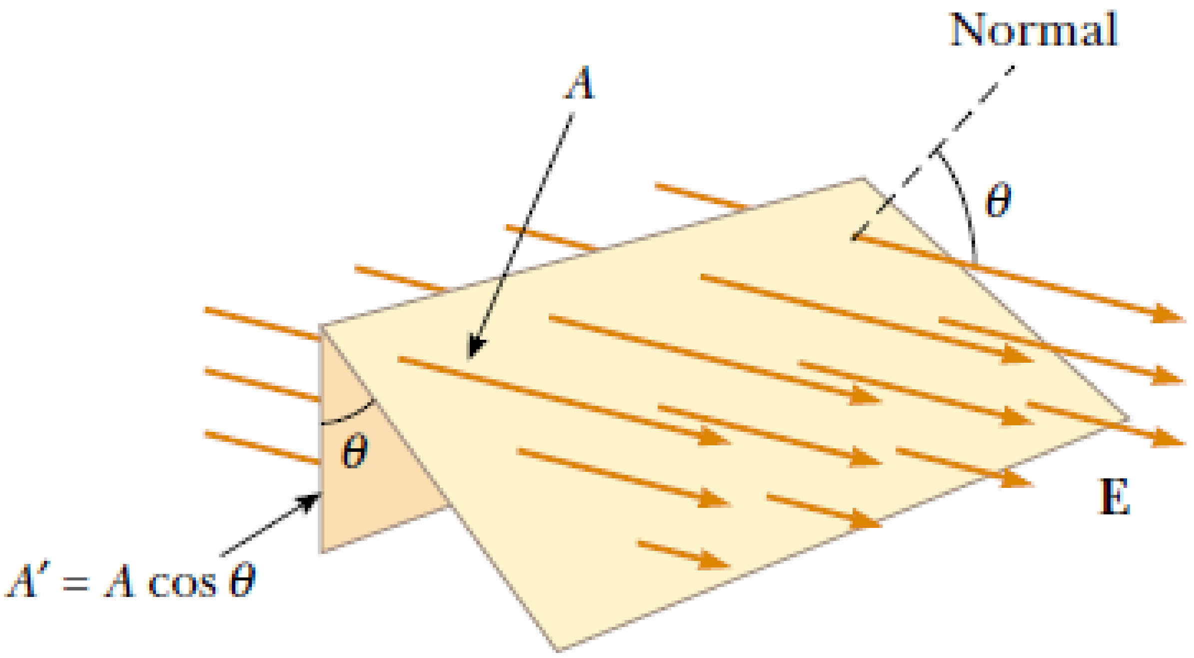


$$\Phi_E = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

b. S_2



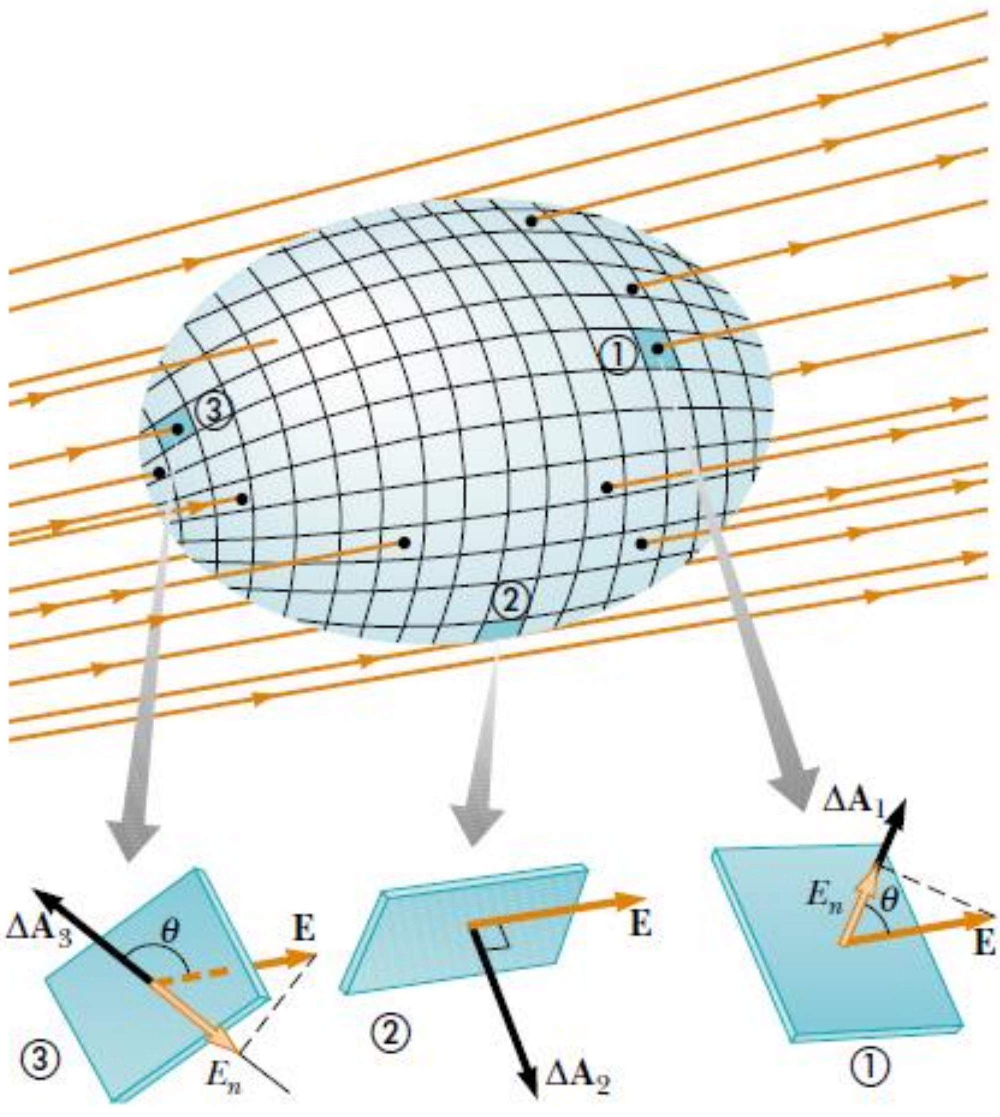
$$\Phi_E = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES_2$$



$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E_n A = EA'$$

$$\vec{A} = A\vec{n}$$

Proporcional ao número de linhas de campo elétrico penetrando alguma superfície



①
②
③
$\Delta \mathbf{A}_3$
θ
$\mathbf{E}$
E_n
③
$\mathbf{E}$
②
$\Delta \mathbf{A}_2$
$\Delta \mathbf{A}_1$
E_n
θ
$\mathbf{E}$
①

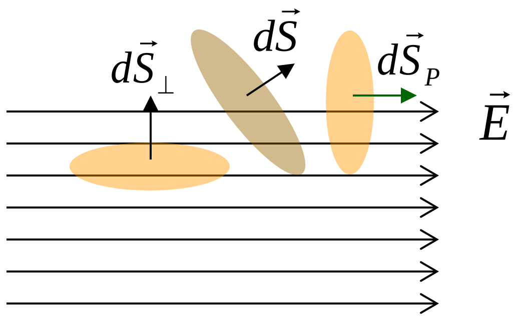
IF – 4300270 – Eletricidade e Magnetismo I

Fluxo elétrico

Observamos que o fluxo elétrico pode ser expresso por uma integral sobre elementos de superfície paralelos ao campo, dS_P.

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S E dS_P = \int_S E_n dS$$

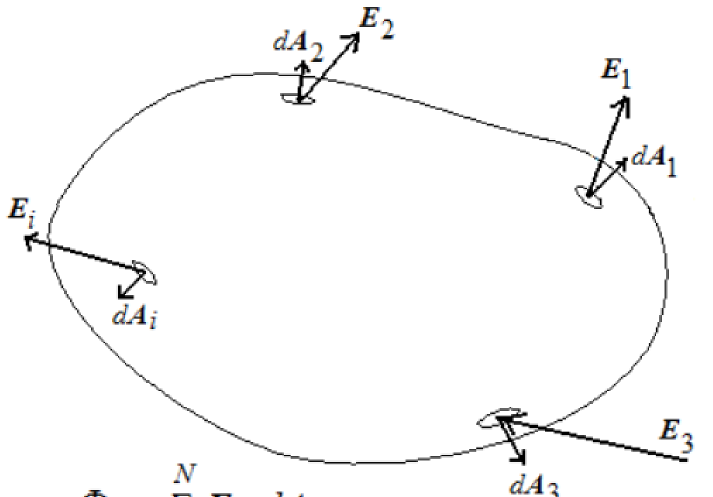
Na ilustração, representamos a decomposição do elemento de superfície em suas componentes paralela e perpendicular ao campo elétrico.
(Os elementos estão separados para uma melhor visualização simbólica).



Em particular, se tivermos uma superfície fechada

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E \cos\phi dA,$$

onde $\oint_S$ significa integral por toda a superfície fechada S.



$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{A}_i$$

No limite em que os pequenos elementos de área são infinitesimais ($d\vec{A} = dA\hat{n}$), a soma torna-se uma integral de superfície:

Fluxo elétrico

Exemplo

Calcule o fluxo elétrico através de uma caixa cúbica colocada num campo elétrico uniforme, tal que quatro de suas faces (S_1 , S_2 , S_3 e S_4) são perpendiculares ao campo.

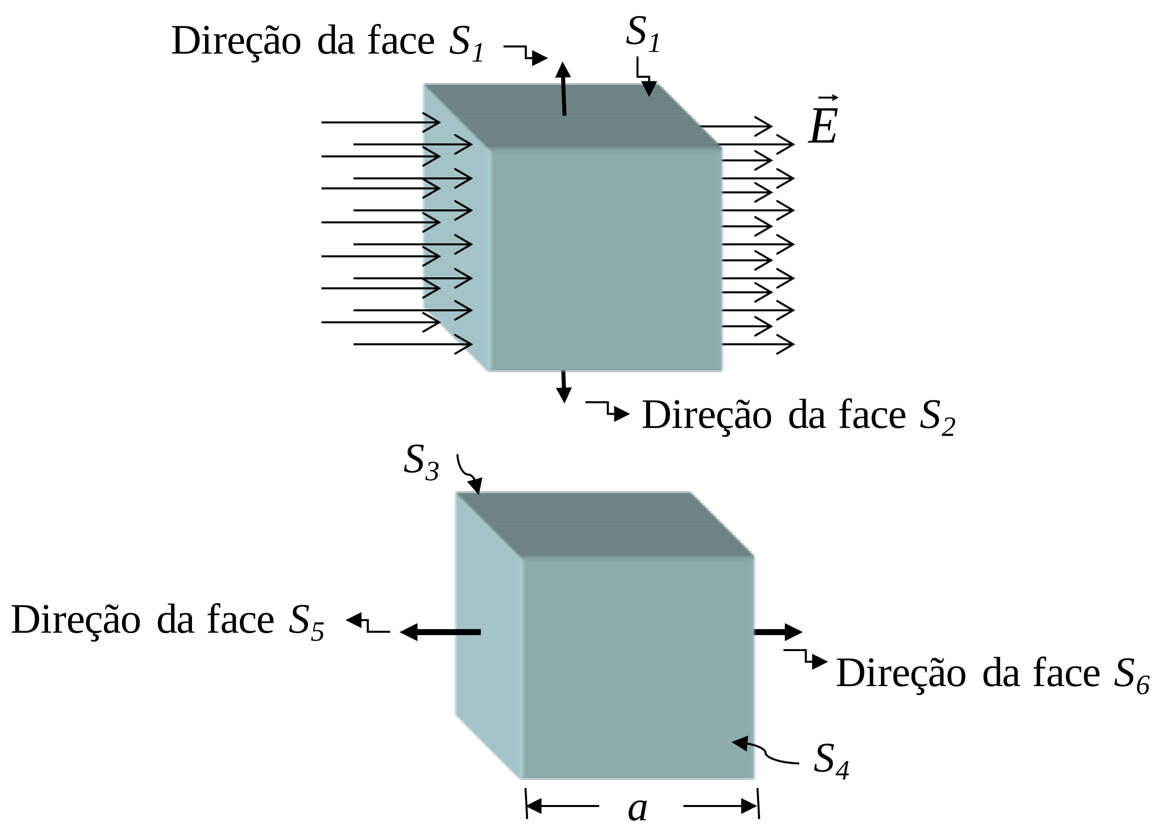
Resposta: $\Phi_E = 0$

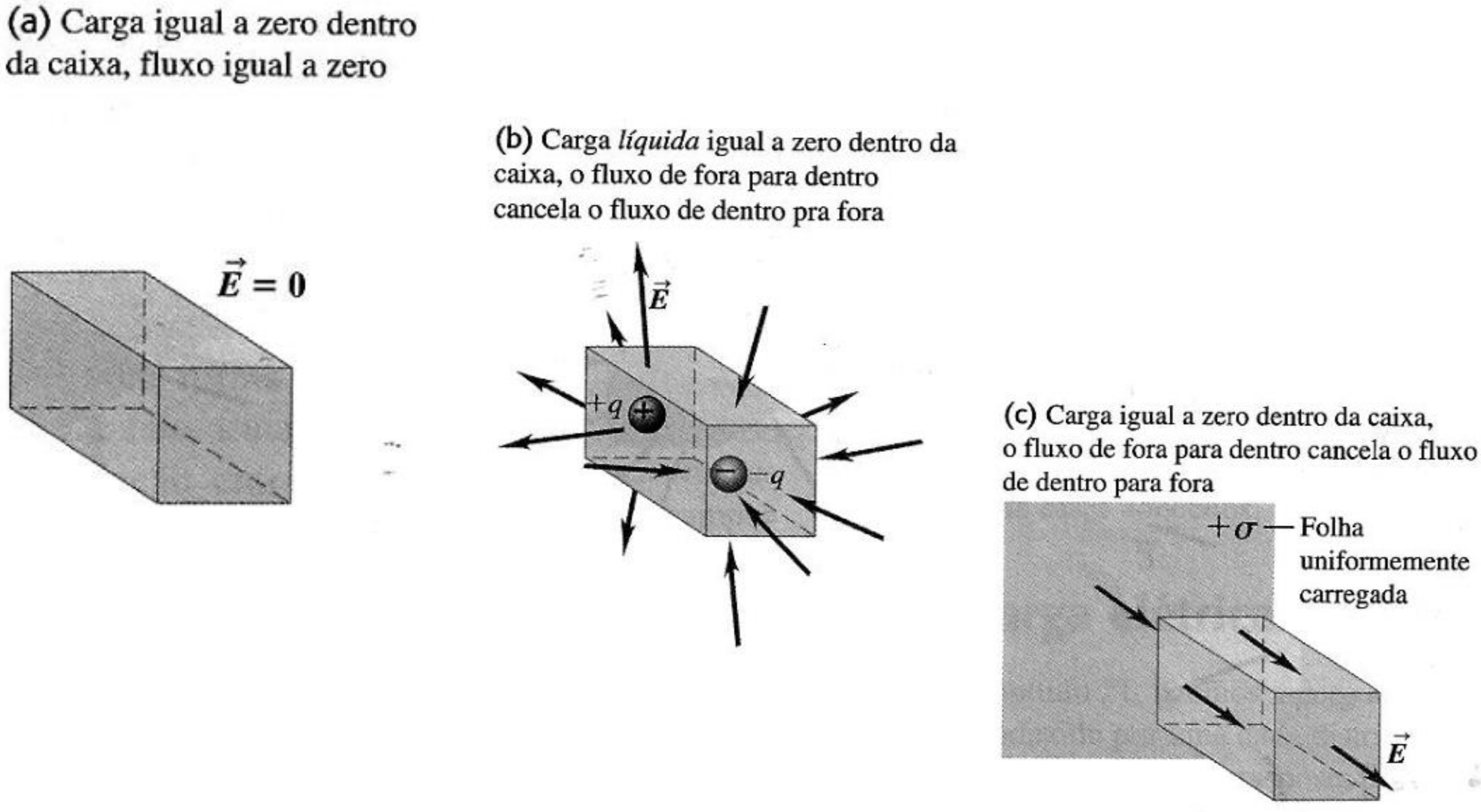
Obsevamos que $\Phi_E = 0$ nas superfícies perpendiculares ao campo. Enquanto que

$$\Phi_{E \to S_5} = -Ea^2$$

e

$$\Phi_{E \to S_6} = +Ea^2$$





Três casos nos quais a carga líquida é zero no interior da caixa e o fluxo elétrico através da caixa e igual a zero.

Fluxo elétrico

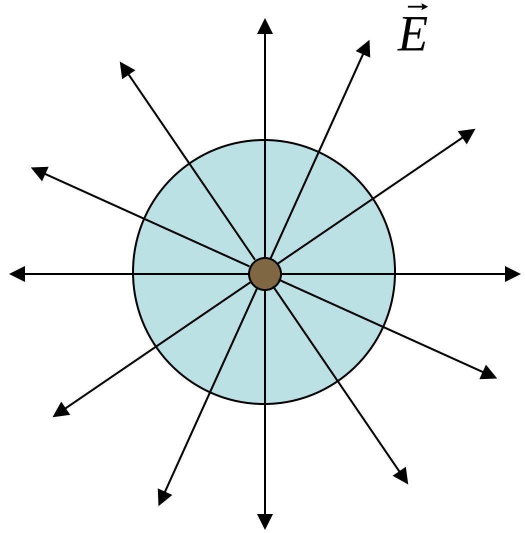
Exemplo

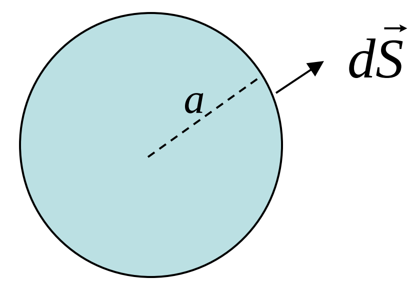
Uma carga puntiforme Q encontra-se na origem do sistema de coordenadas. Calcule o fluxo elétrico através de uma superfície esférica de raio $r = a$, centrada na origem.

Resposta

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Carga Q na origem





Superfície imaginária de raio a

Fluxo elétrico

Exemplo

Uma carga puntiforme Q encontra-se na origem do sistema de coordenadas. Calcule o fluxo elétrico através de uma superfície esférica de raio $r = a$, centrada na origem.

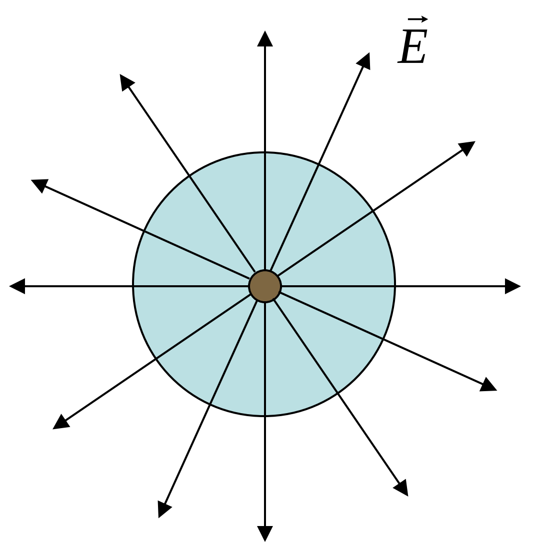
O fluxo elétrico é calculado por:

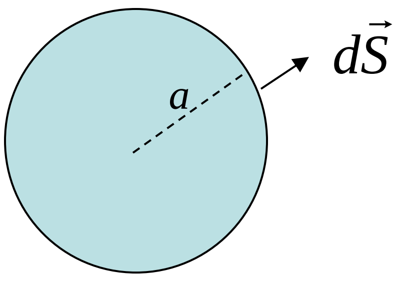
$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_E = \int_S E\,dS$$

$$\Phi_E = \int_S \left[\frac{(Q/\varepsilon_0)}{4\pi a^2}\right] dS$$

Carga Q na origem





Superfície imaginária de raio a

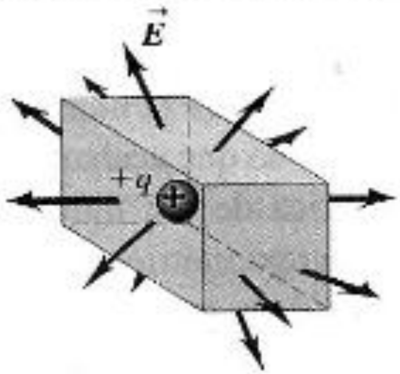
$$\Phi_E = \left[\frac{(Q/\varepsilon_0)}{4\pi a^2}\right] \int_S dS = \left[\frac{(Q/\varepsilon_0)}{4\pi a^2}\right](4\pi a^2) \quad \Rightarrow \quad \Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

1. Cada carga no interior da superfície imaginária produz um fluxo elétrico através da superfície. Se a carga for positiva, o fluxo elétrico está saindo da superfície. Se a carga for negativa, o fluxo elétrico está entrando na superfície.

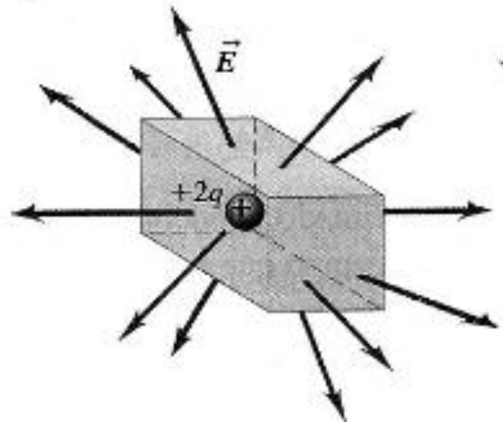
2. O fluxo elétrico *líquido* através de uma superfície fechada é dado pela soma do fluxo para fora da superfície (tomado como positivo) com o fluxo para dentro da superfície (tomado como negativo).

3. O fluxo elétrico líquido através de uma superfície fechada é diretamente proporcional à carga líquida no interior da superfície, mas não depende do tamanho da superfície fechada escolhida.

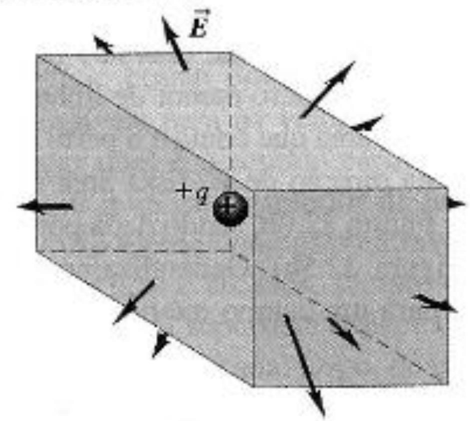
(a) Uma caixa contendo uma carga



(b) Duplicar a carga englobada equivale a duplicar o fluxo



(c) Duplicar as dimensões da caixa *não altera* o fluxo



Lei de Gauss para o campo elétrico

A relação formal entre a carga elétrica e o fluxo elétrico é conhecida como ***lei de Gauss***.

O fluxo de campo elétrico total emergindo de um volume arbitrário, *V*, é igual a carga elétrica efetiva *Q* contida neste volume dividida por ε_0.

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Onde a superfície *S* delimita o volume *V*.

Lei de Gauss

Exemplo

Uma caixa cúbica possui em seu interior uma carga efetiva de 6 μC. O fluxo elétrico medido através de uma das faces do cubo é: $\Phi_E = 8x10^5 \dfrac{N \cdot m^2}{C}$

Qual o fluxo total através das outras cinco faces?

Lembre que:

$$\varepsilon_0 = 8{,}9x10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Resposta:

$$\Phi = -1{,}26 \times 10^5 \frac{N \cdot m^2}{C}$$

Isto é possível? Explique.

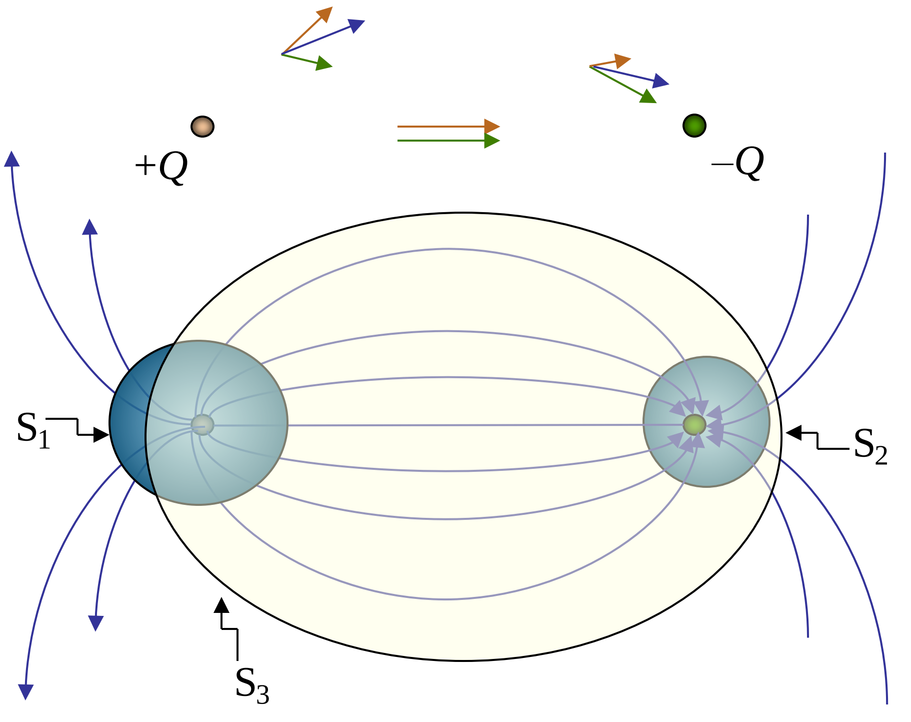
$$\phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{6\times10^{-6}}{8{,}9\times10^{-12}} = 6{,}74\times10^5$$

$$\phi_E = \phi_E(\mathrm{1face}) + \phi_E(\mathrm{5faces})$$

$$\phi_E(\mathrm{5faces}) = 6{,}74\times10^5 - 8{,}00\times10^5 = -1{,}26\times10^5\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}}$$

Exemplo

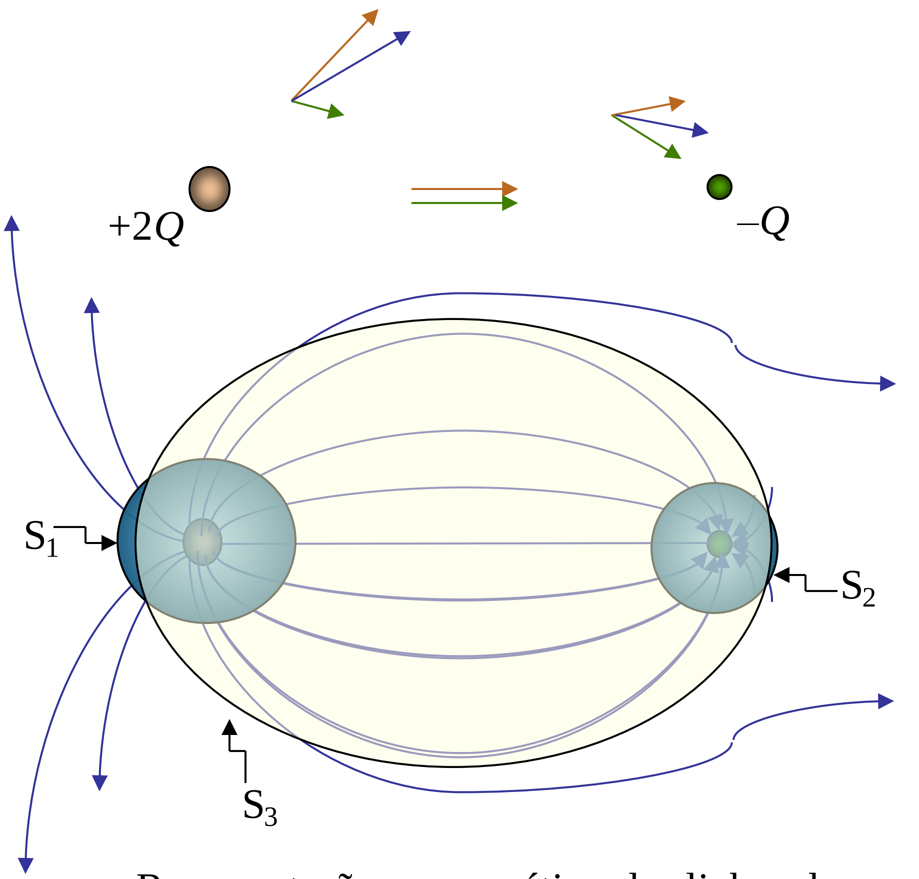
Calcule o fluxo elétrico nas superfícies S_1, S_2 e S_3 da ilustração.



Representação esquemática das linhas de campo

Exemplo

Calcule o fluxo elétrico nas superfícies S_1, S_2 e S_3 da ilustração.

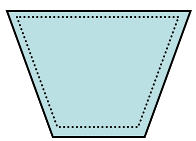


Representação esquemática das linhas de campo

Condutores em equilíbrio eletrostático

(i) Campo elétrico é zero dentro de um condutor
Se houvesse campo elétrico, haveria movimento de carga dentro do condutor (presença de força) e o condutor não estaria em equilíbrio eletrostático.

2. Se um condutor carrega uma carga livre, ela deve estar localizada na superfície.

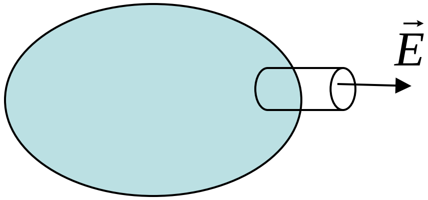


$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Como E=0 em todos os pontos de S

$$\Rightarrow Q_{\text{int}} = 0$$

3. O campo elétrico imediatamente fora da superfície de um condutor é perpendicular a superfície e tem módulo igual a $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



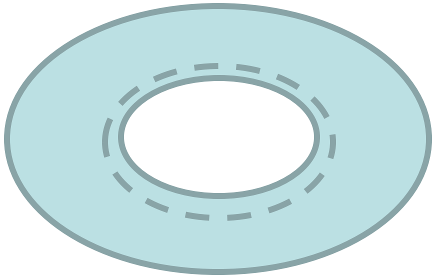
Se o campo elétrico não fosse perpendicular à superfície do condutor, as possíveis cargas desta superfície não estariam em equilíbrio eletrostático.

$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{Q}{A\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Condutores em equilíbrio eletrostático

4. Quando não existir nenhuma carga no interior de uma cavidade, a carga total sobre a superfície da cavidade é igual a zero



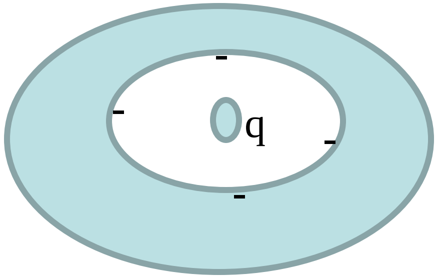
$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q_{\text{int}} = 0$$

5. Quando existir uma carga q no interior de uma cavidade condutora, a carga total na superfície da cavidade é iqual a –q.

$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q_{\text{int}} = 0$$



$$q + q' = 0 \quad \Longrightarrow \quad q' = -q$$

IF – 4300270 – Eletricidade e Magnetismo I

Usando a Lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico – ***simetria plana***.

Exemplo

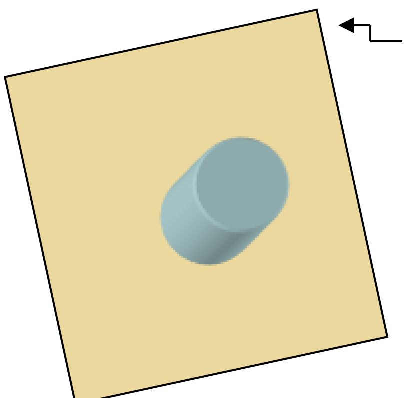
Calcule o campo elétrico produzido por um plano (infinito) não condutor carregado com densidade superficial de carga $+\sigma$.

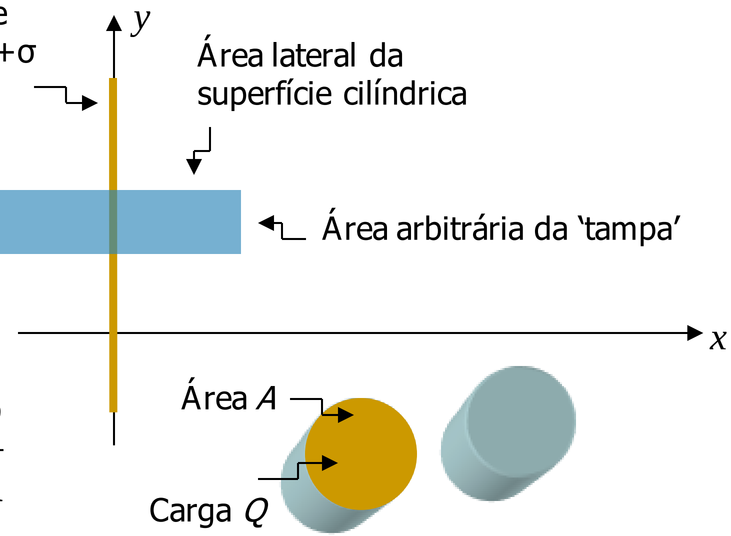
Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Procedimento

A idéia é encontrar uma superfície (imaginária) para facilitar os cálculos. Por exemplo, parte dela perpendicular ao campo e parte paralela. Esta superfície imaginária é conhecida como ***superfície gaussiana***.



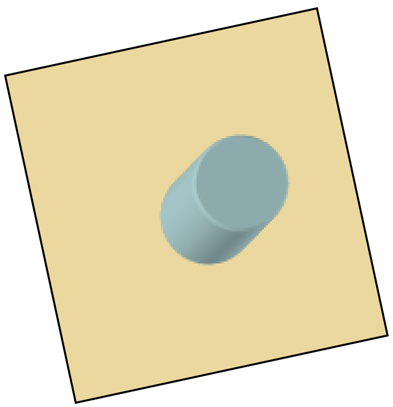


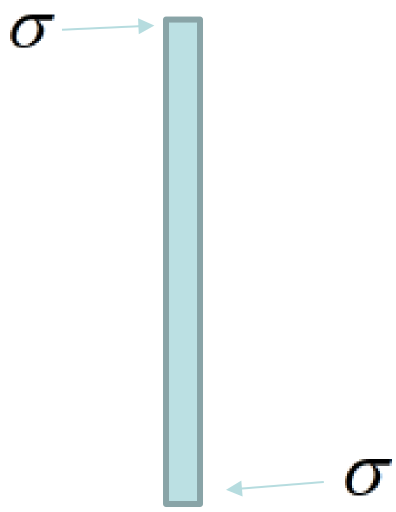
Resposta: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ $\quad \sigma = \dfrac{Q}{A}$

E se esse plano fosse condutor com a mesma densidade de carga?

No limite de espessura tendendo a zero: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Para espessuras não desprezíveis, a diferença é que eu precisaria adicionar o dobro da quantidade de carga para ter a mesma densidade de carga, já que a carga é distribuída nas duas faces de área A.



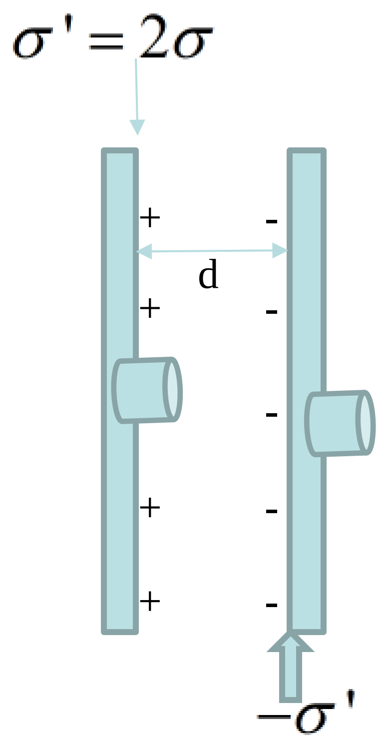


$$2EA = \frac{\sigma A + \sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Note que foi necessário colocar 2Q de carga, Q em cada uma das áreas A

E qual seria ao campo elétrico entre duas placas condutoras separadas por uma distância pequena d?



Aplicando a Lei de Gauss, entre as placas:

$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

Fora das placas:

$$\oint_S \vec{E}.\hat{n}dA = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$

Usando a Lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico – ***simetria cilíndrica***.

Exemplo 1

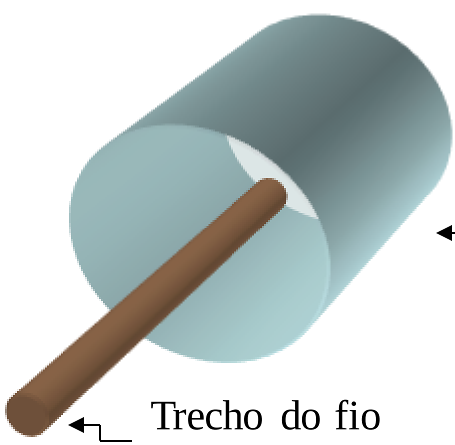
Calcule o campo elétrico produzido por um fio (infinito) não condutor carregado com densidade linear de carga $+\lambda$.

Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Procedimento

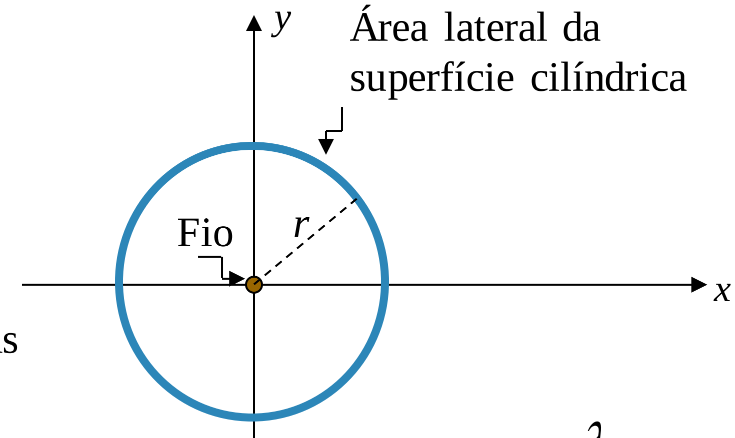
A idéia é encontrar uma superfície (imaginária) para facilitar os cálculos. Por exemplo, parte dela perpendicular ao campo e parte paralela. Esta superfície imaginária é conhecida como ***superfície gaussiana***.



Superfície gaussiana cilíndrica, concêntrica ao fio.(As faces da superfície estão omitidas para melhor visualização.)

Trecho do fio carregado com densidade linear de carga $+\lambda$

Área lateral da superfície cilíndrica



Resposta: $E = \dfrac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$

Exemplo 1

$$\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = \int E\, dA = E\int dA = E\, 2\pi r\, h$$

mas $\int \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0 2\pi r\, h} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}\,\hat{n}$$

IF – 4300270 – Eletricidade e Magnetismo I

Usando a Lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico – ***simetria esférica***.

Exemplo 2

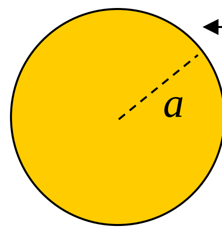
Uma esfera de raio a está uniformemente carregada com densidade volumétrica de carga ρ.

a. Calcule o campo elétrico para $r > a$.

b. Calcule o campo elétrico para $r < a$.

Lei de Gauss

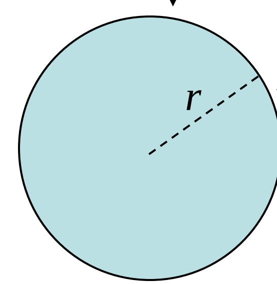
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Distribuição volumétrica de carga com densidade ρ. A carga total é:

$$Q = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

Superfície gaussiana com $r > a$

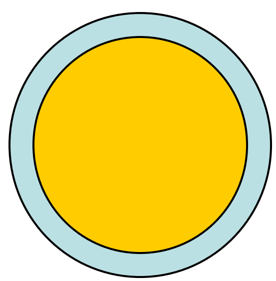


$d\vec{S}$

Procedimento

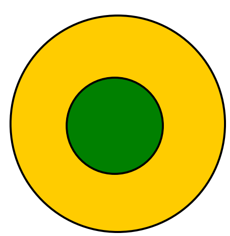
Envolvemos a distribuição de cargas concentricamente com as superfícies gaussianas observando que a direção do campo elétrico é paralela à direção das superfícies em ambos casos.

a.

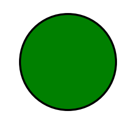


Resposta: $E = \dfrac{(Q/\varepsilon_0)}{4\pi r^2}$

b.



Resposta: $E = \dfrac{(Q/\varepsilon_0)}{4\pi a^3} r$



Superfície gaussiana com $r < a$

Exemplo 2

a) para $r > a$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S E\hat{r} \cdot \hat{r} \, dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \hat{r}$$

b) para $0 < r < a$

$$\oint_S E\hat{r} \cdot \hat{r} \, dA = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{\rho \, 4\pi r^3}{\varepsilon_0 \, 3}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{r}{3\varepsilon_0} = \frac{Q r}{4\pi a^3 \varepsilon_0}$$

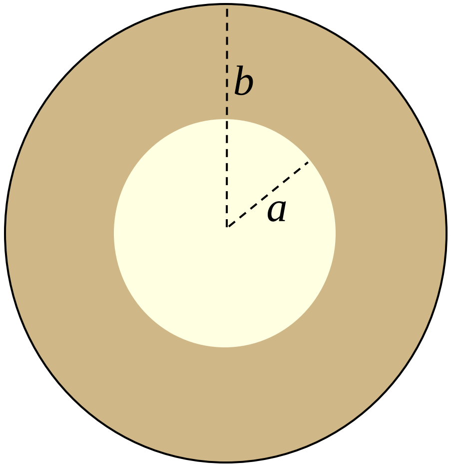
Usando a Lei de Gauss para o cálculo do campo elétrico – ***simetria esférica***.

Exemplo 3

Uma esfera de raio b está uniformemente carregada com densidade volumétrica de carga ρ. Esta esfera possui uma cavidade esférica de raio a, concêntrica à esfera, na qual ρ = 0.

Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

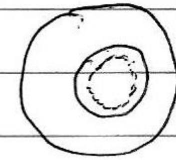


Distribuição volumétrica de carga com densidade ρ.

a. Calcule o campo elétrico para $r < a$.
b. Calcule o campo elétrico para $a < r < b$.
c. Calcule o campo elétrico para $r > b$.

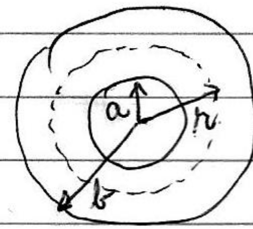
Depois, uma pequena esfera de carga q é colocada no centro da cavidade. Explique como seus resultados anteriores se modificarão e obtenha os novos resultados fazendo o mínimo possível de cálculos.

Exemplo 3.



(a) $\int \vec{E}\,\hat{n}\,dA = 0$

$E = 0$



(b) $\int \vec{E}\cdot\hat{n}\,d\vec{A} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$Q_{int} = \rho\,\frac{4}{3}\pi\,(r^3 - a^3)$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\frac{4}{3}\pi\,(r^3 - a^3)$$

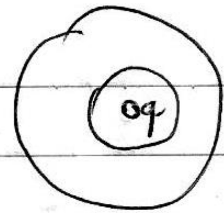
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^3 - a^3}{r^2}\right)\hat{r}$$

(c) $\int \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{\rho\,4\pi}{3\varepsilon_0}\,(b^3 - a^3)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\frac{(b^3 - a^3)}{r^2}\,\hat{r}$$

a)



(a) $$\int \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

b) $$Q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi (r^3 - a^3) + q$$

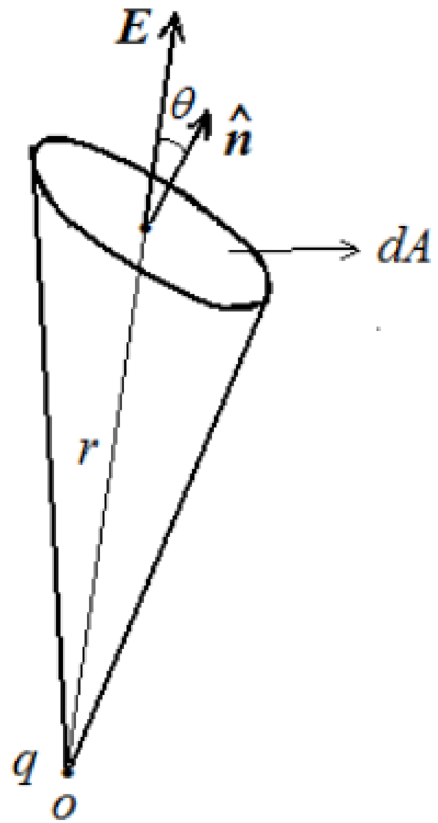
$$\vec{E} = \left\{ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{r^3 - a^3}{r^2} \right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right\} \hat{r}$$

(c) $$\int \vec{E} \cdot \hat{n}\, d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3) + \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \left\{ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{b^3 - a^3}{r^2} \right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right\} \hat{r}$$

Dedução da Lei de Gauss a partir da Lei de Coulomb

Para resolver este problema, vamos primeiro obter o fluxo do campo elétrico gerado por q sobre um elemento de área circular dA.



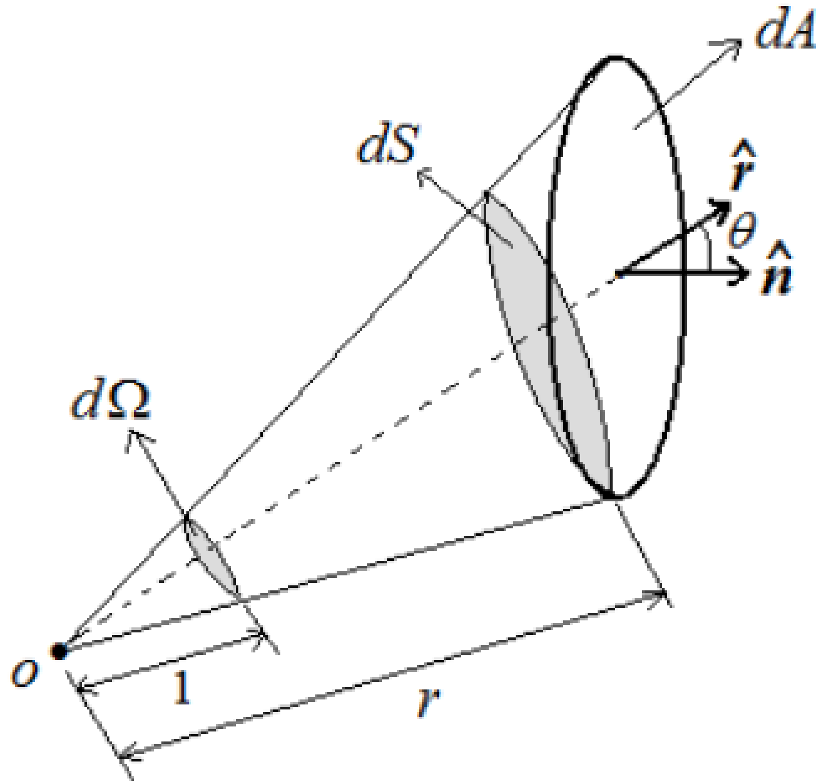
$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dA\cos\theta}{r^2}. \qquad (6)$$

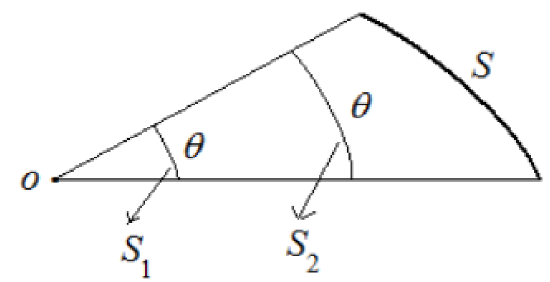
Define-se o **ângulo sólido** $d\Omega$ subentendido por um elemento de área orientado dA, com normal $\hat{n}$, em relação a um ponto O, situado à distância r de dA como:

$$d\Omega \equiv \frac{dA\cos\theta}{r^2},$$

onde θ é o ângulo entre $\hat{n}$ e o vetor unitário na direção de r, $\hat{r}$.

Para entender o conceito de ângulo sólido observe a figura abaixo.



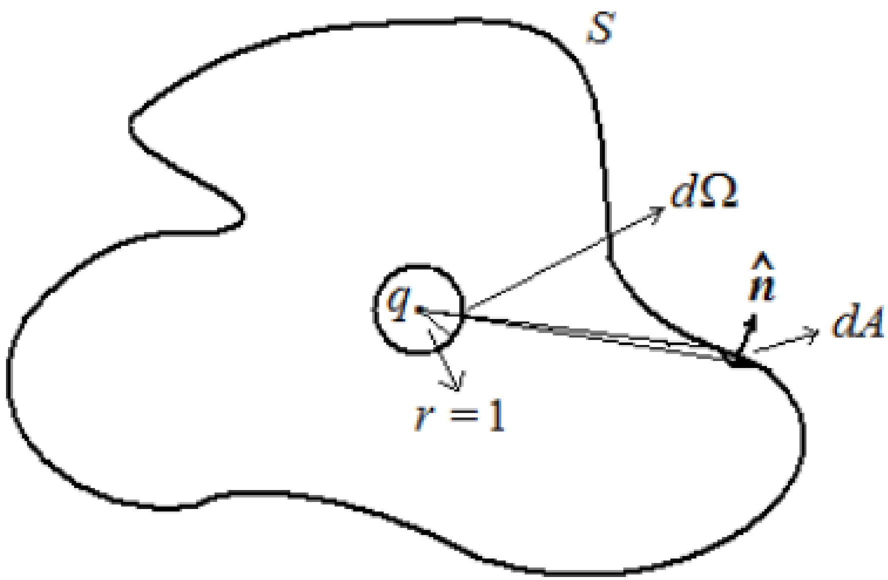


θ radiano
dΩ esterradiano

Em termos do conceito de ângulo sólido, podemos reescrever o fluxo elétrico através de uma superfície circular qualquer gerado por uma carga puntiforme q (equação 6) como:

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega.$$

Podemos agora tratar do problema principal deste exemplo, que é o cálculo do fluxo elétrico devido a uma carga puntiforme q através de uma superfície fechada qualquer.



$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \, d\Omega.$$

Note que a integral de $d\Omega$ pela superfície fechada S é igual ao ângulo sólido *total* compreendido por S, que é igual à área da esfera de raio unitário no interior de S:

$$\Omega = \oint_S \, d\Omega = 4\pi.$$

Como qualquer distribuição de cargas pode ser decomposta em cargas elementares puntiformes e, pelo princípio da superposição, o campo elétrico gerado por essa distribuição de cargas em qualquer ponto do espaço é dado pela soma dos campos das cargas elementares, então o fluxo elétrico através de qualquer superfície é dado por:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \text{Lei de Gauss}$$

onde Q é a carga *líquida* total contida no interior da superfície. Note que se $Q = 0$, isto é, se não houver carga líquida dentro da superfície fechada, o fluxo elétrico através da superfície é nulo.