

A prova totaliza 11,0 pontos e podem ser resolvidas todas as questões. Notas acima de 10,0 serão arredondadas para 10,0.

1) Considere o modelo de Análise de Variância

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independentes}$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2$$

a) Prove que $\gamma = \frac{4\mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4}$ é estimável.

b) Qual é o significado prático desse parâmetro?

c) Obtenha a matriz de planejamento para esse modelo e a expressão do estimador não viciado uniformemente de variâncias mínima para γ . (2,0 pontos)

2) Dados os modelos $\underline{Y} = X\beta + \underline{\epsilon}$, $\underline{\epsilon} \sim N_n(\underline{0}, \sigma^2 I)$ e $\underline{Y} = X\beta + \underline{\epsilon}$, $\underline{\epsilon} \sim N_n(\underline{0}, \Sigma)$, Σ positiva definida, com estimadores de β $\hat{\beta}$ e $\hat{\beta}_G$ respectivamente, vale o resultado

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_G \iff \exists F \text{ tal que } \Sigma X = X F.$$

Uma outra maneira de verificar a igualdade desses estimadores é por intermédio da equivalência

(Milliken and Albohali, The American Statistician, 1984, vol. 38, n.º 4, pag 298-299)

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_G \Leftrightarrow X' \Sigma^{-1} (I - W) = 0 \text{ para}$$

$$W = X(X'X)^{-1}X' \text{ e } 0 \text{ matriz nula. (2,0 pontos)}$$

3) No modelo $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \gamma'x_{ij} + \epsilon_{ij}$, $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ independentes $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, com matriz de planejamento

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Prove que γ é estimável mas α_1, α_2 e α_3 não são estimáveis.

b) Encontre um conjunto base de funções estimáveis. (2,0 pontos)

4) Considere o modelo de regressão $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t$, com $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2 t^2)$, variáveis aleatórias independentes, $t = 1, 2, \dots, n$

Determine os estimadores não viesados uniformemente de variância mínima para β_0 e β_1 . (2,0 pontos)

5) No modelo de análise de variância com um fator

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independentes,}$$

$i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3$, as médias amostrais das caselas foram

$$\bar{y}_{j1} = 2 \quad \bar{y}_{j2} = 4 \quad \bar{y}_{j3} = 6 \quad \bar{y}_{j4} = 8.$$

Dois contrastes $\sum_{i=1}^4 c_i \alpha_i$ e $\sum_{i=1}^4 a_i \alpha_i$ ($\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{i=1}^4 c_i = 0$) são

ortogonais se $\sum_{i=1}^4 a_i c_i = 0$.

a) Se X é a matriz de planejamento desse modelo, obtenha $X'X$ e mostre que uma inversa generalizada de $X'X$ é

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times 4} \\ 0_{4 \times 1} & \frac{1}{3} I_4 \end{bmatrix}.$$

b) Obtenha G_1 e G_2 numeradores das estatísticas dos testes 1 e 2 dos contrastes ortogonais

teste 1

$$H_0: \alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

$$H_a: \alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$$

teste 2

$$H_0: \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

$$H_a: \alpha_3 - \alpha_4 \neq 0$$

c) Calcule o numerador da estatística de teste

$$H_0: \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

contra H_a : Pelo menos uma das igualdades não se verifica.

Se Q é este numerador, verifique que $Q = Q_1 + Q_2$.
(3,0 pontos)